VISIT…

LANZAROTE Caliente.com

Л. А. Бессонов

# ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

Издание девятое
переработанное и дополненное

Рекомендовано Государственным комитетом
Российской Федерации по высшему
образованию
в качестве учебника для студентов
вузов, обучающихся по направлениям:
"Электротехника, электромеханика,
электротехнологии", "Электроэнергетика"
и "Приборостроение"



Москва
« Высшая школа » 1996

ББК 31.21
Б 53
УДК 621.3.013

Федеральная целевая программа
книгоиздания России

Рецензент — кафедра "Теоретические основы электротехники" Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета (зав. кафедрой проф. В. Н. Боронин)

Б $\frac{2202020000-002}{001(01)-96}$ 56—96

ISBN 5-06-002160-2

© Л. А. Бессонов, 1996

## Предисловие

Теоретические основы электротехники являются базовым курсом, на который опираются профилирующие дисциплины многих высших технических учебных заведений. В соответствии с новыми учебными планами и спецификой отдельных вузов студенты одних специальностей изучают курс ТОЭ в течение трех семестров, других — в течение двух семестров. В обоих случаях первые два семестра студенты всех специальностей изучают теорию линейных и нелинейных электрических цепей (I и II части курса ТОЭ).

В третьем семестре студенты изучают теорию электромагнитного поля (III часть курса ТОЭ). Учебник состоит из двух частей. Первая часть (главы 1 — 12 и 8 приложений) посвящена теории линейных электрических цепей. Вторая (главы 13 — 18) — теории нелинейных электрических цепей.

Теория цепей и теория поля интенсивно развиваются. Развивается и курс ТОЭ. По сравнению с предыдущим в девятое издание учебника включены следующие новые главы и разделы по теории цепей: основные положения теории электромагнитного поля и их применение к теории электрических цепей, дискретные и цифровые сигналы и их обработка, аналитический сигнал, преобразование Гильберта, $z$-преобразования цифровых сигналов, цифровые фильтры, имитированные элементы электрических цепей, теорема Теллегена, переходные процессы в цепях с управляемыми нелинейными индуктивными элементами, переходные процессы в нелинейных электромеханических системах, переходные процессы в цепях с термисторами, переходные процессы в цепях с управляемыми источниками напряжения и тока с учетом их нелинейных и частотных свойств, основы диакоптики нелинейных цепей, многообразие типов движений в нелинейных цепях и хаотические колебания для мгновенных значений (странные аттракторы), исследование устойчивости в цепях с неидеальными частотно-зависимыми управляемыми источниками тока и напряжения, передача мощности линейной нагрузке от источника с нелинейным внутренним сопротивлением, магниторезисторы и магнитодиоды, фоторезисторы и фотодиоды и др. Переработано изложение ряда вопросов теории цепей: в частотные преобразования включено преобразование Брутона, переработано изложение элементной базы цепей синусоидального тока, более полно рассмотрены связи между топологическими матрицами. Рассмотрено дифференцирование и интегриро-

вание в области изображений, выведены обобщенные формулы для токов и напряжений в произвольной точке линии с распределенными параметрами при многократных отражениях при произвольных сопротивлениях генератора и нагрузки, даны передаточные функции активных *RC*-фильтров в нормированном виде, магнитные линии с распределенными параметрами и другие вопросы.

По теории поля в девятое издание учебника включены следующие новые разделы: метод конечных элементов, уравнения Максвелла в симметричной форме, излучение из щели, замедляющие системы, явление левитации, круглый волновод, круглый и прямоугольный объемные резонаторы, волновые *S* и *T* параметры элементов высокочастотного тракта, измерение комплексного сопротивления нагрузки волновода, диэлектрические волноводы и другие вопросы. В связи с достижениями в области высокотемпературной сверхпроводимости переработана глава о сверхпроводящих телах в электромагнитных полях. Переработаны и дополнены вопросы и задачи для самопроверки ко всем главам учебника.

Как и в предыдущем издании, материал курса ТОЭ разделен на обязательный для студентов всех специальностей, в учебных планах которых имеется курс ТОЭ, — этот материал (ядро курса) набран нормальным шрифтом (корпусом) и специальный, в неодинаковой степени необходимый студентам различных специальностей — этот материал набран петитом и расположен либо посреди основного текста, либо в приложения. В зависимости от специфики института, факультета и специальности кафедра ТОЭ того или иного вуза должна указать студенту, какие разделы специального материала он должен изучить.

Матрично-топологическое направление теории цепей и символический метод расчета цепей синусоидального тока изложены в книге после традиционного рассмотрения свойств электрических цепей и методов их расчета. Опыт работы показывает, что при такой последовательности обучения студент гораздо лучше усваивает физическую сущность происходящих в цепях процессов и методов расчета, а времени на усвоение теории затрачивает меньше, чем в том случае, когда изложение основ теории цепей и методов их расчета с самого начала проводится на формализованной матрично-топологической основе и тем более одновременно с рассмотрением символического метода.

Учебник написан так, что допускает возможность перестановки некоторых глав, если в этом возникнет необходимость в каком-либо вузе, где исторически сложилась традиция несколько иной последовательности изложения материала.

Наиболее приспособлен для работы с данным учебником сборник задач [23]. Для облегчения усвоения материала в учебнике дано решение 230 числовых задач, равномерно распределенных по всем разделам курса, и 540 вопросов и небольших задач для самопроверки по основному материалу курса. Для расчета электрических цепей, рассматриваемых в курсе ТОЭ, можно использовать программы для ЭВМ, приведенные в сборнике задач, составленного кафедрой ТОЭ МИРЭА [23]. В сборнике даны программы нахождения корней полиномов высоких степеней, решения систем дифференциальных уравнений, составленных в форме Коши, решения систем уравнений с комплексными коэффициентами, составленными по методу узловых потенциалов и методу контурных токов, и др. Во всех случаях используются стандартные подпрограммы из библиотеки научных программ на ФОРТРАНе. В [23] приведен также пакет программ для решения типовых задач на программируемых микрокалькуляторах БЗ-34 и МК-54.

Для анализа сложных линейных и нелинейных задач, выходящих за рамки курса ТОЭ, можно пользоваться машинными программами СПАРС, НАП-2, АНП-3, Пальма [27], [28], [29], [30]. Они позволяют осуществить частотный и временной анализ, провести расчет чувствительности схем, оптимизировать устройство по выбранному критерию качества.

Автор выражает благодарность за высказанные полезные замечания, способствовавшие улучшению книги, официальному рецензенту д-ру техн. наук, проф. кафедры ТОЭ Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета В. Л. Чечурину и товарищам по работе на кафедре ТОЭ Московского государственного института радиотехники, электроники и автоматики (Технического университета) канд. техн. наук доцентам В. И. Цыганову, С. А. Милениной и ст. преподавателю С. Э. Расовской.

Все замечания по книге направлять в издательство "Высшая школа" по адресу: 101430, Москва, ГСП-4, Неглинная ул., 29/14.

*Автор*

Курс теоретических основ электротехники наряду с курсами физики и математики является основополагающим курсом для всех электротехнических, энергетических, приборостроительных, электронных и многих других специальностей вузов.

К изучению курса ТОЭ студенты приступают после освоения разделов "Электричество и магнетизм" курса физики и разделов "Дифференциальное и интегральное исчисление и матричная алгебра" курса математики. Поэтому элементы теории электрических цепей и теории поля студентам, приступающим к изучению ТОЭ, в определенной мере известны.

В курсе ТОЭ эти знания расширяются, углубляются, дополняются и доводятся до уровня, соответствующего современной теории цепей и поля и достаточного для решения задач, с которыми инженеру придется встретиться в своей практической деятельности.

При изучении курса ТОЭ студент учится правильно ставить электротехническую задачу, составлять ее расчетную модель в требуемом диапазоне частот и амплитуд воздействий, выбирать наиболее рациональный метод решения, интерпретировать получаемые результаты и, если потребуется, уточнять расчетную модель. Изучение курса ТОЭ способствует развитию у студентов инженерной интуиции.

I главу к курсу ТОЭ можно рассматривать как связующее звено между курсом физики и курсом ТОЭ, где в краткой форме рассмотрены свойства электромагнитных полей, основные величины, которые их характеризуют, интегральные и дифференциальные формы записи основных законов электромагнитного поля. Исходя из уравнений электромагнитного поля, дается вывод законов Кирхгофа, которым подчиняются электрические цепи, рассматривается элементная база теории цепей и показывается, как в теории цепей осуществляется переход от реальных электротехнических устройств к их схемам замещения. В первой части курса рассмотрены свойства и методы анализа линейных электрических цепей с сосредоточенными и распределенными параметрами при постоянных, синусоидальных и произвольных воздействиях. Во второй части курса ТОЭ рассмотрены нелинейные электрические и магнитные цепи. Под *нелинейными электрическими цепями* понимают электрические цепи, содержащие элементы с нелинейными вольт-амперными, вебер-амперными и кулон-вольтными характеристиками. Если цепь содержит хотя бы один такой элемент и изображающая точка в процессе работы перемещается по существенно нелинейному участку характеристики этого элемента, то она принадлежит к рассматриваемому классу цепей.

Хотя к нелинейным электрическим и магнитным цепям и применимы законы Кирхгофа, но такие методы расчета, как методы узловых потенциалов и контурных токов, а в более общем смысле — методы, основанные на принципе наложения и на постоянстве параметров элементов цепей, рассмотренные в первой части курса, к нелинейным цепям неприменимы. Дело в том, что сопротивление и проводимость нелинейного резистора, равно как индуктивность нелинейной индуктивной катушки и емкость нелинейного конденсатора, являются нелинейными функциями мгновенного значения тока (напряжения) на этих элементах, т. е. представляют собой переменные величины, а потому для расчета малопригодны.

Вместо них используют вольт-амперные характеристики нелинейных резистивных сопротивлений, вебер-амперные характеристики нелинейных индуктивностей и кулон-вольтные характеристики нелинейных конденсаторов. Один и тот же нелинейный элемент в зависимости от поставленной при исследовании задачи и выбранного метода анализа должен быть описан различными характеристиками.

При определенных условиях в некоторых нелинейных цепях могут возникать физические явления, принципиально невозможные в линейных. К их числу относятся автоколебания, субгармонические колебания, автомодуляция, триггерные явления, зависимость установившегося процесса от начальных условий, хаотические движения и ряд других.

Приступая к расчету токов и напряжений или к исследованию условий существования того или иного явления, надлежит правильно поставить саму задачу, принимая во внимание то главное, что оказывает решающее влияние на процессы в цепи, и пренебрегая относительно второстепенными факторами. Если этого не сделать, задача может оказаться трудноразрешимой, а само решение, если оно будет получено, — малообозримым. Однако и после ряда упрощающих допущений процессы в нелинейных цепях описываются одним или несколькими нелинейными дифференциальными уравнениями, точное решение которых, как правило, неизвестно. Поэтому возникает задача о том, каким образом можно решать нелинейные дифференциальные уравнения приближенно, применяя для этой цели специфические методы, разработанные для нелинейных цепей, а также приемы, рассмотренные в первой части курса для линейных цепей, используемые при кусочно-линейной аппроксимации характеристик нелинейных элементов.

Часть I

# ЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

Глава первая

## ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К ТЕОРИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

**§ 1.1. Электромагнитное поле как вид материи.** Под *электромагнитным полем* понимают вид материи, характеризующийся совокупностью взаимосвязанных и взаимообусловливающих друг друга электрического и магнитного полей. Электромагнитное поле может существовать при отсутствии другого вида материи — вещества, характеризуется непрерывным распределением в пространстве (электромагнитная волна в вакууме) и может проявлять дискретную структуру (фотоны). В вакууме поле распространяется со скоростью света, полю присущи характерные для него электрические и магнитные свойства, доступные наблюдению.

Электромагнитное поле оказывает силовое воздействие на электрические заряды. Силовое воздействие положено в основу определения двух векторных величин, описывающих поле: напряженности электрического поля $\vec{E}$ (В/м) и индукции магнитного поля $\vec{B}$(В·с/м²). На заряд $q$(Кл), движущийся со скоростью $\vec{v}$ в электрическом поле напряженности $\vec{E}$ и магнитном поле индукции $\vec{B}$, действует сила Лоренца $\vec{F}=q\vec{E}+q[\vec{v}\vec{B}]$.

Электромагнитное поле обладает энергией, массой и количеством движения, т. е. такими же атрибутами, что и вещество. Энергия в единице объема, занятого полем в вакууме, равна сумме энергий электрической и магнитной компонент поля и равна $W_{эм}=\frac{\varepsilon_0 E^2}{2}+\frac{B^2}{2\mu_0}$, здесь $\varepsilon_0=\frac{1}{4\pi\cdot 9\cdot 10^9}$ — электрическая постоянная, Ф/м; $\mu_0=4\pi\cdot 10^{-7}$ — магнитная постоянная, Гн/м. Масса электромагнитного поля в единице объема равна частному от деления энергии поля $W_{эм}$ на квадрат скорости распространения электромагнитной волны в вакууме, равной скорости света. Несмотря на малое значение массы



поля по сравнению с массой вещества, наличие массы поля указывает на то, что процессы в поле являются процессами инерционными. Количество движения единицы объема электромагнитного поля определяется произведением массы единицы объема поля на скорость распространения электромагнитной волны в вакууме.

Электрическое и магнитное поля могут быть изменяющимися и неизменными во времени. Неизменным в макроскопическом смысле электрическим полем является электростатическое поле, созданное совокупностью зарядов, неподвижных в пространстве и неизменных во времени. В этом случае существует электрическое поле, а магнитное отсутствует. При протекании постоянных токов по проводящим телам внутри и вне их существует электрическое и магнитное поля, не влияющие друг на друга, поэтому их можно рассматривать раздельно. В изменяющемся во времени поле электрическое и магнитное поля, как упоминалось, взаимосвязаны и обусловливают друг друга, поэтому их нельзя рассматривать раздельно.

**§ 1.2. Интегральные и дифференциальные соотношения между основными величинами, характеризующими поле.** Электромагнитные поля могут быть описаны интегральными или дифференциальными соотношениями. Интегральные соотношения относятся к объему (длине, площади) участка поля конечных размеров, а дифференциальные — к участку поля физически бесконечно малых размеров. Они выражаются операциями градиента, дивергенции, ротора (раскрытие операции grad, div и rot в различных системах координат см. в III части курса). В макроскопической теории поля описывают свойства поля, усредненные по бесконечно малому физическому объему и во времени. Этот объем в отличие от математически бесконечно малого объема может содержать большое число атомов вещества. Дифференциальные уравнения макроскопической теории поля не описывают поля внутри атомов, для чего, как известно, служат уравнения квантовой теории поля.

В электростатическом поле поток вектора напряженности электрического поля $\vec{E}$ через замкнутую поверхность (рис. 1.1) равен свободному заряду $q_{\text{свб}}$, находящемуся внутри этой поверхности, деленному на $\varepsilon_0\varepsilon_r$ (теорема Гаусса):

$$\oint \vec{E}\,d\vec{S}=\frac{q_{\text{свб}}}{\varepsilon_0\varepsilon_r}, \qquad (1.1)$$

где $d\vec{S}$ — элемент поверхности, направленный в сторону внешней нормали к объему; $\varepsilon_r$ — относительная диэлектрическая проницаемость диэлектрика.

В дифференциальной форме теорема Гаусса записывается так:

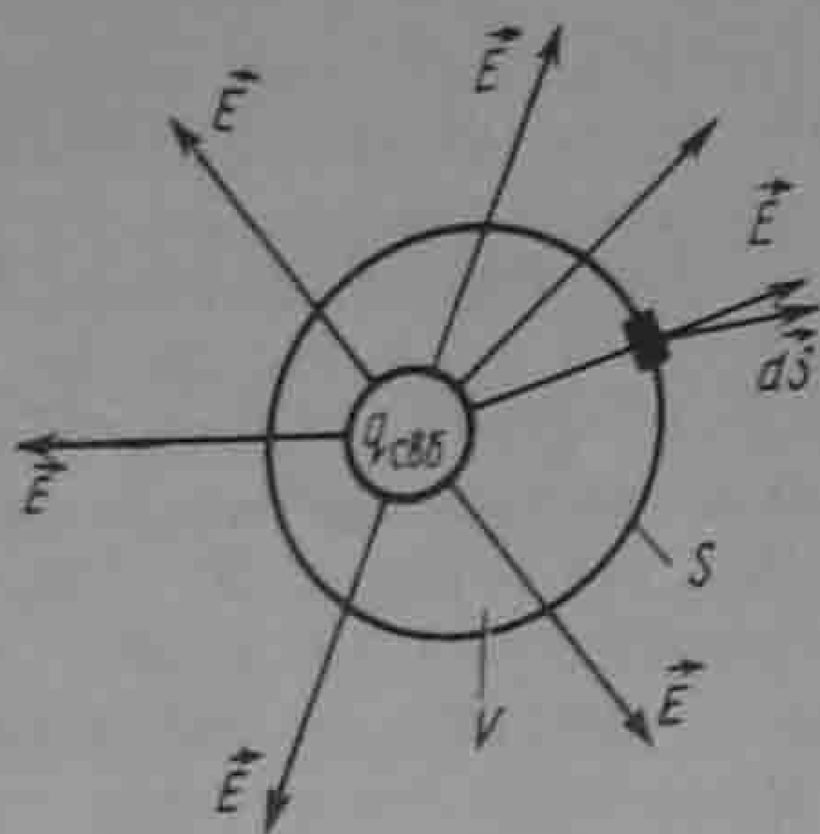



Рис. 1.1

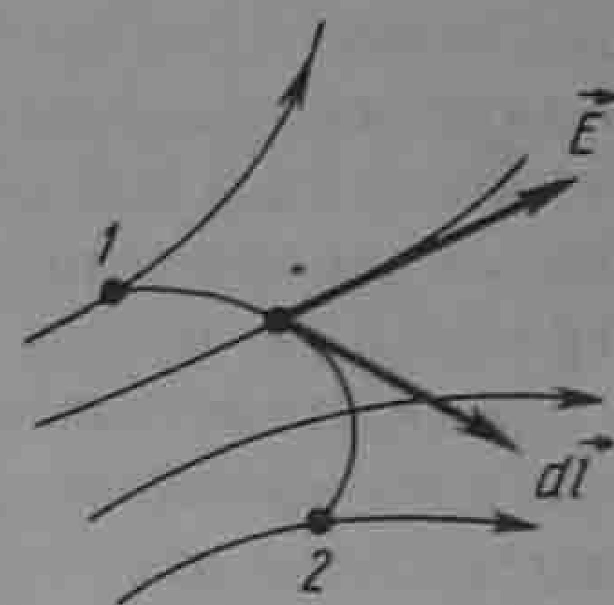



Рис . 1.2

$$\operatorname{div}\vec{E}=\frac{\varrho_{\text{свб}}}{\varepsilon_0\varepsilon_r}, \tag{1.2}$$

($\varrho_{\text{свб}}$ — объемная плотность свободного заряда, Кл/м$^3$).

Переход от (1.1) к (1.2) осуществляют делением обеих частей (1.1) на объем $V$, находящийся внутри поверхности $S$, и стремлении объема $V$ к нулю.

Физически $\operatorname{div}\vec{E}$ означает исток вектора в данной точке.

В электростатическом поле и в стационарном электрическом поле на заряд $q$ действует сила $\vec{F}=q\vec{E}$. Отсюда следует, что $\vec{E}$ может быть определена как силовая характеристика поля $\vec{E}=\lim\limits_{q\to 0}\vec{F}/q$. Если $q$ под действием сил поля переместится из точки *1* в точку *2* (рис. 1.2), то силы поля совершат работу $A=q\int_1^2\vec{E}d\vec{l}$, где $d\vec{l}$ — элемент пути из *1* в *2*.

Под *разностью потенциалов* $U_{12}$ между точками *1* и *2* понимают работу, совершаемую силами поля при переносе заряда $q=1$ Кл из точки *1* в точку *2*,

$$U_{12}=\varphi_1-\varphi_2=\int_1^2\vec{E}d\vec{l}; \tag{1.3}$$

$U_{12}$ не зависит от того, по какому пути происходило перемещение из точки *1* в точку *2*. Выражению (1.3) соответствует дифференциальное соотношение

$$\vec{E}=-\operatorname{grad}\varphi. \tag{1.4}$$



Градиент $\varphi$ ($\operatorname{grad}\varphi$) в некоторой точке поля определяет скорость изменения $\varphi$ в этой точке, взятую в направлении наибольшего его возрастания. Знак минус означает, что $\vec{E}$ и $\operatorname{grad}\varphi$ направлены противоположно.

Электрическое поле называют *потенциальным*, если для него $\oint\vec{E}d\vec{l}=0$. Электрическое поле поляризованного диэлектрика описывается вектором электрического смещения (индукции)

$$\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}, \tag{1.5}$$

где $\vec{P}$ — поляризованность диэлектрика, которая равна электрическому моменту единицы объема поляризованного диэлектрика.

В стационарном неизменном во времени электрическом поле в проводящей среде в смежные моменты времени распределение зарядов одинаково, поэтому для этого поля справедливо определение разности потенциалов по формуле $U_{12}=\int_1^2\vec{E}d\vec{l}$.

Внутри источника постоянной ЭДС результирующая напряженность электрического поля $\vec{E}_{\text{рез}}$ равна векторной сумме потенциальной (кулоновой) составляющей $\vec{E}_{\text{пот}}$ и сторонней составляющей $\vec{E}_{\text{стор}}$:

$$\vec{E}_{\text{рез}}=\vec{E}_{\text{пот}}+\vec{E}_{\text{стор}}.$$

$\vec{E}_{\text{стор}}$ разделяет заряды внутри источника, она обусловлена химическими, электрохимическими, тепловыми и другими процессами не электростатического происхождения и направлена встречно $\vec{E}_{\text{пот}}$. В электромагнитном поле могут протекать электрические токи. Под *электрическим током* понимают направленное (упорядоченное) движение электрических зарядов. Ток в некоторой точке поля характеризуется своей плотностью $\vec{\delta}$ (А/м$^2$). Известны три вида тока: ток проводимости (плотность его $\vec{\delta}_{\text{пр}}$), ток смещения (плотностью $\vec{\delta}_{\text{см}}$) и ток переноса (плотностью $\vec{\delta}_{\text{пер}}$). Ток проводимости протекает в проводящих телах под действием электрического поля, плотность его пропорциональна $\vec{E}$

$$\vec{\delta}_{\text{пр}}=\gamma\vec{E}, \tag{1.6}$$

где $\gamma$ — удельная проводимость проводящего тела, $Ом^{-1} \cdot м^{-1}$. В металлах ток проводимости обусловлен упорядоченным движением свободных электронов, в жидкостях — движением ионов.

Плотность тока смещения в диэлектрике равна производной по времени от вектора электрического смещения $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$:

$$\vec{\delta}_{см} = \frac{d\vec{D}}{dt} = \varepsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt} + \frac{d\vec{P}}{dt} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{d\vec{E}}{dt}. \quad (1.7)$$

Слагаемое $\varepsilon_0 \frac{dE}{dt}$ представляет собой составляющую тока смещения, обусловленную изменением во времени напряженности поля $\vec{E}$ в вакууме. Носителями тока смещения в физическом вакууме (в нем нет частиц вещества) являются виртуальные частицы. Они всегда возникают парами, как бы из ничего, например, электрон и позитрон, или протон и антипротон и т. п. Каждая пара виртуальных частиц является коротко живущей (время жизни $\Delta t$). Составляющие ее частицы могут перемещаться на очень малое расстояние $\Delta x$, а затем эти частицы с противоположного знака зарядами аннигилируют. Каждая виртуальная частица обладает разбросом энергии $\Delta W \geqslant \frac{h}{\Delta t}$ и разбросом импульса $\Delta m \geqslant \frac{h}{\Delta x}$, где постоянная Планка $h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}$ Дж·с. Для каждой пары виртуальных частиц выполняется закон сохранения заряда, но в рамках соотношения неопределенностей наблюдаются местные нарушения закона сохранения энергии и закона сохранения импульса. Слагаемое $d\vec{P}/dt$ обусловлено изменением поляризованности во времени (изменением расположения связанных зарядов в диэлектрике при изменении $\vec{E}$ во времени). В качестве примера тока смещения может быть назван ток через конденсатор. Ток переноса обусловлен движением электрических зарядов в свободном пространстве. Примером тока переноса может служить ток в электронной лампе. Если положительный заряд объемной плотности $\varrho_+$ движется со скоростью $\vec{v}_+$ и отрицательный заряд объемной плотности $\varrho_-$ со скоростью $\vec{v}_-$, то плотность тока переноса в этом поле $\vec{\delta}_{пер} = \varrho_+ \vec{v}_+ + \varrho_- \vec{v}_-$ в явном виде не зависит от напряженности $\vec{E}$ в данной точке поля. Если в некоторой точке поля одновременно существовали бы все три вида тока, то полная плотность тока $\vec{\delta}_{пол} = \vec{\delta}_{пр} + \vec{\delta}_{см} + \vec{\delta}_{пер}$. Для большинства задач ток переноса отсутствует.

Ток — это скаляр алгебраического характера. Полный ток через поверхность $S$ равен



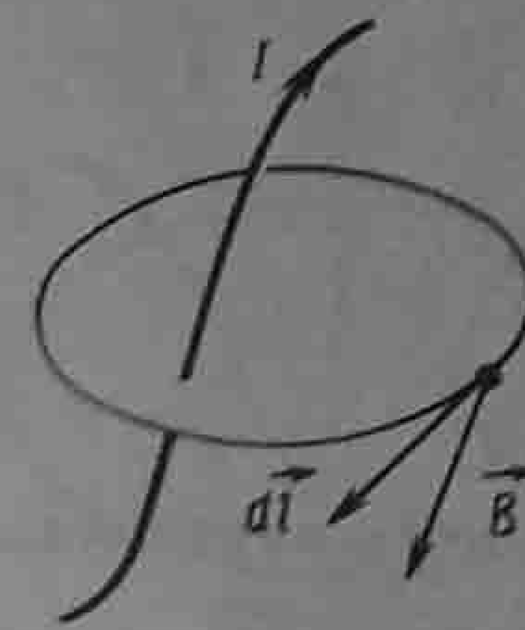


Рис. 1.3

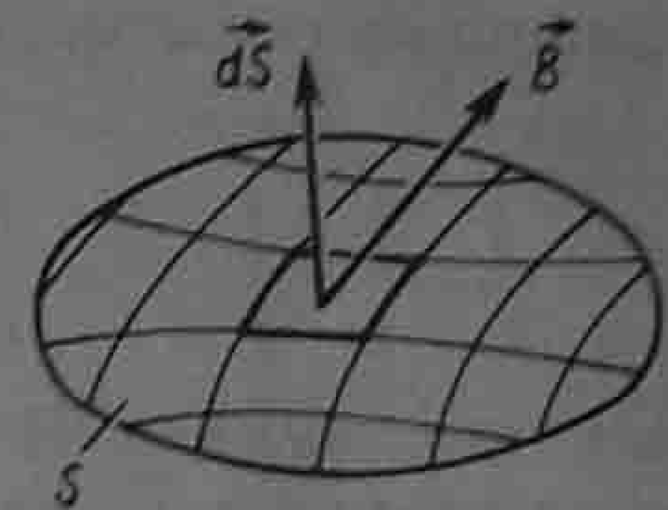


Рис. 1.4

$$I_{пол} = \int_S \vec{\delta}_{пол} d\vec{S}. \quad (1.8)$$

Если в электромагнитном поле выделить некоторый объем, то ток, вошедший в объем, будет равняться току, вышедшему из объема, т. е.

$$\oint \vec{\delta}_{пол} d\vec{S} = 0, \quad (1.9)$$

где $d\vec{S}$ — элемент поверхности объема, он направлен в сторону внешней по отношению к объему нормали к поверхности. Последнее уравнение выражает *принцип непрерывности полного тока:* линии полного тока представляют замкнутые линии, не имеющие ни начала, ни конца. Электрические токи неразрывно связаны с магнитным полем. Эта связь определяется интегральной формой закона полного тока

$$\oint \frac{\vec{B}}{\mu_0} d\vec{l} = I_{пол}; \quad (1.10)$$

циркуляция вектора по замкнутому контуру равна полному току, охваченному этим контуром; $d\vec{l}$ — элемент длины контура (рис. 1.3). Таким образом, все виды токов, хотя и имеют различную физическую природу, обладают свойством создавать магнитное поле.

Ферромагнитные вещества обладают спонтанной намагниченностью. Характеристикой ее является магнитный момент единицы объема вещества $\vec{J}$ (его называют намагниченностью). Для ферромагнитных веществ

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{J}) = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu_a \vec{H}, \quad (1.11)$$

где $\mu_r$ — относительная магнитная проницаемость; $\mu_a$ — абсолютная магнитная проницаемость.

Напряженность магнитного поля

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} \qquad (1.12)$$

равна разности двух векторных величин $\vec{B}/\mu_0$ и $\vec{J}$.

*Закон полного тока* в интегральной форме часто записывают в виде

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = I_{пол} \qquad (1.13)$$

или в дифференциальной форме

$$\mathrm{rot}\vec{H} = \gamma\vec{E} + \frac{d\vec{D}}{dt} \qquad (1.14)$$

Запись (1.14) закона полного тока получили из (1.13), поделив обе части его на площадь $\Delta\vec{S}$, охваченную контуром интегрирования, и стремлении $\Delta S$ к нулю. Физический ротор (rot) характеризует поле в данной точке в отношении способности к образованию вихрей.

Плотность тока переноса в правой части последнего уравнения не учтена, так как он обычно отсутствует в задачах, решаемых с помощью этого уравнения. Магнитный поток через некоторую поверхность $S$ (рис. 1.4) определяют как поток вектора $\vec{B}$ через эту поверхность

$$\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S}. \qquad (1.15)$$

Поток Ф — это скаляр алгебраического характера, измеряется в веберах (Вб). Если поверхность $S$ замкнутая и охватывает объем $V$, то поток, вошедший в объем, равен потоку, вышедшему из него, т. е.

$$\oint \vec{B} d\vec{S} = 0. \qquad (1.16)$$

Это уравнение выражает принцип *непрерывности магнитного по-*
*тока.* Линии магнитной индукции — это замкнутые линии. В диф-
ференциальной форме принцип непрерывности магнитного потока
записывается так:

$$\mathrm{div}\vec{B} = 0. \qquad (1.17)$$

В 1831 г. М. Фарадей сформулировал *закон электромагнитной*
*индукции*: ЭДС $e_{инд}$, наведенная в некотором одновитковом контуре
пронизывающим этот контур, изменяющимся во времени магнит-



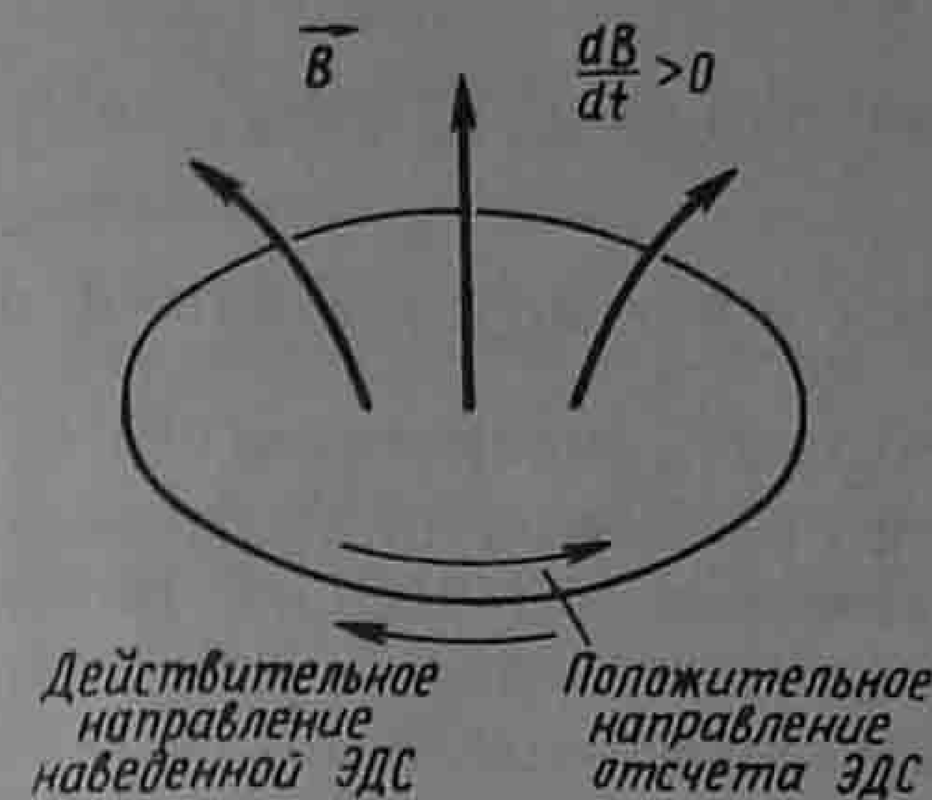


Рис. 1.5

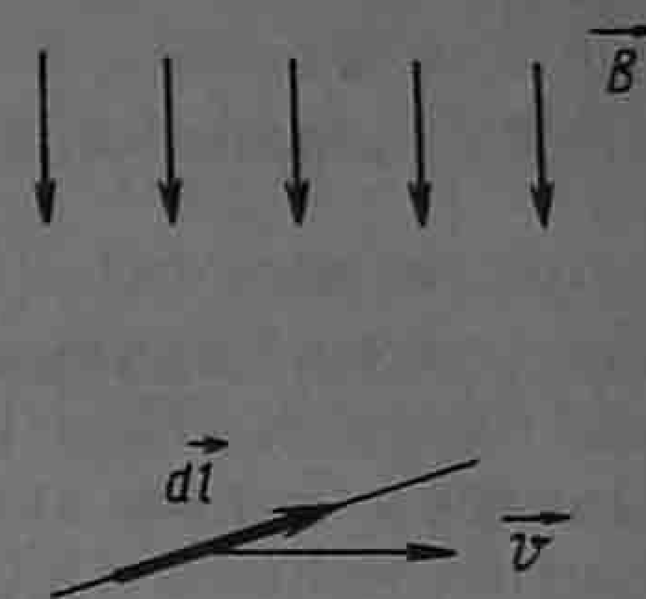


Рис. 1.6

ным потоком, определяется выражением

$$e_{инд} = \oint \vec{E}_{инд} d\vec{l} = -d\Phi/dt, \qquad (1.18)$$

здесь $\vec{E}_{инд}$ — индукционная составляющая напряженности электрического поля. Знак минус обусловлен правой системой отсчета: принято, что положительное направление отсчета для ЭДС и направление потока при его возрастании связаны правилом правого винта (рис. 1.5).

Если контур многовитковый (катушка с числом витков $w$), то

$$e_{инд} = -d\Psi/dt, \qquad (1.19)$$

здесь $\Psi$ — потокосцепление катушки, равное сумме потоков, пронизывающих отдельные витки катушки,

$$\Psi = \Phi_1 + \Phi_2 + \ldots + \Phi_n. \qquad (1.20)$$

Если все витки $w$ пронизываются одинаковыми потоками Ф, то

$$\Psi = w\Phi,$$

где $\Psi$ — результирующее потокосцепление, оно может создаваться не только внешним по отношению к данному контуру потоком, но и собственным потоком, пронизывающим контур, при протекании по нему тока. В проводнике длиной $d\vec{l}$, пересекающем магнитные силовые линии неизменного во времени магнитного поля индукции $\vec{B}$ (рис. 1.6), вследствие силы Лоренца наводится ЭДС

$$de_{инд} = \vec{B}[d\vec{l}\,\vec{v}\,], \qquad (1.21)$$

где $\vec{v}$ — скорость перемещения проводника относительно магнитного поля.

В (1.21) $\vec{B}$ скалярно умножается на векторное произведение $d\vec{l}$ и $\vec{v}$.

Если в результате расчета по (1.21) $de_{инд} > 0$, то $de_{инд}$ направлена по $d\vec{l}$.

В 1833 г. русский академик Э. Х. Ленц установил закон электромагнитной инерции. При всяком изменении магнитного потока, сцепляющимся с каким-либо проводящим контуром, в нем возникает индуктированная ЭДС, стремящаяся вызвать в контуре ток, который: 1) препятствует изменению потокосцепления контура; 2) вызывает механическую силу, препятствующую изменению линейных размеров контура или его повороту.

Закон электромагнитной индукции, примененный к контуру бесконечно малых размеров, записывается так:

$$\mathrm{rot}\vec{E} = -\partial\vec{B}/\partial t \qquad (1.22)$$

(в последней формуле индукционную составляющую напряженности поля $\vec{E}_{инд}$ принято обозначать $\vec{E}$). Обобщая, можно сказать, что электромагнитное поле описывается четырьмя основными уравнениями в интегральной форме:

$$\oint \vec{H}d\vec{l} = I_{полн}, e = \oint \vec{E}_{инд}d\vec{l} = -d\Phi/dt, \oint \vec{B}d\vec{S} = 0, \oint \vec{E}d\vec{S} = \frac{q_{своб}}{\varepsilon_0\varepsilon_r}. \qquad (1.23)$$

Этим уравнениям отвечают четыре уравнения в дифференциальной форме:

$$\mathrm{rot}\,\vec{H} = \gamma\vec{E} + \partial\vec{D}/\partial t, \qquad (а)$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\partial\vec{B}/\partial t, \qquad (б)$$

$$\mathrm{div}\vec{B} = 0, \qquad (в)$$

$$\mathrm{div}\vec{E} = \frac{\varrho_{своб}}{\varepsilon_0\varepsilon_r}. \qquad (г)$$

Они сформулированы в 1873 г. Д. Максвеллом. Их называют *уравнениями Максвелла* или *уравнениями макроскопической электродинамики*.

Уравнение (а) означает, что вихревое магнитное поле создается токами проводимости и токами смещения. Уравнение (б) свидетельствует о том, что изменение магнитного поля во времени вызывает вихревое электрическое поле. Уравнение (в) — магнитное поле не имеет источников и уравнение (г) — что истоком линий $\vec{E}$ являются свободные заряды. Частные производные в уравнениях (а) и (б) учитывают, что уравнения записаны для неподвижных тел и сред в выбранной системе координат.



**§ 1.3. Подразделение электротехнических задач на цепные и полевые.** Задачи, с которыми приходится встречаться на практике, могут быть подразделены на две большие группы. Первая группа — цепные задачи — могут быть решены, используя уравнения поля, записанные в интегральной форме. В этой группе используют понятие ток, магнитный поток, электрическое и магнитное напряжения, потенциал, ЭДС, МДС (магнитодвижущая сила), резистивное, индуктивное и емкостное сопротивления. Для решения задач второй группы — полевых задач — применяют уравнения поля в дифференциальной и в интегральной формах. Цепные задачи рассматривают в I и II частях курса ТОЭ или курса теории цепей, задачи теории поля в III части курса ТОЭ. Четкой границы между двумя группами задач нет, так как любая цепная задача с увеличением частоты перерастает в полевую (все более проявляются паразитные параметры и резко возрастает излучение энергии в окружающее пространство).

Основными уравнениями теории электрических цепей являются уравнения (законы) Кирхгофа. Первый закон Кирхгофа для электрических цепей следует из принципа непрерывности полного тока, а для магнитных цепей — из принципа непрерывности магнитного потока.

Покажем, что уравнение второго закона Кирхгофа для цепи переменного тока вытекает из основных уравнений электромагнитного поля. С этой целью обратимся к рис. 1.7. Цепь (рис. 1.7) образована источником сторонней ЭДС $e(t)$, являющейся функцией времени (область *1* с проводимостью $\gamma_1$), проводящей средой (область *2* с проводимостью $\gamma_2$) и конденсатором (область *3*, электрическая проницаемость $\varepsilon_a$).

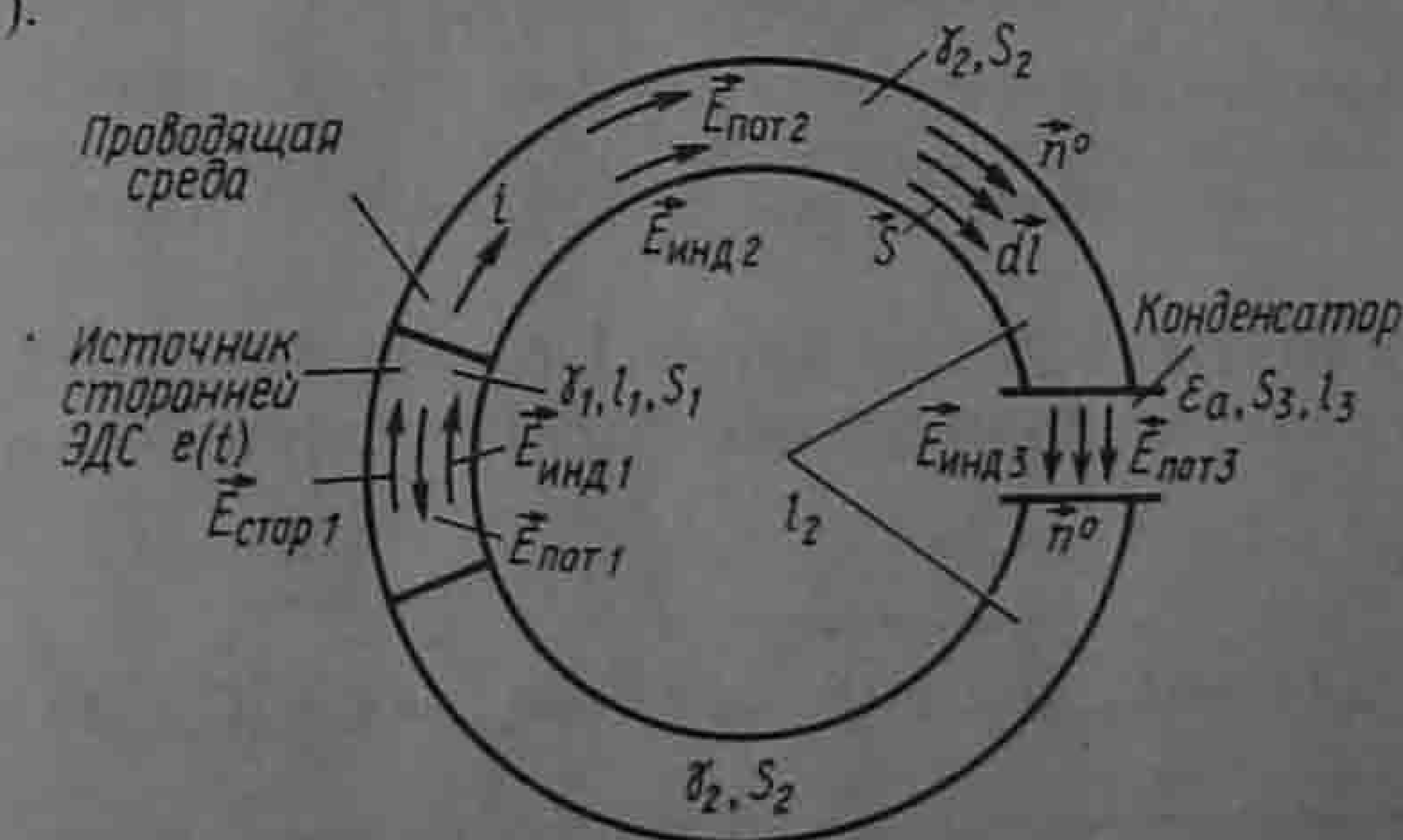



Рис. 1.7

Будем исходить из непрерывности полного тока $i$ через поперечные сечения трех областей. Полагаем, что излучение энергии в окружающее пространство отсутствует (частота относительно невелика). В первой области напряженность электрического поля $\vec{E}_1$ состоит из трех компонент (сторонней, потенциальной и индукционной) $\vec{E}_1 = \vec{E}_{стор1} + \vec{E}_{пот1} + \vec{E}_{инд1}$, во второй $\vec{E}_2 = \vec{E}_{пот2} + \vec{E}_{инд2}$, в третьей $\vec{E}_3 = \vec{E}_{пот3} + \vec{E}_{инд3}$; $S_1$, $S_2$, $S_3$ — площади поперечного сечения областей; $\mathrm{d}l$ — элемент длины, совпадающий по направлению с $\mathrm{d}\vec{S}$; $\vec{n}^0$ — единичный вектор, совпадающий с направлением $\mathrm{d}\vec{l}$ и $\vec{S}$.

Для первой области

$$i = \gamma_1(\vec{E}_{стор1} + \vec{E}_{пот1} + \vec{E}_{инд1})\vec{S}_1, \tag{1.24}$$

для второй

$$i = \gamma_2(\vec{E}_{пот2} + \vec{E}_{инд2})\vec{S}_2, \tag{1.25}$$

для третьей

$$i = \varepsilon_a \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{E}_{пот3} + \vec{E}_{инд3})\vec{S}_3 = \varepsilon_a p\,(\vec{E}_{пот3} + \vec{E}_{инд3})\,\vec{S}_3\ (p = \mathrm{d}/\mathrm{d}t). \tag{1.26}$$

Умножим уравнения (1.24 — 1.26) на элемент длины пути $\mathrm{d}\vec{l} = \vec{n}^0\mathrm{d}l$, учтем, что $\vec{S} = \vec{n}^0 S$, и перепишем их так:

$$(\vec{E}_{стор1} + \vec{E}_{пот1} + \vec{E}_{инд1})\,\mathrm{d}\vec{l} = \frac{i}{\gamma_1 S_1}\mathrm{d}l, \tag{1.27}$$

$$(\vec{E}_{пот2} + \vec{E}_{инд2})\,\mathrm{d}\vec{l} = \frac{i}{\gamma_2 S_2}\mathrm{d}l, \tag{1.28}$$

$$(\vec{E}_{пот3} + \vec{E}_{инд3})\,\mathrm{d}\vec{l} = \frac{i}{p\varepsilon_a S_3}\mathrm{d}l. \tag{1.29}$$

Проинтегрируем (1.27) по длине 1-го участка, уравнение (1.28) по длине 2-го участка и уравнение (1.29) по длине 3-го и сложим их. Получим

$$\underbrace{\int\limits_{l_1}\vec{E}_{стор1}\mathrm{d}\vec{l}}_{e(t)} + \underbrace{\int\limits_{l_1}\vec{E}_{пот1}\mathrm{d}\vec{l} + \int\limits_{l_2}\vec{E}_{пот2}\mathrm{d}\vec{l} + \int\limits_{l_3}\vec{E}_{пот3}\mathrm{d}\vec{l}}_{\oint \vec{E}_{пот}\mathrm{d}\vec{l} = 0} + \underbrace{\int\limits_{l_1}\vec{E}_{инд1}\mathrm{d}\vec{l} + \int\limits_{l_2}\vec{E}_{инд2}\mathrm{d}\vec{l} + \int\limits_{l_3}\vec{E}_{инд3}\mathrm{d}\vec{l}}_{\oint \vec{E}_{инд}\mathrm{d}\vec{l} = -\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t} =$$



$$= i\Bigg[\underbrace{\int\limits_{l_1}\frac{\mathrm{d}l}{\gamma_1 S_1}}_{R_1} + \underbrace{\int\limits_{l_2}\frac{\mathrm{d}l}{\gamma_2 S_2}}_{R_2}\Bigg] + \underbrace{\frac{i}{p}\int\limits_{l_3}\frac{\mathrm{d}l}{\varepsilon_a S_3}}_{\frac{1}{C}\int i\mathrm{d}t}\left(\frac{i}{p} = \int i\mathrm{d}t;\ \frac{1}{C} = \int\limits_{l_3}\frac{\mathrm{d}l}{\varepsilon_a S_3}\right).$$

Окончательно,

$$i(R_1 + R_2) + \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}\int i\mathrm{d}t = e(t), \tag{1.30}$$

где $R_1$ и $R_2$ — резистивные сопротивления участков $1$ и $2$; $C$ — емкость конденсатора.

Второй закон Кирхгофа для магнитных цепей следует из закона полного тока.

Рассмотрим свойства элементов электрической цепи конденсатора и индуктивной катушки.

**§ 1.4. Конденсатор.** Между двумя любыми проводящими телами, разделенными диэлектриком, существует электрическая емкость. Для создания определенного значения емкости служат конденсаторы. На рис. 1.8, *а* изображен плоский конденсатор, на рис. 1.9 — цилиндрический. Если заряд на одной обкладке (электроде) конденсатора $+q$, на другой $-q$, то в пространстве между обкладками существует электрическое поле и между обкладками имеется напряжение $U$. Заряд $q$ пропорционален $U$: $q = CU$. Коэффициент пропорциональности $C$ называют емкостью

$$C = q/U. \tag{1.31}$$

Емкость зависит от геометрических размеров конденсатора и от диэлектрика между обкладками. От величины напряжения $U$ емкость, как правило, не зависит. Исключение составляют конденсаторы, у которых между обкладками находится сегнетодиэлектрик (у сегнетодиэлектрика $\varepsilon_r$ является функцией $E$). Единицей емкости является фарад (Ф) или более мелкие единицы микро, нано и пикофарад: 1 мкФ $= 10^{-6}$Ф; 1 нФ $= 10^{-9}$Ф; 1 пФ $= 10^{-12}$Ф.

**Пример 1.** Вывести формулу для емкости плоского конденсатора (рис. 1.8, *а*). Площадь его каждой пластины (с одной стороны) $S$, расстояние между пластинами $a$, относительная диэлектрическая проницаемость диэлектрика $\varepsilon_r$.

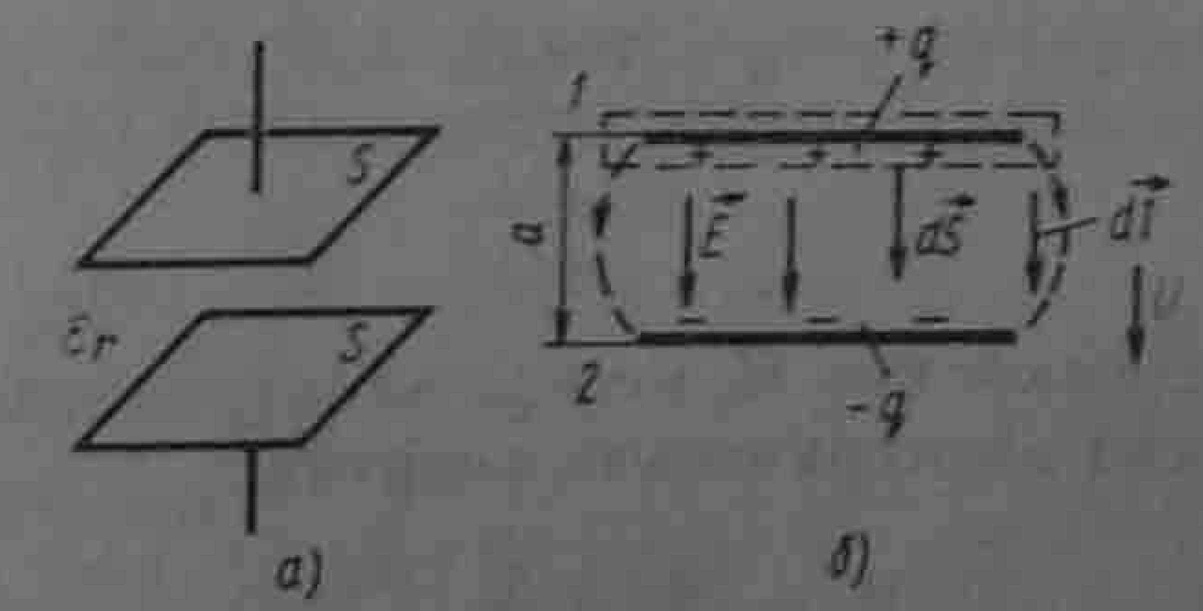


Рис. 1.8

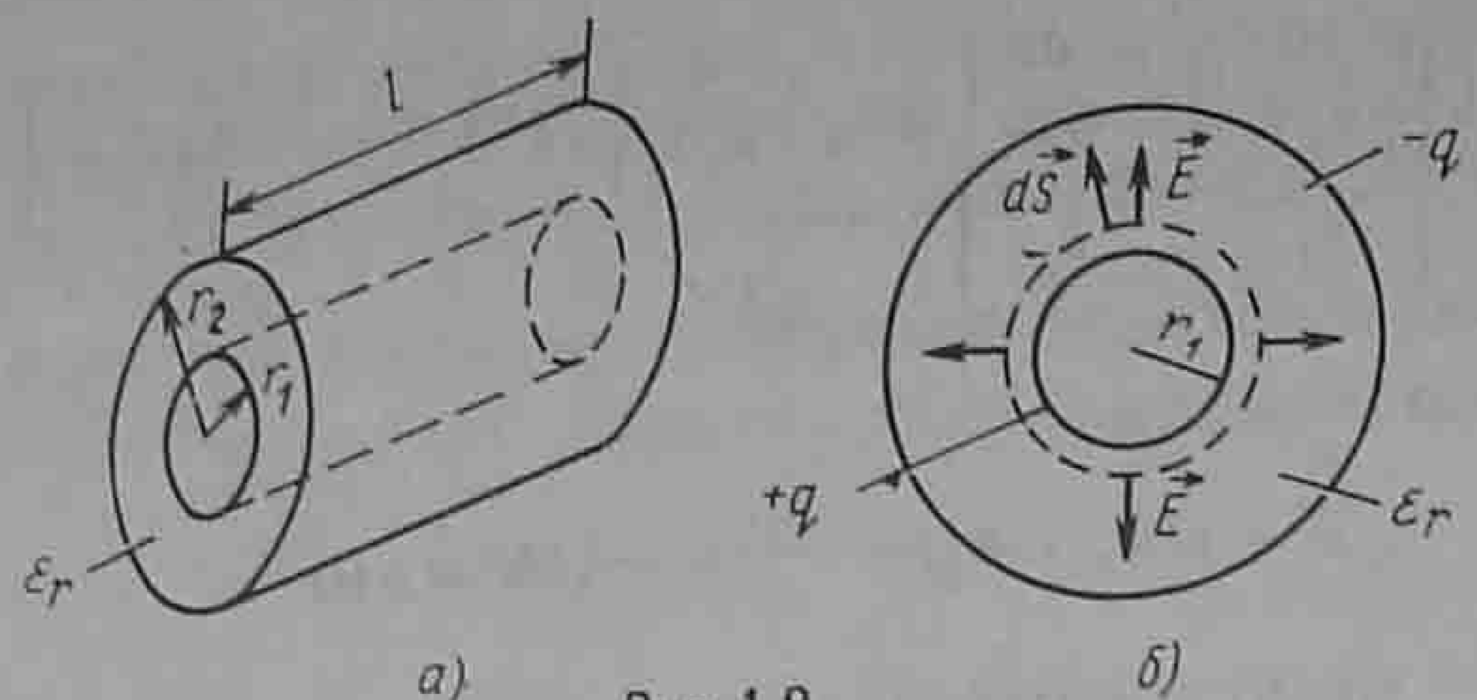



Рис. 1.9

На рис. 1.8, *б* (вид сбоку) показаны силовые линии. В основной области поле однородно. На краях имеется некоторая неоднородность, которую здесь учитывать не будем. $\vec{E}$ направлена от заряда $+q$ к заряду $-q$. Напряжение между электродами $U=\int_1^2 \vec{E}d\vec{l}=\int_1^2 E\cos 0^0 \mathrm{d}l=Ea$. Охватим верхний электрод замкнутой поверхностью (след ее на рис. 1.8, *б* показан пунктиром) и применим к ней теорему Гаусса: $\oint \vec{E}d\vec{S}=ES=\frac{q}{\varepsilon_0\varepsilon_r}$. Следовательно, $E=\frac{q}{\varepsilon_0\varepsilon_r S}$ и $C=\frac{q}{U}=\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r S}{a}$.

**Пример 2.** Вывести формулу емкости цилиндрического конденсатора (рис. 1.9, *а*). На внутреннем электроде радиусом $r_1$ находится заряд $+q$, на наружном электроде радиусом $r_2$ — заряд $-q$.

Р е ш е н и е. Окружим внутренний электрод цилиндрической замкнутой поверхностью радиуса $r(r_1<r<r_2)$. След этой поверхности показан пунктиром на рис. 1.9, *б*. Поток вектора $\vec{E}$ имеет место через боковую поверхность, через торцы поток отсутствует, так как на торцах $\mathrm{d}\vec{S}$ и $\vec{E}$ взаимно перпендикулярны:

$$\oint \vec{E}d\vec{S}=\int\limits_{\text{бок. пов}} E\cos 0^0 \mathrm{d}S=E2\pi rl=\frac{q}{\varepsilon_0\varepsilon_r}. \text{ Отсюда } E=\frac{q}{2\pi r l\varepsilon_0\varepsilon_r}.$$

Напряжение между электродами

$$U=\int_{r_1}^{r_2}\vec{E}d\vec{r}=\frac{q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r l}\int_{r_1}^{r_2}\frac{\mathrm{d}r}{r}=\frac{q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r l}\ln\frac{r_2}{r_1}.$$

Емкость

$$C=\frac{q}{U}=\frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}{\ln\frac{r_2}{r_1}}.$$

В конденсаторе емкостью $C$, между электродами которого напряжение $u$, запасена электрическая энергия

$$W_э=\frac{Cu^2}{2}=\frac{q^2}{2C}. \tag{1.32}$$



При изменении заряда $q$ во времени через конденсатор по диэлектрику течет ток смещения

$$i=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}. \tag{1.33}$$

Положительное направление отсчета тока $i$ совпадает с положительным направлением отсчета напряжения $u$.

Из (1.33) следует, что

$$u=\frac{1}{C}\int i\mathrm{d}t. \tag{1.34}$$

**§ 1.5. Индуктивность. Явление самоиндукции.** Если по какой-либо катушке (контуру) будет протекать ток, то он создаст магнитное поле и катушка будет пронизываться магнитным потоком. Потокосцепление катушки $\Psi$ будет пропорционально току $i$ $\Psi=Li$. Коэффициент пропорциональности $L$ между $\Psi$ и $i$ называют *индуктивностью*

$$L=\Psi/i. \tag{1.35}$$

Индуктивность $L$ (Гн) зависит от геометрических размеров катушки, числа ее витков и от магнитных свойств сердечника, на котором она намотана. Если ток $i$ будет изменяться во времени, по закону электромагнитной индукции в катушке наведется ЭДС $e_L$, которую называют ЭДС самоиндукции

$$e_L=-\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t}=-L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}. \tag{1.36}$$

Положительные направления отсчета для $i$ и $e_L$ совпадают ($e_L$ пропорциональна скорости изменения тока $i$).

Если сердечник, на который намотана катушка, ферромагнитный, то $\Psi$ является нелинейной функцией тока $i$. В этом случае

$$e_L=-\frac{\mathrm{d}\Psi(i)}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mathrm{d}\Psi(i)}{\mathrm{d}i}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=-L_{диф}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \tag{1.37}$$

($L_{диф}$ называют дифференциальной индуктивностью, она является нелинейной функцией тока $i$).

В магнитном поле уединенной катушки индуктивностью $L$, по которой течет ток $i$, запасается магнитная энергия

$$W_м=\int_0^I i\mathrm{d}\Psi=\int_0^I Li\mathrm{d}i=\frac{LI^2}{2}. \tag{1.38}$$

Из (1.38) следует, что

$$L=\frac{2W_м}{I^2}. \tag{1.39}$$

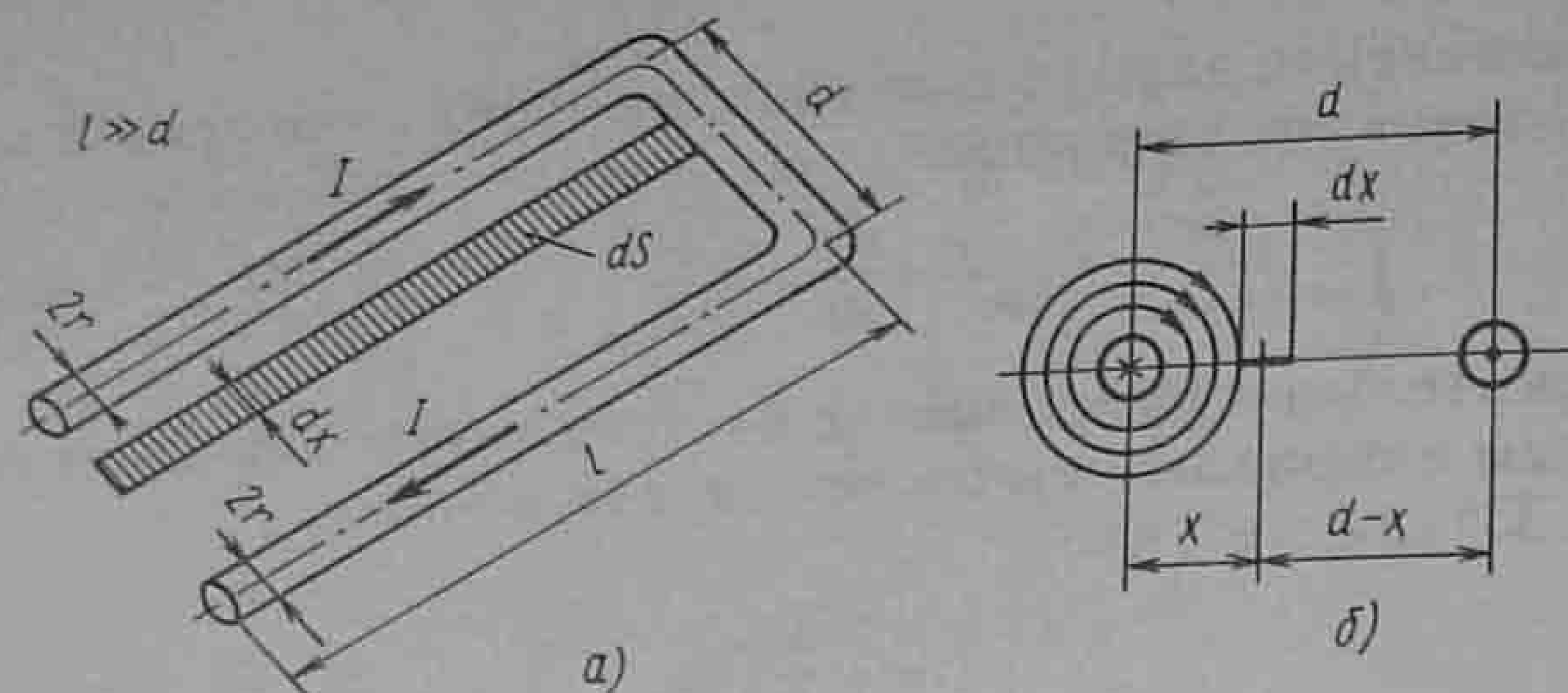



Рис. 1.10

**Пример 3.** Вывести формулу для индуктивности $L$ двухпроводной линии передачи длиной $l$, расположенной в воздухе, при расстоянии между осями проводов $d$ и радиусе провода $r \ll d$. Полагать $l \gg d$ и не учитывать магнитный поток поперечных сторон петли.

Р е ш е н и е. Двухпроводная линия (рис. 1.10, *а*, *б*) представляет собой как бы один большой виток. Пропустим по ней ток $I$. Напряженность поля в произвольной точке между проводами на расстоянии $x$ от левого провода на линии, соединяющей оси проводов, по закону полного тока равна $\frac{I}{2\pi x}$, а результирующая напряженность поля равна сумме напряженностей от каждого из проводов

$$H = \frac{I}{2\pi x} + \frac{I}{2\pi(d-x)} \quad (d - r \geqslant x \geqslant r).$$

Поток через заштрихованную площадку $dS = l dx$ равен

$$d\Phi = BdS = \frac{\mu_0 I l}{2\pi}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x}\right)dx; \ \Phi = \frac{\mu_0 I l}{\pi}\ln\frac{d-r}{r}.$$

При $d \gg r$ $L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 l}{\pi}\ln\frac{d}{r}$.

**Пример 4.** Определить индуктивность катушки (рис. 1.11, *а*) с числом витков $w_1 = 1000$, равномерно намотанной на сердечник прямоугольного сечения, внутренний радиус которого $R_1 = 4$ см, наружный $R_2 = 6$ см, высота $h = 2$ см, $\mu_r$ сердечника равна 80.

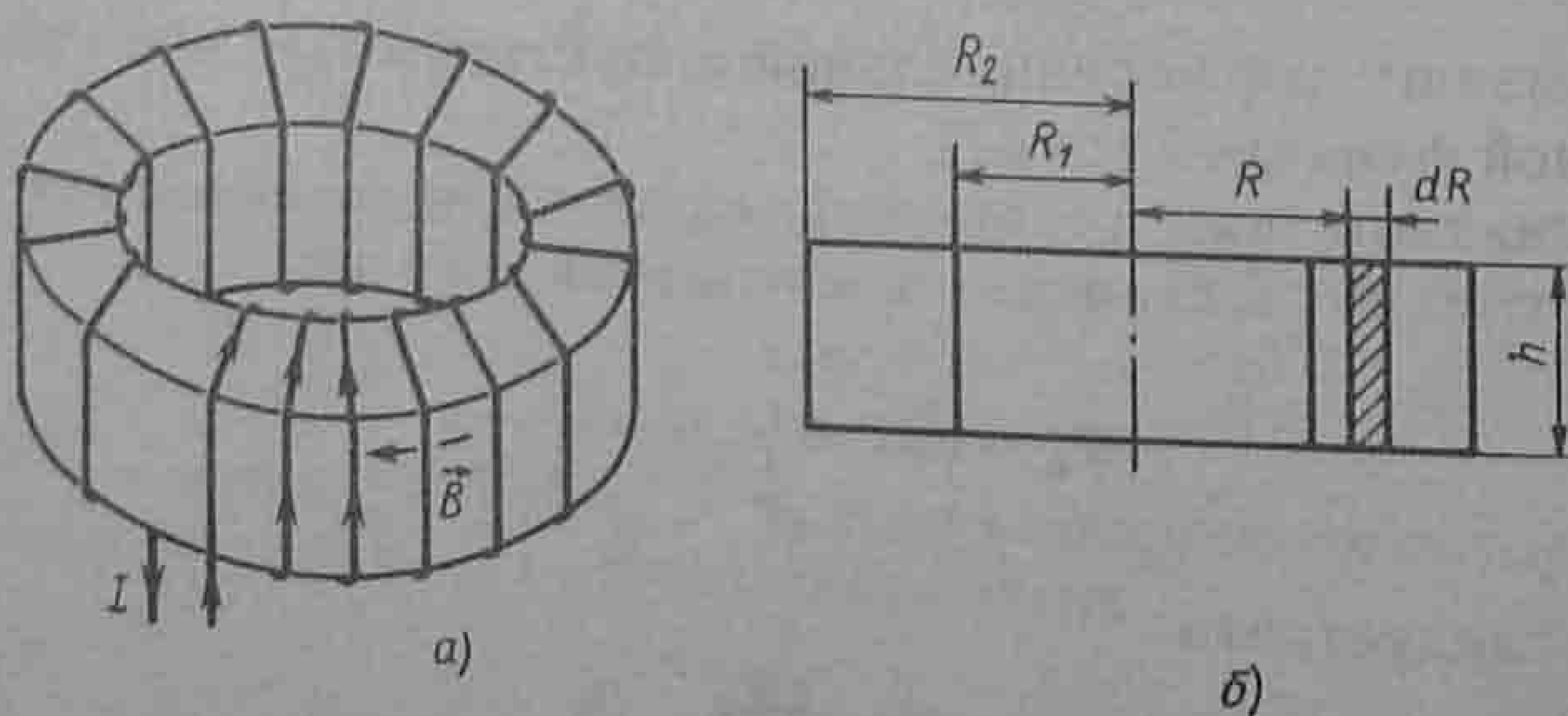



Рис. 1.11



Р е ш е н и е. Пропустим по катушке ток $I$ и определим напряженность поля в сердечнике по закону полного тока $H = \frac{Iw_1}{2\pi R}$. Поток через полосу $hdR$, заштрихованную на рис. 1.11, *б*,

$$d\Phi = BhdR = \frac{\mu_0\mu_r hIw_1 dR}{2\pi R}.$$

Потокосцепление

$$\Psi = w_1\Phi = w_1\int_{R_1}^{R_2} d\Phi = \frac{w_1^2\mu_0\mu_r h \ln\frac{R_2}{R_1}}{2\pi}. \quad (1.40)$$

Подстановка числовых значений дает $L = 0{,}131$ Гн.

**Пример 5.** Вывести формулу для индуктивности цилиндрического провода длиной $l$ радиусом $R$, обусловленной потокосцеплением в теле самого провода. На рис. 1.12 показан вид провода с торца.

Р е ш е н и е. Пропустим вдоль провода постоянный ток $I$. По закону полного тока напряженность поля $H$ на расстоянии $r$ от оси провода равна току $\frac{I}{\pi R^2}\pi r^2$, охваченному окружностью радиусом $r$ и деленному на длину этой окружности $2\pi r$: $H = \frac{Ir}{2\pi R^2}$. Индукция $B = \mu_a H$. Магнитная энергия, запасенная в теле провода,

$$W_м = \int_0^R \frac{HB}{2} 2\pi r l dr = \frac{\mu_a I^2 l}{2\pi R^4}\int_0^R r^3 dr = \frac{\mu_a I^2 l}{16\pi}.$$

По (1.39)

$$L = \frac{2W_м}{I^2} = \frac{\mu_a l}{8\pi}.$$

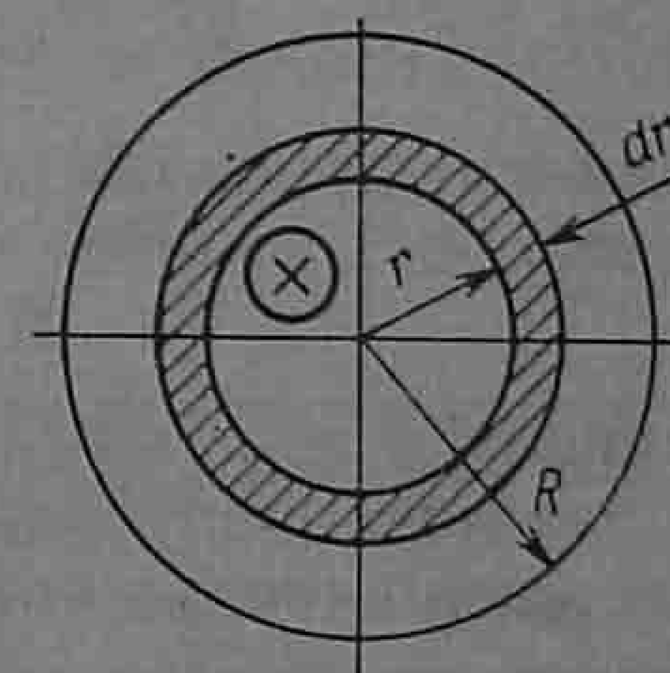
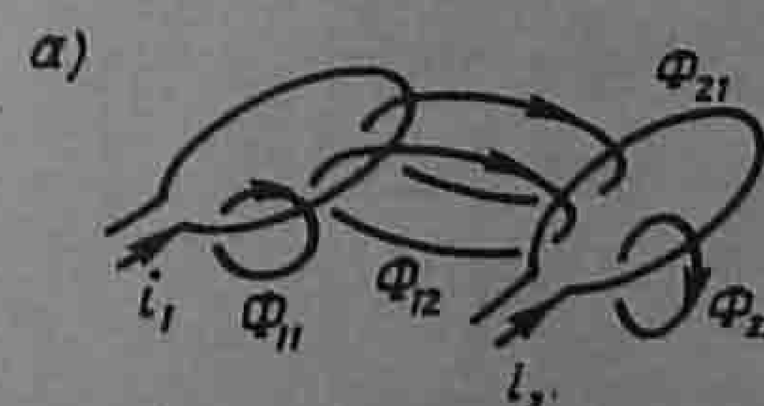



Рис. 1.12

## § 1.6. Взаимная индуктивность. Явление взаимоиндукции.

На рис. 1.13, *а* изображены два контура. По первому течет ток $i_1$, по второму — $i_2$. Поток, создаваемый первым контуром $\Phi_1$, частично замыкается,



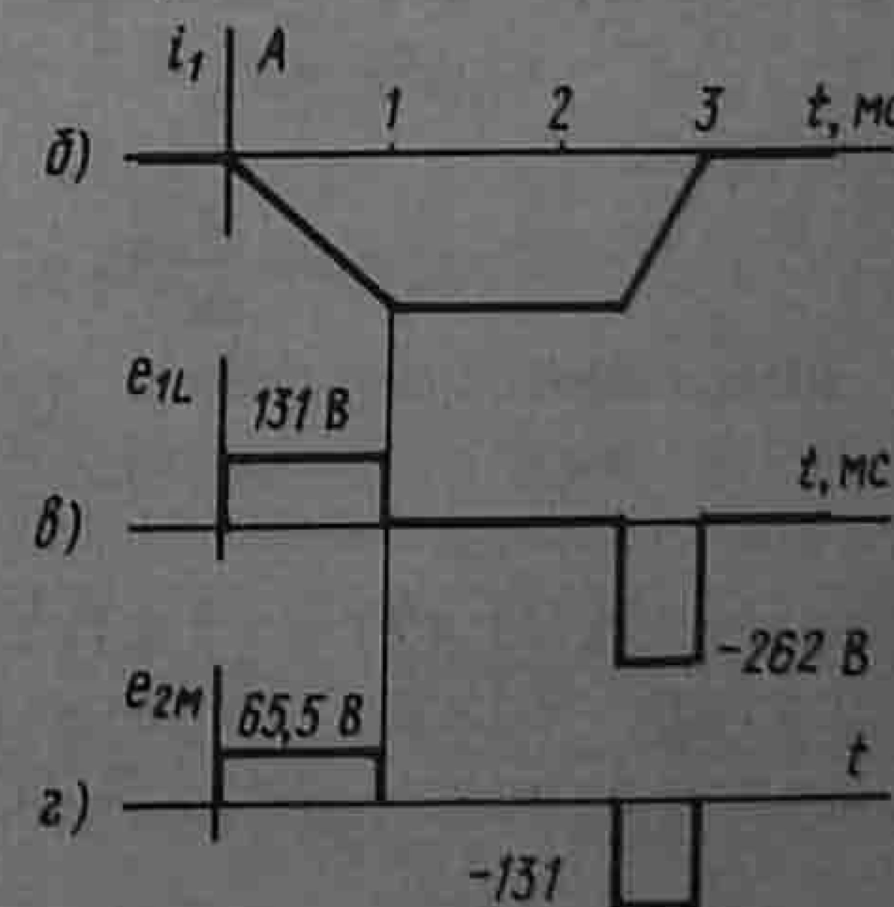




Рис. 1.13

пронизывая только первый контур $\Phi_{11}$, минуя второй, частично пронизывая и второй контур $\Phi_{12}$. Чтобы рисунок был более понятным, на нем изображено только по одной силовой линии каждого потока

$$\Phi_1 = \Phi_{11} + \Phi_{12}.$$

Аналогично, поток, создаваемый вторым контуром:

$$\Phi_2 = \Phi_{22} + \Phi_{21}.$$

Если первый контур имеет $w_1$ витков, то потокосцепление первого контура $w_1(\Phi_1 \pm \Phi_{21}) = w_1\Phi_1 \pm w_1\Phi_{21} = \Psi_1 \pm \Psi_{21}$. Потокосцепление второго контура (число витков $w_2$)

$$w_2(\Phi_2 \pm \Phi_{12}) = \Psi_2 \pm \Psi_{12}.$$

Знаки «+» соответствуют согласному направлению потока от своего тока и потока, создаваемого током в соседнем контуре. Знаки « —» соответствуют несогласному (встречному) направлению потоков (для этого один из токов должен изменить направление). Потокосцепление $\Psi_{21}$ пропорционально току $i_2$, а $\Psi_{12}$ — току $i_1$

$$\Psi_{21} = w_1\Phi_{21} = Mi_2,$$

$$\Psi_{12} = w_2\Phi_{12} = Mi_1.$$

Коэффициент пропорциональности $M$ (Гн) называют *взаимной индуктивностью*

$$M = \Psi_{21}/i_2 = \Psi_{12}/i_1. \quad (1.41)$$

Она зависит от взаимного расположения, числа витков, геометрических размеров контуров (катушек) и от магнитной проницаемости $\mu_a$ сердечников, на которых они намотаны. Если $\mu_a = \mathrm{const}$, то от величины токов $M$ не зависит.

*Явлением взаимоиндукции* называют наведение ЭДС в одном контуре при изменении тока в другом. Наводимую ЭДС называют *ЭДС взаимоиндукции* и обозначают $e_M$. Для рис. 1.13 полная ЭДС, наводимая в первом контуре,

$$e_1 = -\frac{d}{dt}(\Psi_1 \pm \Psi_{21}) = -\frac{d}{dt}(L_1 i_1 \pm Mi_2) = -L_1\frac{di_1}{dt} \pm M\frac{di_2}{dt} = e_{1L} \pm e_{1M} \quad (1.42)$$

и во втором

$$e_2 = -\frac{d}{dt}(\Psi_2 \pm \Psi_{12}) = -\frac{d}{dt}(L_2 i_2 \pm Mi_1) =$$

$$= -L_2\frac{di_2}{dt} \pm M\frac{di_1}{dt} = e_{2L} \pm e_{2M}. \quad (1.43)$$

В формулах (1.42) и (1.43) принято, что $M > 0$. В то же время в литературе можно встретиться с тем, что знак минус у $e_M$ в этих формулах относят не к ЭДС взаимоиндукции, а к $M$, т. е. записывают формулы (1.42) и (1.41) в виде

$$e_1 = e_{1L} + e_{1M} \text{ и } e_2 = e_{2L} + e_{2M}.$$

Под *коэффициентом связи* двух магнитосвязанных катушек понимают отношение $M$ к квадратному корню из произведения $L_1L_2$ этих катушек

$$k_{\text{св}} = M/\sqrt{L_1L_2}. \quad (1.44)$$

Всегда $k_{\text{св}} \leqslant 1$; $k_{\text{св}} = 1$, если весь магнитный поток, создаваемый первой катушкой, пронизывает и вторую, а весь поток, генерируемый второй катушкой, пронизывает и первую.

Магнитная энергия двух магнитосвязанных катушек с токами $I_1$ и $I_2$ равна

$$W_{\text{м}} = \frac{L_1I_1^2}{2} + \frac{L_2I_2^2}{2} \pm MI_1I_2. \quad (1.45)$$

Знак « + » относится к согласному, « — » — к встречному направлению потоков.

**Пример 6.** На сердечнике примера 4 кроме катушки с числом витков $w_1 = 1000$ равномерно намотана и вторая катушка $w_2 = 500$. Определим $M$ между катушками.

Р е ш е н и е. Весь поток Ф, создаваемый в сердечнике первой катушкой, пронизывает и вторую. Поэтому

$$M = \frac{\Psi_{12}}{I_1} = \frac{\mu_0\mu_r w_1 w_2 h \ln\frac{R_2}{R_1}}{2\pi} = 0{,}0655 \text{ Гн}.$$

**Пример 7.** Определить магнитную энергию, запасаемую в магнитном поле двух катушек примера 6, если по первой катушке течет ток $I_1 = 1$ А, по второй — ток $I_2 = 0{,}5$ А. Магнитные потоки направлены согласно.

Р е ш е н и е. По формуле (1.40), заменив в ней $w_1$ на $w_2$, определяем $L_2 = 0{,}0327$ Гн. По формуле (1.45)

$$W_{\text{м}} = \frac{1\cdot 0{,}131}{2} + \frac{0{,}5^2\cdot 0{,}0327}{2} + 0{,}0655\cdot 1\cdot 0{,}5 = 0{,}1387 \text{ Дж}.$$

**Пример 8.** По первой катушке примера 7 течет ток $i_1$, изменяющийся во времени в соответствии с рис. 1.13, *б*. Вторая катушка разомкнута. Построить кривые ЭДС самоиндукции $e_{1L}$ и ЭДС взаимоиндукции $e_{2M}$ (время дано в мс).

Р е ш е н и е. График $e_{1L}$ (рис. 1.13, *в*) строим по формуле $e_{1L} = -L_1\frac{di_1}{dt}$, график $e_{2M}$ (рис. 1.13, *г*) — по формуле $e_{2M} = -M\frac{di_1}{dt}$.

**§ 1.7. Схемы замещения реальных электротехнических устройств.** В элементах реальных электротехнических устройств (электрических цепях) происходят достаточно сложные процессы протекания токов проводимости, токов смещения, выделения тепловой энергии, наведения ЭДС, накопления и перераспределения энергии электрического и магнитного полей и т. п. Для того чтобы можно было математически описать эти процессы, в теории цепей пользу-

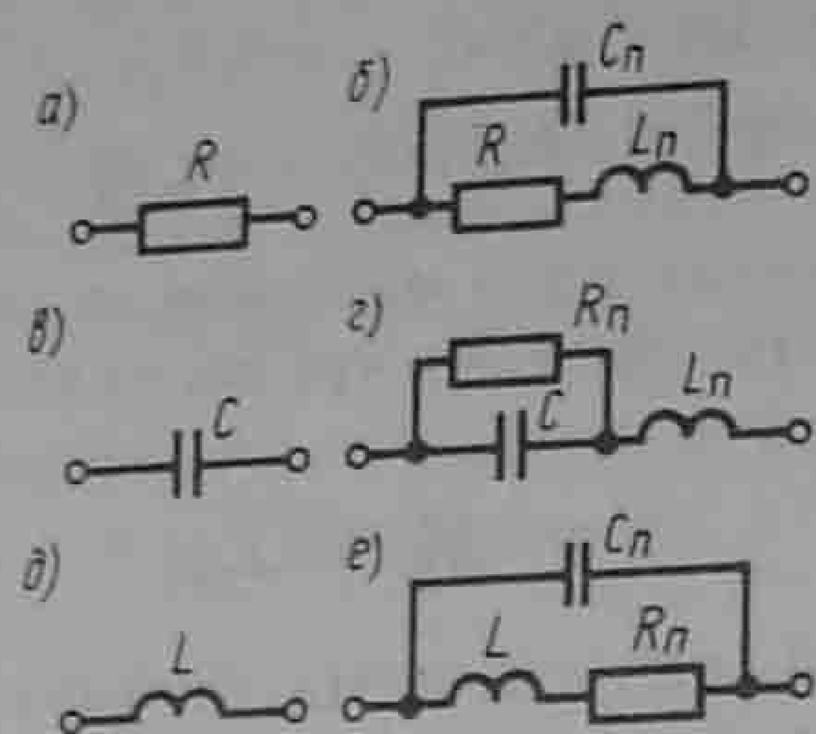



Рис. 1.14

ются расчетными схемами (схемами замещения), вводя в них резистивные, индуктивные и емкостные элементы. С помощью резистивного элемента учитывают выделение теплоты в реальном элементе; с помощью индуктивного элемента — наведение ЭДС и накопление энергии в магнитном поле; с помощью емкостного элемента — протекание токов смещения и накопление энергии в электрическом поле.

Каждый элемент реальной электрической цепи на схеме замещения можно представить той или иной совокупностью идеализированных схемных элементов.

Так, резистор для низких частот можно представить одним резистивным элементом $R$ (рис. 1.14, *а*). Для высоких частот тот же резистор должен быть представлен уже иной схемой (рис. 1.14, *б*). В ней малая (паразитная) индуктивность $L_п$ учитывает магнитный поток, сцепленный с резистором, а малая паразитная емкость $C_п$ учитывает протекание тока смещения между зажимами резистора. Конденсатор на низких частотах замещают одним емкостным элементом (рис. 1.14, *в*), а на высоких частотах конденсатор представляют схемой (рис. 1.14, *г*). В этой схеме резистор $R_п$ учитывает потери в неидеальном диэлектрике конденсатора, а $L_п$ паразитная индуктивность подводящих контактов.

Индуктивную катушку в первом приближении можно представить одним индуктивным элементом $L$ (рис. 1.14, *д*). Более полно она может быть представлена схемой (рис. 1.14, *е*). В ней $R$ учитывает тепловые потери в сопротивлении обмотки и в сердечнике, на котором она намотана, а паразитная емкость $C_п$ учитывает токи смещения между витками катушки.

Обобщенно можно сказать, что при составлении схемы замещения реальных элементов цепи и цепи в целом в нее входят те идеализированные схемные элементы, с помощью которых описываются основные процессы в реальных элементах цепи, а процессами, являющимися относительно второстепенными в этих элементах для рассматриваемой полосы частот и амплитуд воздействий, обычно



пренебрегают. Реальную электрическую цепь, представленную в виде совокупности идеализированных схемных элементов, в дальнейшем будем называть *схемой замещения электрической цепи* или, короче, *схемой электрической цепи*.

Если можно считать, что напряжение и ток на всех элементах реальной цепи не зависят от пространственных координат, то такую цепь называют *цепью с сосредоточенными параметрами*, если зависят — *цепью с распределенными параметрами*. Процессы в цепи с сосредоточенными параметрами описывают алгебраическими или обыкновенными дифференциальными уравнениями; процессы в цепях с распределенными параметрами описывают уравнениями в частных производных. Дальнейшее подразделение типов цепей будет дано по ходу изложения. Соответствие расчетной модели реальной электрической цепи проверяют путем сопоставления расчета с экспериментом. Если расчетные данные недостаточно сходятся с экспериментом, модель уточняют.

В курсе ТОЭ используют общие физические принципы, формирующие диалектическое мышление, такие, как принцип симметрии, принцип минимума энергии, закон сохранения заряда, принцип непрерывности магнитного потока. При выполнении лабораторных работ студент ощущает реальность явлений, о которых шла речь в теории. Методы расчета электрических цепей можно излагать по крайней мере двумя способами. Согласно первому — их излагают одновременно с теорией электрических цепей синусоидального тока. Согласно второму — методы расчета рассматривают по отношению к резистивным цепям (цепям постоянного тока), а затем эти методы распространяют на цепи синусоидального тока. Второй способ, с нашей точки зрения, методически более целесообразен — материал, расчлененный на две самостоятельные части, усваивается легче и прочнее. Кроме того, студент приобретает навык в расчете цепей постоянного тока, область применения которых достаточно широка.

**Вопросы для самопроверки**

1. Дайте определение электромагнитному полю. Какими основными величинами его характеризуют и каковы его свойства? 2. Что положено в основу определения напряженности электрического поля $\vec{E}$ и индукции магнитного поля $\vec{B}$? Каковы единицы их измерения? 3. Какой смысл вкладывается в понятие потенциальной, вихревой и сторонней составляющих напряженности электрического поля? 4. Как связаны векторы $\vec{E}$ и $\vec{D}$; $\vec{H}$ и $\vec{B}$? 5. Дайте определение плотности тока проводимости, смещения, переноса. 6. Запишите уравнение непрерывности полного тока. 7. Какие проявления магнитного поля вам известны? 8. Как определить магнитный поток $\Phi$ и потокосцепление $\Psi$? В каких единицах их измеряют? 9. Как записать принцип непрерывности магнитного потока? 10. Прокомментируйте формулу $e = -d\Psi/dt$. Чем объяснить наличие знака минус в ней? 11. Запишите и поясните смысл четырех уравнений Максвелла. 12. Покажите, что уравнение первого закона Кирхгофа следует из принципа непрерывности полного тока. 13. Исходя из основных уравнений электромагнитного поля выведите уравнение, записанное по второму закону Кирх-

гофа для цепи переменного тока. 14. Что понимают под явлением самоиндукции и явлением взаимоиндукции? 15. Дайте определение индуктивности $L$ и взаимной индуктивности $M$. От каких факторов они зависят? 16. Прокомментируйте три способа определения индуктивности: $L = \Psi/i$, $L = -\dfrac{e_L}{di/dt}$, $L = \dfrac{2W_м}{I^2}$. 17. Как следует расположить две цилиндрические катушки друг по отношению к другу, чтобы $M$ между ними была равна нулю? 18. Поясните, почему коэффициент связи между двумя магнитосвязанными катушками $k_{св} \leqslant 1$. 19. В опыте было получено $L_1 = L_2 = 0{,}1$ Гн, $M = 0{,}11$ Гн. Можно ли верить этим данным? 20. Чем физически можно объяснить, что внутренняя индуктивность цилиндрического провода не зависит от его радиуса? 21. Какие функции выполняют $L$ и $M$ как элементы схем замещения реальных электрических цепей? 22. Прокомментируйте формулу для подсчета магнитной энергии магнитосвязанных контуров. 23. Как связаны потенциал $\varphi$ и напряженность $\vec{E}$? 24. Какие поля называют потенциальными и какие вихревыми? 25. Дайте определение понятию «емкость» конденсатора. От каких факторов она зависит? 26. Прокомментируйте три способа определения емкости конденсатора: $C = q/U$, $C = \dfrac{i}{dq/dt}$, $C = \dfrac{2W_э}{q^2}$. 27. Какие функции выполняет емкость как элемент схемы замещения реальной электрической цепи? 28. Выведете формулы для емкости плоского и цилиндрического конденсаторов. 29. Выразите 0,1 нФ в пикофарадах. 30. Как связано положительное направление отсчета напряжения на конденсаторе $C$ с положительным направлением тока через него? 31. Чем отличаются электрические цепи с сосредоточенными параметрами от цепей с распределенными параметрами? 32. Зависит ли схема замещения реальной электрической цепи от частоты?

## Глава вторая

# СВОЙСТВА ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ И МЕТОДЫ ИХ РАСЧЕТА. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА

**§ 2.1. Определение линейных и нелинейных электрических цепей.** Электромагнитное устройство с происходящими в нем и в окружающем его пространстве физическими процессами в теории электрических цепей заменяют некоторым расчетным эквивалентом — электрической цепью.

*Электрической цепью* называют совокупность соединенных друг с другом источников электрической энергии и нагрузок, по которым может протекать электрический ток. Электромагнитные процессы в электрической цепи можно описать с помощью понятий «ток», «напряжение», «ЭДС», «сопротивление» («проводимость»), «индуктивность», «емкость».

*Постоянным током* называют ток, неизменный во времени. Постоянный ток представляет собой направленное упорядоченное движение частиц, несущих электрические заряды.

Как известно из курса физики, носителями зарядов в металлах являются свободные электроны, а в жидких — ионы. Упорядоченное движение носителей зарядов в проводниках вызывается электрическим полем, созданным в них источниками электрической



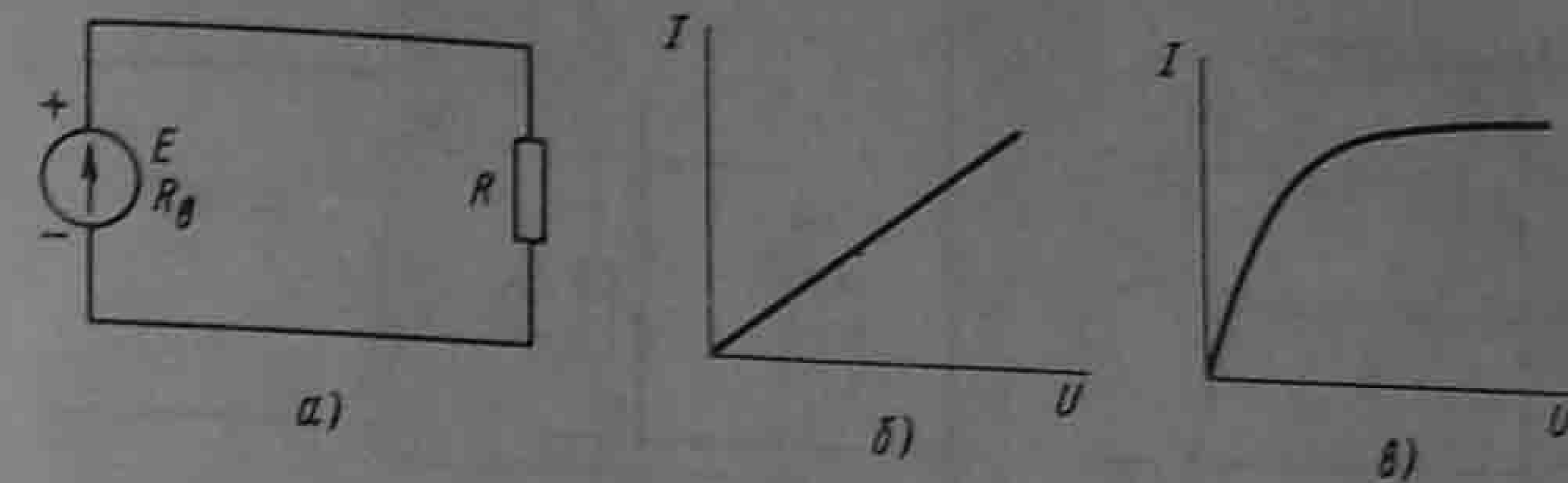



Рис. 2.1

энергии. Источники электрической энергии преобразуют химическую, механическую и другие виды энергии в электрическую. Источник электрической энергии характеризуется значением и направлением ЭДС, а также значением внутреннего сопротивления.

Постоянный ток принято обозначать буквой $I$, ЭДС источника — $E$, сопротивление — $R$, проводимость — $g$. В Международной системе единиц (СИ) единица тока — ампер (А), единица ЭДС — вольт (В), единица сопротивления — ом (Ом), единица проводимости — сименс (См).

Изображение электрической цепи с помощью условных знаков называют *электрической схемой* (рис. 2.1, *а*).

Зависимость тока, протекающего по сопротивлению, от напряжения на этом сопротивлении называют вольт-амперной характеристикой (ВАХ). По оси абсцисс на графике обычно откладывают напряжение, а по оси ординат — ток.

Сопротивления, ВАХ которых являются прямыми линиями (рис. 2.1, *б*), называют *линейными*, электрические цепи только с линейными сопротивлениями — *линейными электрическими цепями*.

Сопротивления, ВАХ которых не являются прямыми линиями (рис. 2.1, *в*), т. е. они нелинейны, называют *нелинейными*, а электрические цепи с нелинейными сопротивлениями — *нелинейными электрическими цепями*.

**§ 2.2. Источник ЭДС и источник тока.** Источник электрической энергии характеризуется ЭДС $E$ и внутренним сопротивлением $R_в$. Если через него под действием ЭДС $E$ протекает ток $I$, то напряжение на его зажимах $U = E - IR_в$ при увеличении $I$ уменьшается. Зависимость напряжения $U$ на зажимах реального источника от тока $I$ изображена на рис. 2.2, *а*.

Обозначим через $m_U$ — масштаб по оси $U$, через $m_I$ — масштаб по оси $I$. Тогда для произвольной точки на характеристике рис. 2.2, *а* $abm_U = IR_в$; $bcm_I = I$; $\mathrm{tg}\,\alpha = ab/bc = R_в m_I/m_U$. Следовательно, $\mathrm{tg}\,\alpha$ пропорционален $R_в$. Рассмотрим два крайних случая.

1. Если у некоторого источника внутреннее сопротивление $R_в = 0$, то ВАХ его будет прямой линией (рис. 2.2, *б*). Такой характеристикой обладает идеализированный источник питания, назы-

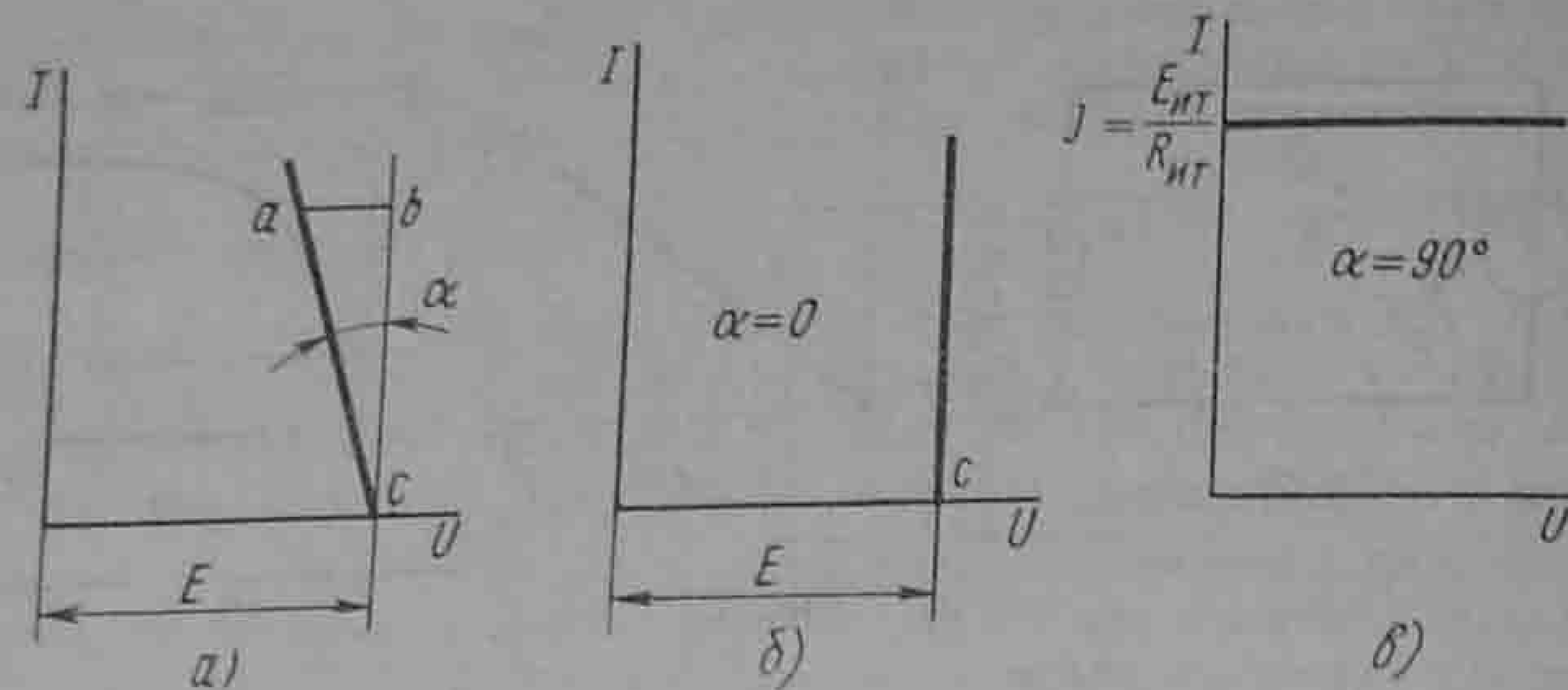



Рис. 2.2

ваемый *источником ЭДС*. Следовательно, источник ЭДС представляет собой такой идеализированный источник питания, напряжение на зажимах которого постоянно (не зависит от тока $I$) и равно ЭДС $E$, а внутреннее сопротивление равно нулю.

2. Если у некоторого источника беспредельно увеличивать ЭДС $E$ и внутреннее сопротивление $R_в$, то точка $c$ (рис. 2.2, $a$) отодвигается по оси абсцисс в бесконечность, а угол $\alpha$ стремится к 90° (рис. 2.2, $в$). Такой источник питания называют *источником тока*.

Следовательно, источник тока представляет собой идеализированный источник питания, который создает ток $J = I$, не зависящий от сопротивления нагрузки, к которой он присоединен, а его ЭДС $E_{ит}$ и внутреннее сопротивление $R_{ит}$ равны бесконечности. Отношение двух бесконечно больших величин $E_{ит}/R_{ит}$ равно конечной величине — току $J$ источника тока.

При расчете и анализе электрических цепей *реальный источник* электрической энергии с конечным значением $R_в$ заменяют *расчетным эквивалентом*. В качестве эквивалента может быть взят:

а) источник ЭДС $E$ с последовательно включенным сопротивлением $R_в$, равным внутреннему сопротивлению реального источника (рис. 2.3, $a$; стрелка в кружке указывает направление возрастания потенциала внутри источника ЭДС);

б) источник тока с током $J = E/R_в$ и параллельно с ним включенным сопротивлением $R_в$ (рис. 2.3, $б$; стрелка в кружке указывает положительное направление тока источника тока).

Ток в нагрузке (в сопротивлении $R$) для схем рис. 2.3, $a$, $б$ одинаков: $I = E/(R + R_в)$, т. е. равен току в схеме рис. 2.1, $a$. Для схемы рис. 2.3, $a$ это следует из того, что при последовательном соединении значения сопротивлений $R$ и $R_в$ складываются. В схеме рис. 2.3, $б$ ток $J = E/R_в$ распределяется обратно пропорционально значениям сопротивлений $R$ и $R_в$ двух параллельных ветвей. Ток в нагрузке $R$

$$I = J\frac{R_в}{R + R_в} = \frac{E}{R_в}\frac{R_в}{R + R_в} = \frac{E}{R + R_в}.$$



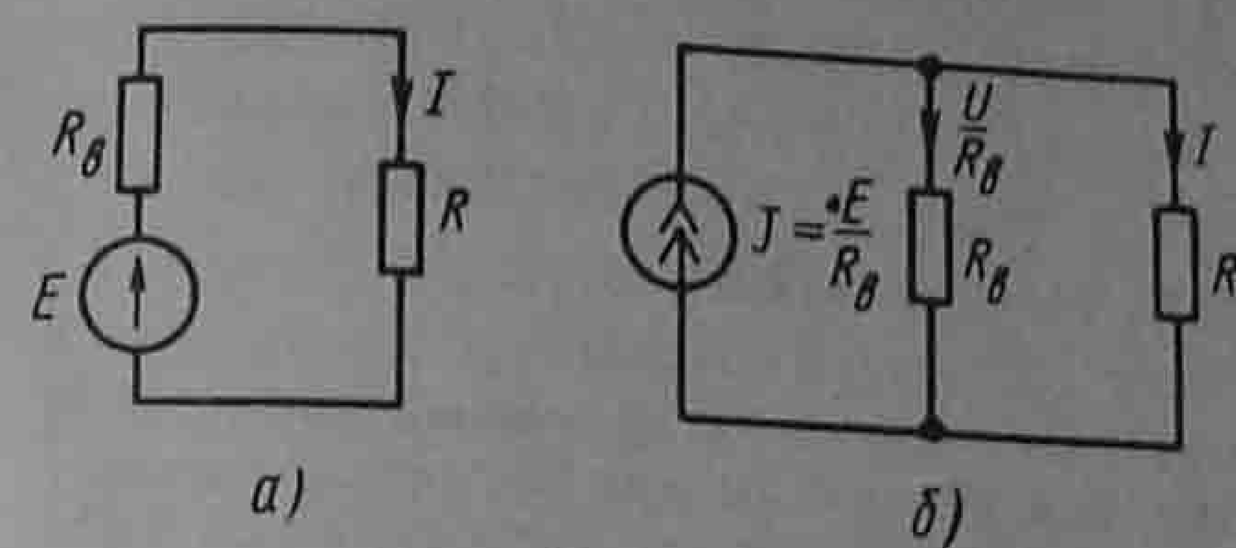



Рис. 2.3

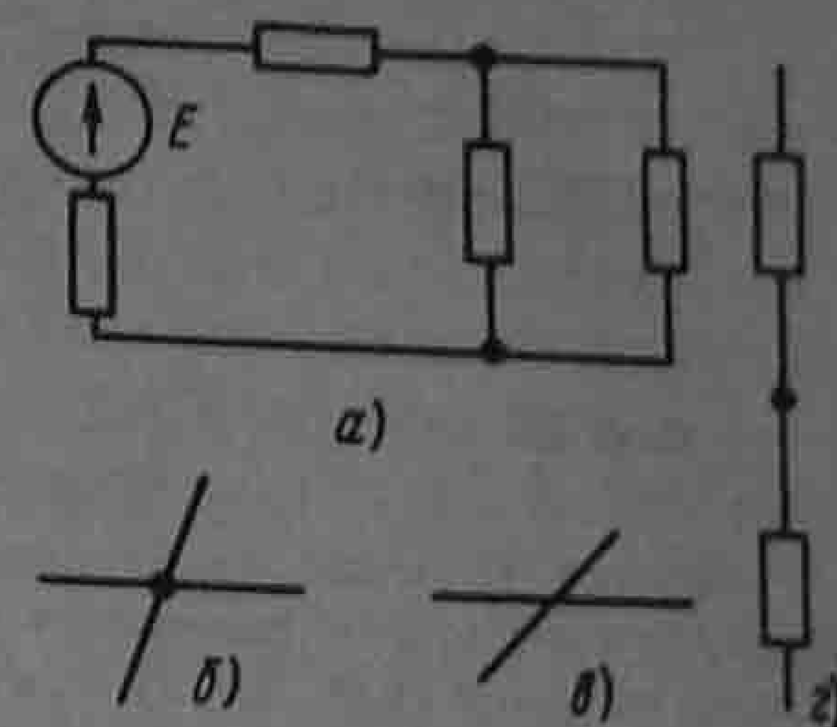



Рис. 2.4

Каким из двух расчетных эквивалентов пользоваться, совершенно безразлично. В дальнейшем используется в основном первый эквивалент.

Обратим внимание на следующее:

1) источник ЭДС и источник тока — идеализированные источники, физически осуществить которые, строго говоря, невозможно;

2) схема рис. 2.3, $б$ эквивалента схеме рис. 2.3, $a$ в отношении энергии, выделяющейся в сопротивлении нагрузки $R$, и не эквивалентна ей в отношении энергии, выделяющейся во внутреннем сопротивлении источника питания $R_в$;

3) идеальный источник ЭДС без последовательно соединенного с ним $R_в$ нельзя заменить идеальным источником тока.

На примере схемы рис. 2.3 осуществим эквивалентный переход от схемы с источником тока к схеме с источником ЭДС. В схеме рис. 2.3, $б$ источник тока дает ток $J = 50$ А. Шунтирующее его сопротивление $R_в = 2$ Ом. Найти ЭДС эквивалентного источника ЭДС в схеме рис. 2.3, $a$.

ЭДС $E = JR_в = 100$ В. Следовательно, параметры эквивалентной схемы рис. 2.3, $a$ таковы: $E = 100$ В, $R_в = 2$ Ом.

**§ 2.3. Неразветвленные и разветвленные электрические цепи.** Электрические цепи подразделяют на неразветвленные и разветвленные. На рис. 2.1, $a$ представлена схема простейшей неразветвленной цепи. Во всех элементах ее течет один и тот же ток. Простейшая разветвленная цепь изображена на рис. 2.4, $a$; в ней имеются три ветви и два узла. В каждой ветви течет свой ток. Ветвь можно определить как участок цепи, образованный последовательно соединенными элементами (через которые течет одинаковый ток) и заключенный между двумя узлами. В свою очередь, узел — это точка цепи, в которой сходятся не менее трех ветвей. Если в месте пересечения двух линий на электрической схеме поставлена точка (рис. 2.4, $б$), то в этом месте есть электрическое соединение двух линий, в противном случае (рис. 2.4, $в$) его нет.

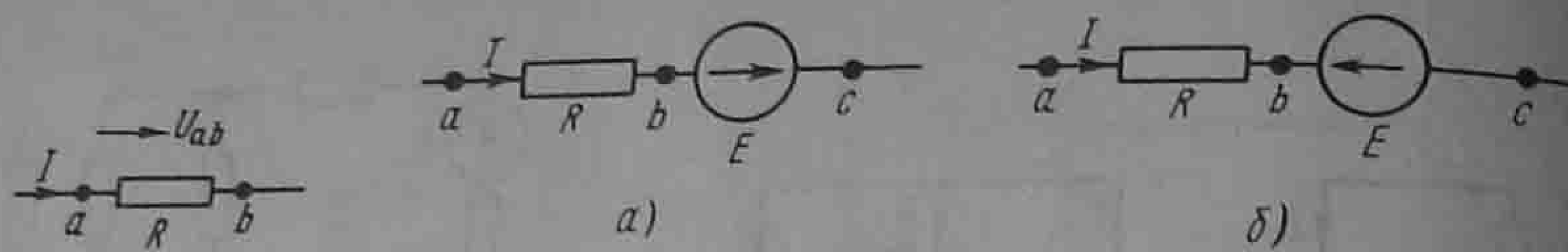



Рис. 2.5

Рис. 2.6

Кроме термина «узел» иногда используют термин «устранимый узел». Под устранимым узлом понимают точку, в которой соединены два последовательных сопротивления (рис. 2.4, г). Этим понятием пользуются при введении данных в ЭВМ о значении и характере сопротивлений.

**§ 2.4. Напряжение на участке цепи.** Под *напряжением* на некотором участке электрической цепи понимают разность потенциалов между крайними точками этого участка.

На рис. 2.5 изображен участок цепи, крайние точки которого обозначены буквами $a$ и $b$. Пусть ток $I$ течет от точки $a$ к точке $b$ (от более высокого потенциала к более низкому). Следовательно, потенциал точки $a(\varphi_a)$ выше потенциала точки $b(\varphi_b)$ на значение, равное произведению тока $I$ на сопротивление $R$: $\varphi_a = \varphi_b + IR$.

В соответствии с определением напряжение между точками $a$ и $b$ $U_{ab} = \varphi_a - \varphi_b$.

Следовательно, $U_{ab} = IR$, т. е. напряжение на сопротивлении равно произведению тока, протекающего по сопротивлению, на значение этого сопротивления.

В электротехнике разность потенциалов на концах сопротивления называют либо *напряжением на сопротивлении*, либо *падением напряжения*. В дальнейшем разность потенциалов на концах сопротивления, т. е. произведение $IR$, будем именовать падением напряжения.

Положительное направление падения напряжения на каком-либо участке (направление отсчета этого напряжения), указываемое на рисунках стрелкой, совпадает с положительным направлением отсчета тока, протекающего по данному сопротивлению.

В свою очередь, положительное направление отсчета тока $I$ (ток — это скаляр алгебраического характера) совпадает с положительным направлением нормали к поперечному сечению проводника при вычислении тока по формуле $I = \int_S \vec{\delta}\, d\vec{S}$, где $\vec{\delta}$ — плотность тока; $d\vec{S}$ — элемент площади поперечного сечения (подробнее см. § 20.1).

Рассмотрим вопрос о напряжении на участке цепи, содержащем не только сопротивление, но и ЭДС.

На рис. 2.6, *а*, *б* показаны участки некоторых цепей, по которым протекает ток $I$. Найдем разность потенциалов (напряжение) между точками $a$ и $c$ для этих участков. По определению,



$$U_{ac} = \varphi_a - \varphi_c. \qquad (2.1)$$

Выразим потенциал точки $a$ через потенциал точки $c$. При перемещении от точки $c$ к точке $b$ встречно направлению ЭДС $E$ (рис. 2.6, *а*) потенциал точки $b$ оказывается ниже (меньше), чем потенциал точки $c$, на значение ЭДС $E$: $\varphi_b = \varphi_c - E$. При перемещении от точки $c$ к точке $b$ согласно направлению ЭДС $E$ (рис. 2.6, *б*) потенциал точки $b$ оказывается выше (больше), чем потенциал точки $c$, на значение ЭДС $E$: $\varphi_b = \varphi_c + E$.

Так как по участку цепи без источника ЭДС ток течет от более высокого потенциала к более низкому, в обеих схемах рис. 2.6 потенциал точки $a$ выше потенциала точки $b$ на значение падения напряжения на сопротивлении $R$: $\varphi_a = \varphi_b + IR$. Таким образом, для рис. 2.6, *а*

$$\varphi_a = \varphi_c - E + IR,$$

$$U_{ac} = \varphi_a - \varphi_c = IR - E, \qquad (2.2)$$

для рис. 2.6, *б*

$$\varphi_a = \varphi_c + E + IR,$$

или

$$U_{ac} = \varphi_a - \varphi_c = IR + E. \qquad (2.2а)$$

Положительное направление напряжения $U_{ac}$ показывают стрелкой от $a$ к $c$. Согласно определению, $U_{ca} = \varphi_c - \varphi_a$, поэтому $U_{ca} = -U_{ac}$, т. е. изменение чередования (последовательности) индексов равносильно изменению знака этого напряжения. Следовательно, напряжение может быть и положительной, и отрицательной величиной.

**§ 2.5. Закон Ома для участка цепи, не содержащего источника ЭДС.** Закон (правило) Ома для участка цепи, не содержащего источник ЭДС, устанавливает связь между током и напряжением на этом участке. Применительно к рис. 2.5

$$U_{ab} = IR,$$

или

$$I = U_{ab} / R = (\varphi_a - \varphi_b) / R. \qquad (2.3)$$

**§ 2.6. Закон Ома для участка цепи, содержащего источник ЭДС. Обобщенный закон Ома.** Закон (правило) Ома для участка цепи, содержащего источник ЭДС, позволяет найти ток этого участка по известной разности потенциалов $(\varphi_a - \varphi_c)$ на концах участка цепи и имеющейся на этом участке ЭДС $E$. Так, по уравнению (1.2) для

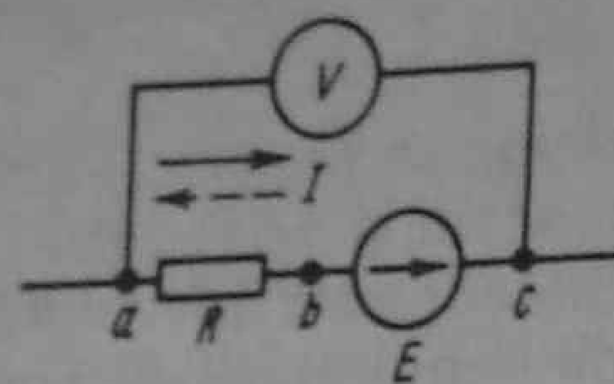



Рис. 2.7

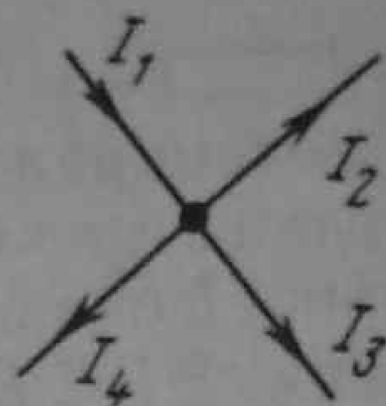



Рис. 2.8

схемы рис. 2.6, *а*

$$I = (\varphi_a - \varphi_c + E) / R = (U_{ac} + E) / R;$$

по уравнению (2.2*а*) для схемы рис. 2.6, *б*

$$I = (\varphi_a - \varphi_c - E) / R = (U_{ac} - E) / R.$$

В общем случае

$$I = \frac{(\varphi_a - \varphi_c) \pm E}{R} = \frac{U_{ac} \pm E}{R}. \qquad (2.3а)$$

Уравнение (2.3а) математически выражает закон Ома для участка цепи, содержащего источник ЭДС; знак плюс перед $E$ соответствует рис. 2.6,*а*, знак минус — рис. 2.6, *б*. В частном случае при $E = 0$ уравнение (2.3а) переходит в уравнение (2.3).

**Пример 9.** К зажимам *а* и *с* схемы рис. 2.7 подключен вольтметр, имеющий очень большое, теоретически бесконечно большое сопротивление (следовательно, его подключение или отключение не влияет на режим работы цепи).

Если ток $I = 10$ А течет от точки *а* к точке *с*, то показание вольтметра $U'_{ac} = -18$ В; если этот ток течет от точки *с* к точке *а*, то $U''_{ac} = -20$ В. Определить сопротивление $R$ и ЭДС $E$.

Р е ш е н и е. В первом режиме $U'_{ac} = -18 = -E + IR = -E + 10R$, во втором $U''_{ac} = -20 = -E - IR = -E - 10R$. Совместное решение дает $E = 19$ В, $R = 0{,}1$ Ом.

**§ 2.7. Законы Кирхгофа.** Все электрические цепи подчиняются первому и второму законам (правилам) Кирхгофа.

П е р в ы й   з а к о н   К и р х г о ф а можно сформулировать двояко:

1) *алгебраическая сумма токов, подтекающих к любому узлу схемы, равна нулю;*

2) *сумма подтекающих к любому узлу токов равна сумме утекающих от узла токов.*

Применительно к рис. 2.8, если подтекающие к узлу токи считать положительными, а утекающие — отрицательными, то согласно первой формулировке

$$I_1 - I_2 - I_3 - I_4 = 0;$$



согласно второй —

$$I_1 = I_2 + I_3 + I_4.$$

Физически первый закон Кирхгофа означает, что движение зарядов в цепи происходит так, что ни в одном из узлов они не скапливаются.

Если мысленно рассечь любую схему произвольной плоскостью и все находящиеся по одну сторону от нее рассматривать как некоторый большой "узел", то алгебраическая сумма токов, входящих в этот "узел", будет равна нулю.

В т о р о й   з а к о н   К и р х г о ф а также можно сформулировать двояко:

1) *алгебраическая сумма падений напряжения в любом замкнутом контуре равна алгебраической сумме ЭДС вдоль того же контура:*

$$\sum IR = \sum E \qquad (2.4)$$

(в каждую из сумм соответствующие слагаемые входят со знаком плюс, если они совпадают с направлением обхода контура, и со знаком минус, если они не совпадают с ним);

2) *алгебраическая сумма напряжений (не падений напряжения!) вдоль любого замкнутого контура равна нулю:*

$$\Sigma U_{kl} = 0. \qquad (2.4а)$$

Для периферийного контура схемы рис. 2.9

$$U_{ae} + U_{ec} + U_{cd} + U_{da} = 0.$$

Законы Кирхгофа справедливы для линейных и нелинейных цепей при любом характере изменения во времени токов и напряжений.

Сделаем два замечания: 1) запись уравнения по второму закону Кирхгофа в форме (2.4) может быть получена, если обойти какой-либо контур некоторой схемы и записать выражение для потенциала произвольной точки этого контура через потенциал этой же точки (взяв ее за исходную при обходе) и падения напряжения и ЭДС; 2) при записи уравнений по второму закону Кирхгофа в форме (2.4а) напряжения $U_{kl}$ участков цепи включают в себя и падения напряжения участков, и имеющиеся на этих участках ЭДС.

**§ 2.8. Составление уравнений для расчета токов в схемах с помощью законов Кирхгофа.** Законы Кирхгофа используют для нахождения токов в ветвях схемы. Обозначим число всех ветвей схемы *в*, число ветвей, содержащих источники тока, — $в_{ит}$ и число узлов *у*. В каждой ветви схемы течет свой ток. Так как токи в ветвях с источниками тока известны, то число неизвестных токов равняется $в - в_{ит}$. Перед тем как составить уравнения, необходимо произвольно выбрать: а) положительные направления токов в ветвях и обозначить их на схеме; б) положительные направления обхода контуров для составления уравнений по второму закону Кирхгофа.

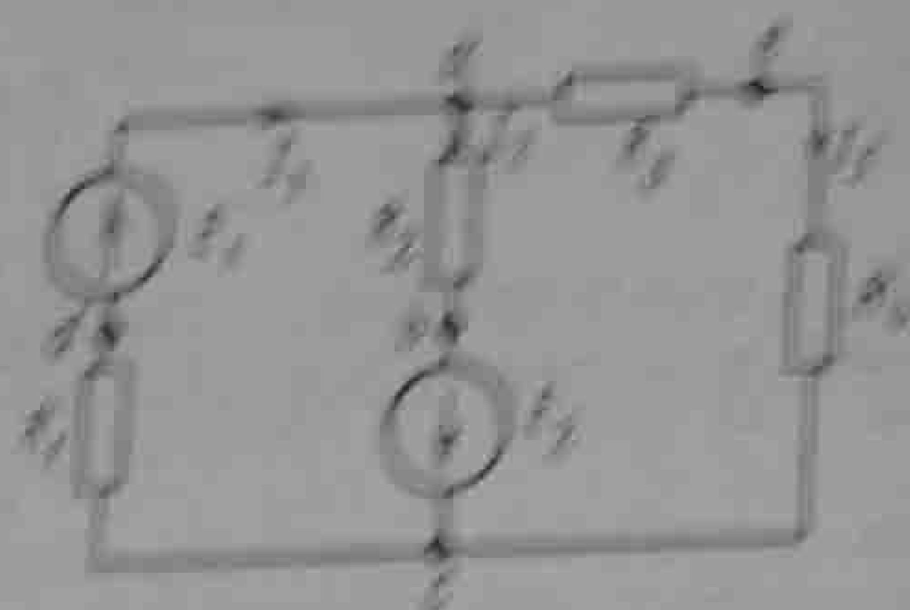


Рис. 2.9

*С целью единообразия рекомендуется для всех контуров положительные направления обхода выбирать одинаковыми, например по часовой стрелке.*

*Чтобы получить линейно независимые уравнения, по первому закону Кирхгофа составляют уравнения, число которых равно числу узлов без единицы, т. е. $y - 1$.*

*Уравнение для последнего $y$-го узла не составляют, так как оно совпало бы с уравнением, полученным при суммировании уже составленных уравнений для $y - 1$ узлов, поскольку в эту сумму входили бы дважды и с противоположными знаками токи ветвей, не подходящих к $y$-му узлу, а токи ветвей, подходящих к $y$-му узлу, входили бы в эту сумму со знаками, противоположными тем, с какими они вошли бы в уравнение для $y$-го узла.*

*По второму закону Кирхгофа составляют уравнения, число которых равно числу ветвей без источников тока ($в - в_{ит}$), за вычетом уравнений, составленных по первому закону Кирхгофа, т. е. $(в - в_{ит}) - (y - 1) = в - в_{ит} - y + 1$.*

*Составляя уравнения по второму закону Кирхгофа, следует охватить все ветви схемы, исключая лишь ветви с источниками тока.*

Если попытаться составить уравнение по второму закону Кирхгофа в форме (2.5) для контура, в который входит источник тока, то в него вошли бы бесконечно большие слагаемые и оно не имело бы смысла.

*При записи линейно независимых уравнений по второму закону Кирхгофа стремятся, чтобы в каждый новый контур, для которого составляют уравнение, входила хотя бы одна новая ветвь, не вошедшая в предыдущие контуры, для которых уже записаны уравнения по второму закону Кирхгофа. Такие контуры условимся называть независимыми.*

*Требование, чтобы в каждый новый контур входила хотя бы одна новая ветвь, является достаточным, но не необходимым условием, а потому его не всегда выполняют. В таких случаях часть уравнений по второму закону Кирхгофа составляют для контуров, все ветви которых уже вошли в предыдущие контуры.*

**Пример 10.** Найти токи в ветвях схемы рис. 2.9, в которой $E_1 = 80$ В, $E_2 = 64$ В, $R_1 = 6$ Ом, $R_2 = 4$ Ом, $R_3 = 3$ Ом, $R_4 = 1$ Ом.



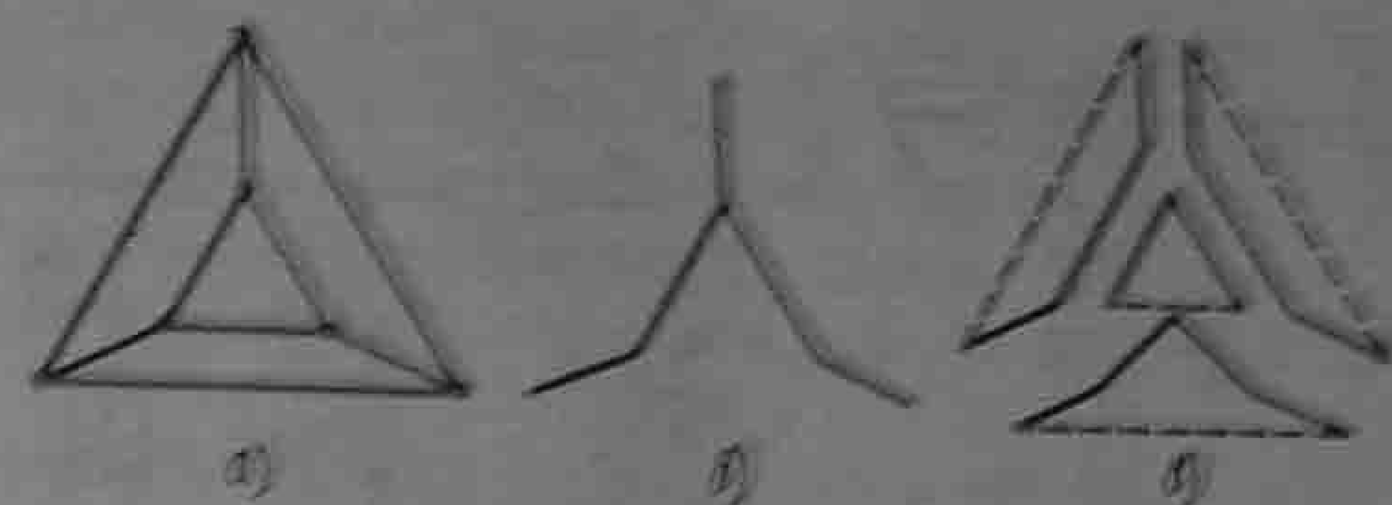


Рис. 2.10

Решение. Произвольно выбираем положительные направления тока в ветвях. В схеме рис. 2.9, $в = 3$; $в_{ит} = 0$; $y = 2$.

Следовательно, по первому закону Кирхгофа, можно составить только одно уравнение:

$$I_1 + I_2 = I_3. \quad (а)$$

Нетрудно убедиться, что для второго узла получили бы аналогичное уравнение. По второму закону Кирхгофа составим $в - в_{ит} - (y - 1) = 3 - 0 - (2 - 1) = 2$ уравнения. Положительные направления обхода контуров выбираем по часовой стрелке.

Для контуров $R_1E_1R_2E_2$

$$I_1R_1 - I_2R_2 = E_1 + E_2. \quad (б)$$

Знак плюс перед $I_1R_1$ взят потому, что направление тока совпадает с направлением обхода контура; знак минус перед $I_2R_2$ — потому, что направление $I_2$ встречно обходу контура.

Для контура $E_2R_2R_3R_4$

$$I_2R_2 + I_3(R_3 + R_4) = -E_2. \quad (в)$$

Совместное решение уравнений (а) — (в) дает $I_1 = 14$ А, $I_2 = -15$ А, $I_3 = -1$ А.

Поскольку положительные направления токов выбирают произвольно, в результате расчета какой-либо один или несколько токов могут оказаться отрицательными. В рассмотренном примере отрицательными оказались токи $I_2$ и $I_3$, что следует понимать так: направления токов $I_2$ и $I_3$ не совпадают с направлениями, принятыми для них на рис. 2.9 за положительные, т. е. в действительности токи $I_2$ и $I_3$ проходят в обратном направлении.

Для выбора контура таким образом, чтобы в каждый из них входило по одной ветви, не входящей в остальные контуры, используют понятие дерева. Под деревом понимают совокупность ветвей, касающихся всех узлов, но не образующих ни одного замкнутого контура. Из одной и той же схемы можно образовать несколько деревьев. При составлении системы уравнений по второму закону Кирхгофа можно взять любое дерево из возможных. Одно из возможных деревьев схемы рис. 2.10, *а* изображено на рис. 2.10, *б*, а на рис. 2.10, *в* — четыре независимых контура, в каждый из которых входит по одной пунктиром показанной ветви, не входящей в остальные. Более подробно о топологии электрических схем см. § 2.31 — 2.35 и А.5 — А.10.

**§ 2.9. Заземление одной точки схемы.** Заземление любой точки схемы свидетельствует о том, что потенциал этой точки принят равным нулю. При этом токораспределение в схеме не изменяется, так как никаких новых ветвей, по которым могли бы протекать токи, не образуется. Иначе будет, если заземлить две или большее число точек схемы, имеющих различные потенциалы. В этом случае через

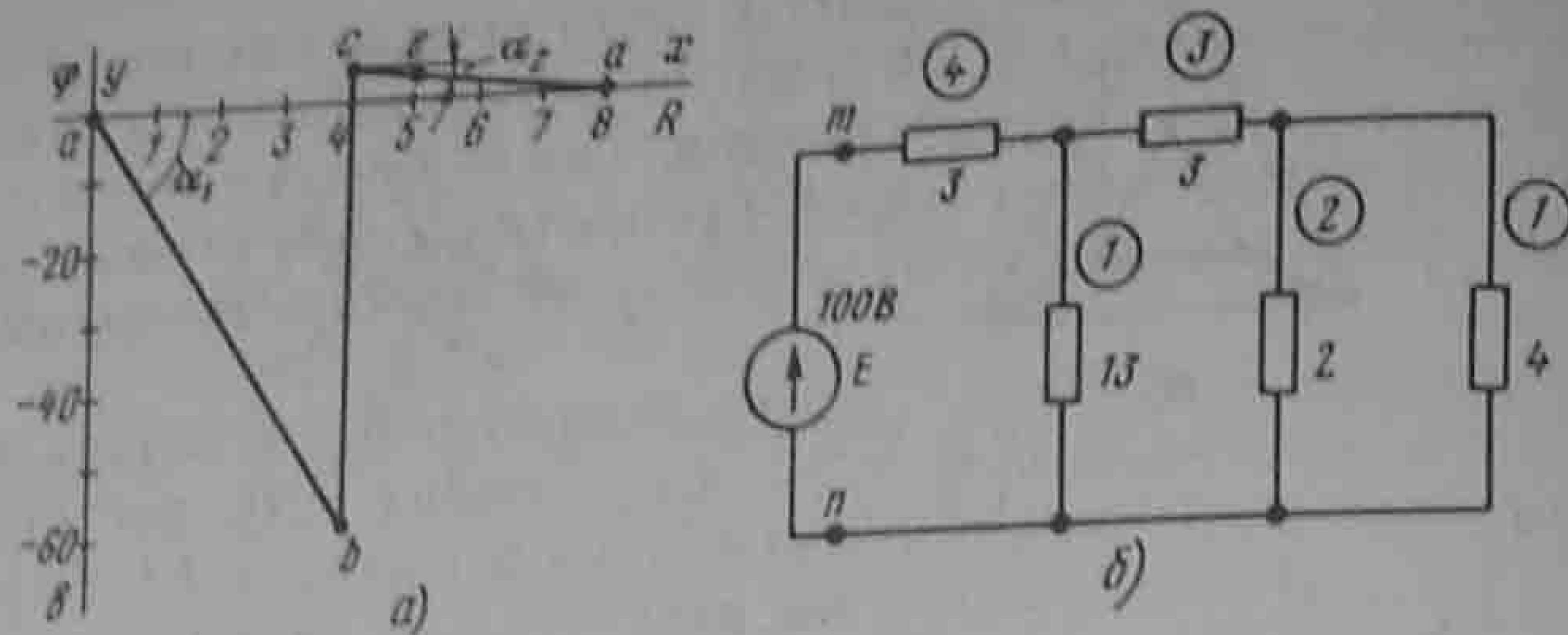



Рис. 2.11

землю (любую проводящую среду) образуются дополнительные ветви, сама схема становится отличной от исходной и токораспределение в ней меняется.

**§ 2.10. Потенциальная диаграмма.** Под *потенциальной диаграммой* понимают график распределения потенциала вдоль какого-либо участка цепи или замкнутого контура. По оси абсцисс на нем откладывают сопротивления вдоль контура, начиная с какой-либо произвольной точки, по оси ординат — потенциалы. Каждой точке участка цепи или замкнутого контура соответствует своя точка на потенциальной диаграмме.

Рассмотрим последовательность построения потенциальной диаграммы по данным примера 2.

**Пример 11.** Построить потенциальную диаграмму для контура *abcea* (см. рис. 2.9).

Р е ш е н и е. Подсчитаем суммарное сопротивление контура: $4+3+1=8$ Ом. Выберем масштабы по оси абсцисс (ось $x$) и по оси ординат (ось $y$).

Произвольно примем потенциал одной из точек, например точки $a$, $\varphi_a=0$. Эту точку на диаграмме рис. 2.11, *а* поместим в начало координат.

Потенциал точки $b$: $\varphi_b=\varphi_a+I_2 4=\varphi_a-60=-60$ В; ее координаты: $x=4$, $y=-60$. Потенциал точки $c$: $\varphi_c=\varphi_b+E_2=4$В; ее координаты: $x=4$, $y=4$. Потенциал точки $e$: $\varphi_e=\varphi_c+I_3R_4=4-1\times1=3$В; ее координаты: $x=5$; $y=3$.

Тангенс угла $\alpha_1$ наклона прямой $a_{ab}$ к оси абсцисс пропорционален току $I_2$, а тангенс угла $\alpha_2$ наклона прямой $ce$ — току $I_3$; $\operatorname{tg}\alpha=I\dfrac{m_r}{m_\varphi}$, где $m_r$ и $m_\varphi$ — масштабы по осям $x$ и $y$.

Обратим внимание *на различие в знаках*, с которыми входит падение напряжения $IR$ при определении потенциала какой-либо точки схемы через потенциал исходной точки и при составлении уравнений по второму закону Кирхгофа. При вычислении потенциала последующей точки через потенциал предыдущей $IR$ берут со знаком минус, если перемещение по сопротивлению $R$ совпадает по направлению с током, тогда как при составлении уравнений по второму закону Кирхгофа $IR$ некоторого участка цепи берут в сумме $\Sigma IR$ со знаком плюс, если обход этого участка совпадает с направлением тока $I$ на нем.



**§ 2.11. Энергетический баланс в электрических цепях.** При протекании токов по сопротивлениям в последних выделяется теплота. На основании закона сохранения энергии количество теплоты, выделяющееся в единицу времени в сопротивлениях схемы, должно равняться энергии, доставляемой за то же время источником питания.

Если направление тока $I$, протекающего через источник ЭДС $E$, совпадает с направлением ЭДС, то источник ЭДС доставляет в цепь энергию в единицу времени (мощность), равную $EI$, и произведение $EI$ входит в уравнение энергетического баланса с положительным знаком.

Если же направление тока $I$ встречно направлению ЭДС $E$, то источник ЭДС не поставляет энергию, а потребляет ее (например, заряжается аккумулятор), и произведение $EI$ войдет в уравнение энергетического баланса с отрицательным знаком.

Уравнение энергетического баланса при питании только от источников ЭДС имеет вид

$$\Sigma I^2R=\Sigma EI.$$

Когда схема питается не только от источников ЭДС, но и от источников тока, т. е. к отдельным узлам схемы подтекают и от них утекают токи источников тока, при составлении уравнения энергетического баланса необходимо учесть и энергию, доставляемую источниками тока. Допустим, что к узлу $a$ схемы подтекает ток $J$ от источника тока, а от узла $b$ этот ток утекает. Доставляемая источником тока мощность равна $U_{ab}J$. Напряжение $U_{ab}$ и токи в ветвях схемы должны быть подсчитаны с учетом тока, подтекающего от источника тока. Последнее проще всего сделать по методу узловых потенциалов (см. § 2.22). Общий вид уравнения энергетического баланса:

$$\Sigma I^2R=\Sigma EI+\Sigma U_{ab}J.$$

Для практических расчетов электрических цепей разработаны методы, более экономичные в смысле затраты времени и труда, чем метод расчета цепей по законам Кирхгофа. Рассмотрим эти методы.

**§ 2.12. Метод пропорциональных величин.** Согласно методу пропорциональных величин, в самой удаленной от источника ЭДС ветви схемы (исходной ветви) произвольно задаемся некоторым током, например током в 1 А. Далее, продвигаясь к входным зажимам, находим токи в ветвях и напряжения на различных участках схемы. В результате расчета получим значение напряжения $U_{mn}$ схемы и токов в ветвях, если бы в исходной ветви протекал ток в 1 А.

Так как найденное значение напряжения $U_{mn}$ в общем случае не равно ЭДС источника, то следует во всех ветвях изменить токи,

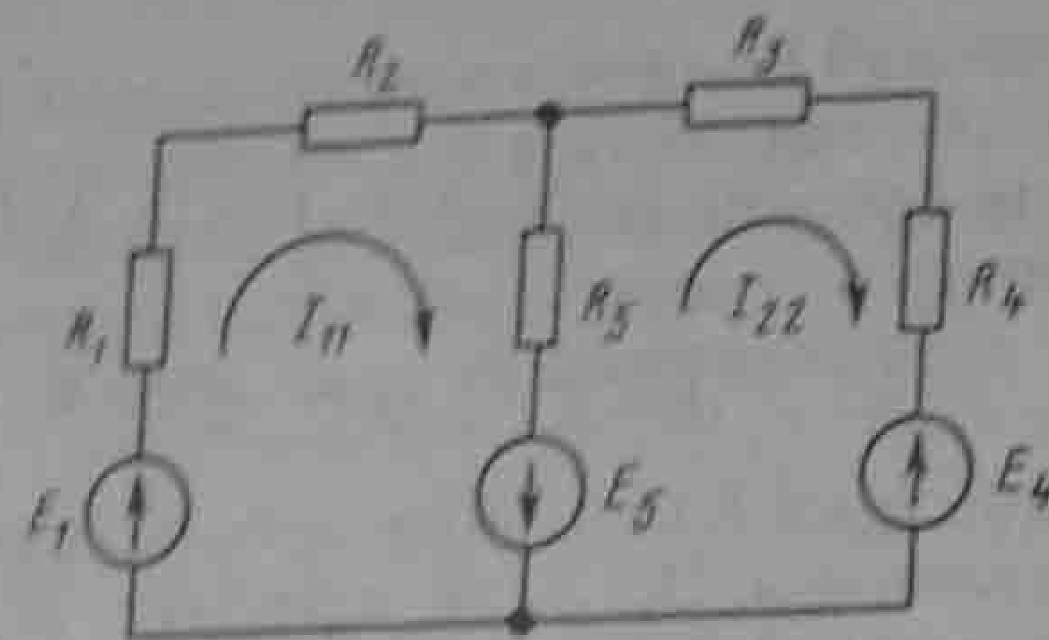



Рис. 2.12

умножив их на коэффициент, равный отношению ЭДС источника к найденному значению напряжения в начале схемы.

Метод пропорциональных величин, если рассматривать его обособленно от других методов, применим для расчета цепей, состоящих только из последовательно и параллельно соединенных сопротивлений и при наличии в схеме одного источника.

Однако этот метод можно использовать и совместно с другими методами (преобразование треугольника в звезду, метод наложения и т. п.), которые рассмотрены далее.

**Пример 12.** Найти токи в ветвях схемы рис. 2.11, *б* методом пропорциональных величин. Сопротивления схемы даны в омах.

Р е ш е н и е. Задаемся током в ветви с сопротивлением 4 Ом, равным 1 А, и подсчитываем токи в остальных ветвях (числовые значения токов обведены на рисунке кружками). Напряжение между точками $m$ и $n$ равно $1\cdot 4 + 3\cdot 3 + 4\cdot 3 = 25$ В. Так как ЭДС $E = 100$ В, все токи следует умножить на коэффициент $k = 100/25 = 4$.

**§ 2.13. Метод контурных токов.** При расчете методом контурных токов полагают, что в каждом независимом контуре схемы течет свой контурный ток. Уравнения составляют относительно контурных токов, после чего через них определяют токи ветвей.

Таким образом, *метод контурных токов* можно определить как метод расчета, в котором за искомые принимают контурные токи. Число неизвестных в этом методе равно числу уравнений, которые необходимо было бы составить для схемы по второму закону Кирхгофа.

Следовательно, метод контурных токов более экономен при вычислительной работе, чем метод на основе законов Кирхгофа (в нем меньше число уравнений).

Вывод основных расчетных уравнений приведем применительно к схеме рис. 2.12, в которой два независимых контура. Положим, что в левом контуре по часовой стрелке течет контурный ток $I_{11}$, а в правой (также по часовой стрелке) — контурный ток $I_{22}$. Для каждого контура составим уравнения по второму закону Кирхгофа. При этом учтем, что по смежной ветви (с сопротивлением $R_5$) течет сверху вниз ток $I_{11} - I_{22}$. Направления обхода контуров примем также по часовой стрелке.



Для первого контура

$$(R_1 + R_2)I_{11} + R_5(I_{11} - I_{22}) = E_1 + E_5 \qquad (а)$$

или

$$(R_1 + R_2 + R_5)I_{11} + (-R_5)I_{22} = E_1 + E_5. \qquad (б)$$

Для второго контура

$$-R_5(I_{11} - I_{22}) + (R_3 + R_4)I_{22} = -E_5 - E_4$$

или

$$(-R_5)I_{11} + (R_3 + R_4 + R_5)I_{22} = -E_4 - E_5.$$

В уравнении (б) множитель при токе $I_{11}$, являющийся суммой сопротивлений первого контура, обозначим через $R_{11}$, множитель при токе $I_{22}$ (сопротивление смежной ветви, взятое со знаком минус) — через $R_{12}$.

Перепишем эти уравнения следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} R_{11}I_{11} + R_{12}I_{22} &= E_{11};\\ R_{21}I_{11} + R_{22}I_{22} &= E_{22}. \end{aligned}\right\} \qquad (2.4б)$$

Здесь

$$R_{11} = R_1 + R_2 + R_5;\ E_{11} = E_1 + E_5;\ R_{12} = R_{21} = -R_5;\ R_{22} = R_3 + R_4 + R_5;\ E_{22} = -E_4 - E_5,$$

где $R_{11}$ — полное или собственное сопротивление первого контура; $R_{12}$ — сопротивление смежной ветви между первым и вторым контурами, взятое со знаком минус; $E_{11}$ — контурная ЭДС первого контура, равная алгебраической сумме ЭДС этого контура (в нее со знаком плюс входят те ЭДС, направления которых совпадают с направлением обхода контура); $R_{22}$ — полное или собственное сопротивление второго контура; $R_{21}$ — сопротивление смежной ветви между первым и вторым контурами, взятое со знаком минус; $E_{22}$ — контурная ЭДС второго контура.

В общем случае можно сказать, что сопротивление смежной ветви между $k$- и $m$-контурами ($R_{km}$) входит в уравнение со знаком минус, если направления контурных токов $I_{kk}$ и $I_{mm}$ вдоль этой ветви встречны, и со знаком плюс, если направления этих токов согласны.

Если в схеме больше двух контуров, например три, то система уравнений выглядит следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} R_{11}I_{11} + R_{12}I_{22} + R_{13}I_{33} &= E_{11};\\ R_{21}I_{11} + R_{22}I_{22} + R_{23}I_{33} &= E_{22};\\ R_{31}I_{11} + R_{32}I_{22} + R_{33}I_{33} &= E_{33}. \end{aligned}\right\} \qquad (2.4в)$$

или в матричной форме

$$[R][I]=[E];$$

$$[R]=\begin{bmatrix}R_{11}R_{12}R_{13}\\R_{21}R_{22}R_{23}\\R_{31}R_{32}R_{33}\end{bmatrix};\ [I]=\begin{bmatrix}I_{11}\\I_{22}\\I_{33}\end{bmatrix};\ [E]=\begin{bmatrix}E_{11}\\E_{22}\\E_{33}\end{bmatrix}. \qquad (2.4г)$$

Рекомендуется для единообразия в знаках сопротивлений с разными индексами все контурные токи направлять в одну и ту же сторону, например по часовой стрелке.

В результате решения системы уравнений какой-либо один или несколько контурных токов могут оказаться отрицательными.

В ветвях, не являющихся смежными между соседними контурами (например, в ветви с сопротивлениями $R_1$, $R_2$ схемы рис. 2.12), найденный контурный ток является действительным током ветви. В смежных ветвях через контурные токи определяют токи ветвей. Например, в ветви с сопротивлением $R_5$ протекающий сверху вниз ток равен разности $I_{11}-I_{22}$.

Если в электрической цепи имеется $n$ независимых контуров, то число уравнений тоже равно $n$.

Общее решение системы $n$ уравнений относительно тока $I_{kk}$:

$$I_{kk}=E_{11}\frac{\Delta_{k1}}{\Delta}+E_{22}\frac{\Delta_{k2}}{\Delta}+E_{33}\frac{\Delta_{k3}}{\Delta}+\ldots+E_{nn}\frac{\Delta_{kn}}{\Delta}, \qquad (2.5)$$

где

$$\Delta=\begin{vmatrix}R_{11}R_{12}R_{13}\ldots R_{1n}\\R_{21}R_{22}R_{23}\ldots R_{2n}\\R_{31}R_{32}R_{33}\ldots R_{3n}\\\ldots\ldots\ldots\ldots\\R_{n1}R_{n2}R_{n3}\ldots R_{nn}\end{vmatrix} \qquad (2.6)$$

— определитель системы.

Алгебраическое дополнение $\Delta_{km}$ получено из определителя $\Delta$ путем вычеркивания $k$-го столбца и $m$-й строки и умножения полученного определителя на $(-1)^{k+m}$.

Если из левого верхнего угла определителя провести диагональ в его правый нижний угол (главная диагональ) и учесть, что $R_{km}=R_{mk}$, то можно убедиться в том, что определитель делится на две части, являющиеся зеркальным отображением одна другой. Это свойство определителя называют *симметрией относительно главной диагонали*. В силу симметрии определителя относительно главной диагонали $\Delta_{km}=\Delta_{mk}$.

**Пример 13.** Найти токи в схеме (рис. 2.13) методом контурных токов. Числовые значения сопротивлений в омах и ЭДС в вольтах указаны на рисунке.

Р е ш е н и е. Выберем направления всех контурных токов $I_{11}$, $I_{22}$ и $I_{33}$ по часовой стрелке. Определяем: $R_{11}=5+5+4=14$ Ом; $R_{22}=5+10+2=17$ Ом; $R_{33}=2+2+1=5$ Ом; $R_{12}=R_{21}=-5$ Ом; $R_{13}=R_{31}=0$; $R_{23}=R_{32}=-2$ Ом; $E_{11}=-10$ В; $E_{33}=-8$ В.



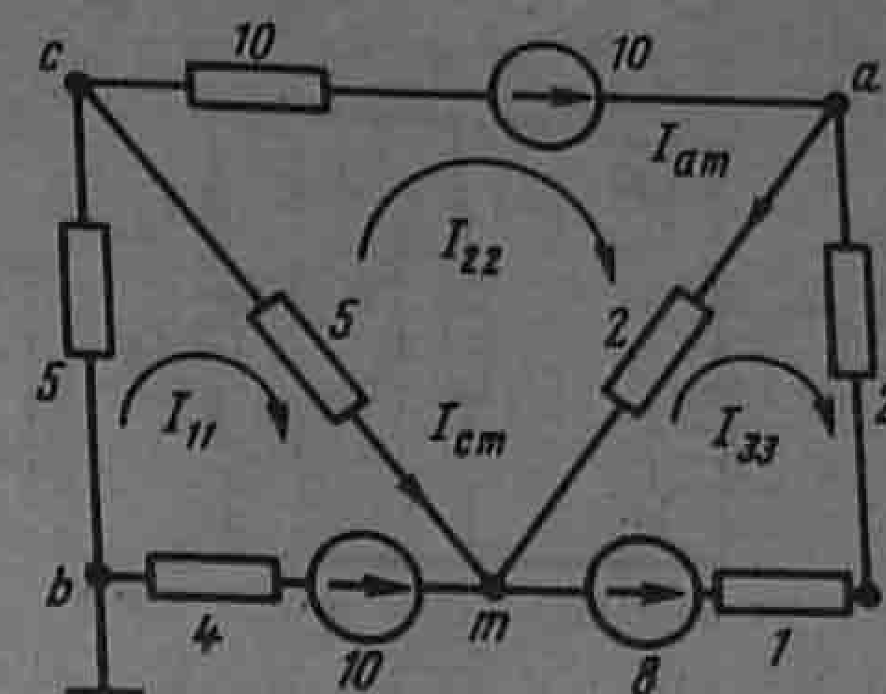



Рис. 2.13

Записываем систему уравнений:

$$\begin{aligned}14I_{11}-5I_{22}\qquad &=-10;\\-5I_{11}+17I_{22}-2I_{33}&=\ \ 10;\\-2I_{22}+5I_{33}&=\ -8.\end{aligned}$$

Определитель системы

$$\Delta=\begin{vmatrix}14&-5&0\\-5&17&-2\\0&-2&5\end{vmatrix}=1009.$$

Подсчитаем контурные токи

$$I_{11}=\frac{\begin{vmatrix}-10&-5&0\\10&17&-2\\-8&2&5\end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{-640}{1009}=-0{,}634\text{А};$$

$$I_{22}=0{,}224\text{ А};\ I_{33}=-1{,}51\text{ А}.$$

Ток в ветви $cm$ $I_{cm}=I_{11}-I_{22}=-0{,}634-0{,}224=-0{,}86$ А.

Ток в ветви $am$ $I_{am}=I_{22}-I_{33}=0{,}224+1{,}51=1{,}734$ А.

Формула (2.5) в ряде параграфов используется в качестве исходной при рассмотрении таких важных вопросов теории линейных электрических цепей, как определение входных и взаимных проводимостей ветвей, принцип взаимности, метод наложения и линейные соотношения в электрических цепях.

Составлению уравнений по методу контурных токов для схем с источниками тока присущи некоторые особенности. В этом случае полагаем, что каждая ветвь с источником тока входит в контур, замыкающийся через ветви с источниками ЭДС и сопротивлениями, и что токи в этих контурах известны и равны токам соответствующих источников тока. Уравнения составляют лишь для контуров с неизвестными контурными токами. Если для схемы рис. 2.14, *а* принять, что контурный ток $I_{11}=J$ течет согласно направлению часовой стрелки по первой и второй ветвям, а контурный ток $I_{22}=$

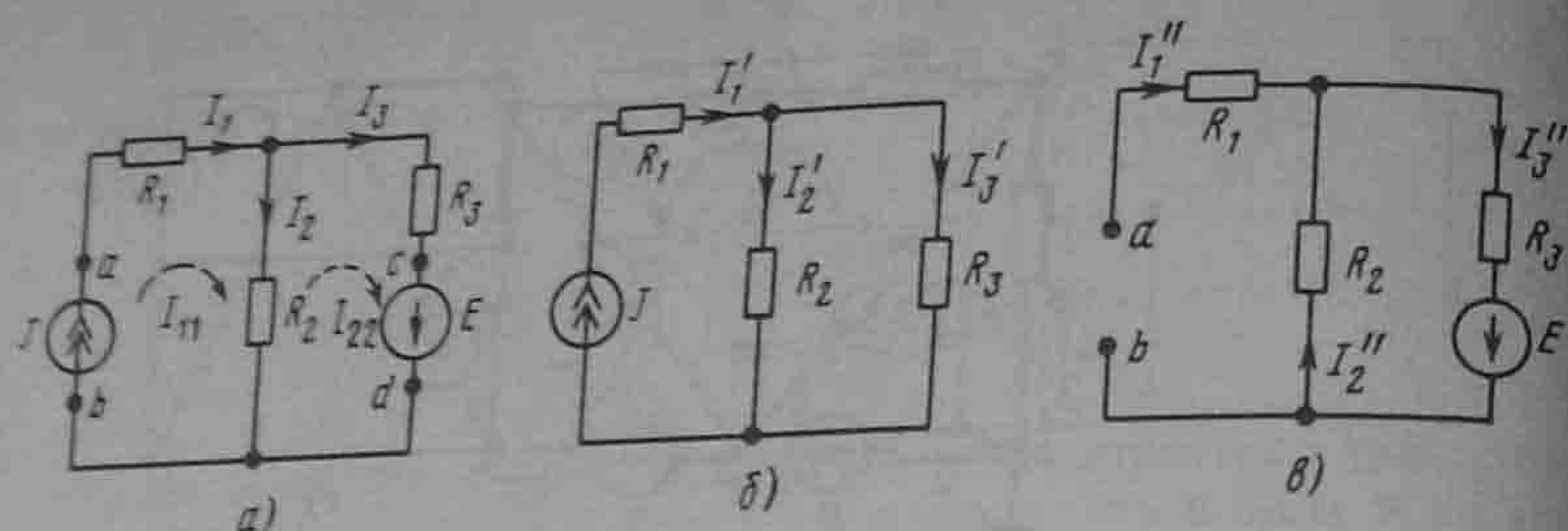



Рис. 2.14

$=I_3$ замыкается также по часовой стрелке по второй и третьей ветвям, то, согласно методу контурных токов, получим только одно уравнение с неизвестным током $I_{22}$: $(R_2 + R_3)I_{22} - R_2J = E$.

Отсюда $I_{22} = \dfrac{E + JR_2}{R_2 + R_3}$ и ток второй ветви $I_2 = I_{11} - I_{22}$.

**§ 2.14. Принцип наложения и метод наложения.** Чтобы составить общее выражение для тока в $k$-ветви сложной схемы, составим уравнения по методу контурных токов, выбрав контуры так, чтобы $k$-ветвь входила только в один $k$-контур (это всегда возможно). Тогда согласно (2.5) ток в $k$-ветви будет равен контурному току $I_{kk}$. Каждое слагаемое правой части (2.5) представляет собой ток, вызванный в $k$-ветви соответствующей контурной ЭДС. Например, $E_{11}\Delta_{k1}/\Delta$ есть составляющая тока $k$-ветви, вызванная контурной ЭДС $E_{11}$. Каждую из контурных ЭДС можно выразить через ЭДС ветвей $E_1, E_2, E_3, ..., E_k, ..., E_n$, сгруппировать коэффициенты при этих ЭДС и получить выражение следующего вида:

$$I_k = E_1 g_{k1} + E_2 g_{k2} + E_3 g_{k3} + \dots + E_k g_{kk} + E_n g_{kn}. \quad (2.7)$$

Если контуры выбраны таким образом, что какая-либо из ЭДС, например $E_m$, входит только в один $m$-контур, а в другие контуры не входит, то $g_{km} = \Delta_{km}/\Delta$.

Уравнение (2.7) выражает собой принцип наложения.

Принцип наложения формулируется следующим образом: *ток в k-ветви равен алгебраической сумме токов, вызываемых каждой из ЭДС схемы в отдельности*. Этот принцип справедлив для всех линейных электрических цепей.

Принцип наложения положен в основу метода расчета, получившего название *метода наложения*.

При расчете цепей данным методом поступают следующим образом: поочередно рассчитывают токи, возникающие от действия каждой из ЭДС, мысленно удаляя остальные из схемы, но оставляя в схеме внутренние сопротивления источников, и затем находят



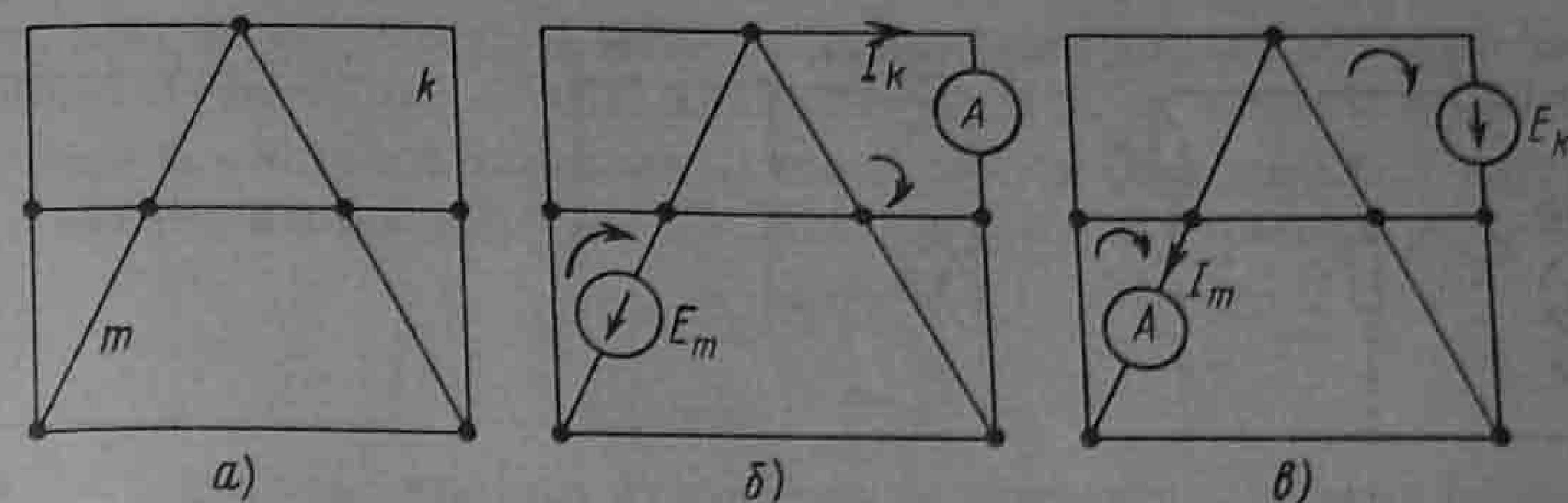



Рис. 2.15

токи в ветвях путем алгебраического сложения частичных токов. Заметим, что методом наложения нельзя пользоваться для подсчета выделяемых в сопротивлениях мощностей как суммы мощностей от частичных токов, поскольку мощность является квадратичной функцией тока ($P = RI^2$).

Если через некоторое сопротивление $R$ протекают согласно направленные частичные токи $I_1$ и $I_2$, то выделяемая в нем мощность $P = R(I_1 + I_2)^2$ и не равна сумме мощностей от частичных токов: $P \neq RI_1^2 + RI_2^2$.

**Пример 14.** Для схемы рис. 2.14, *а* методом наложения найти токи в ветвях, определить мощности, отдаваемые в схему источником тока и источником ЭДС, полагая $R_1 = 2$ Ом; $R_2 = 4$ Ом; $R_3 = 6$ Ом; $J = 5$ А; $E = 20$ В.

Решение. Положительные направления токов в ветвях принимаем в соответствии с рис. 2.14, *а*. С помощью схемы рис. 2.14, *б* (источник ЭДС удален, и зажимы *cd* закорочены) найдем токи в ветвях от действия источника тока:

$$I'_1 = J = 5\text{А};\; I'_2 = I'_1\frac{R_3}{R_2 + R_5} = 5\frac{6}{4+6} = 3\text{А};\; I'_3 = 2\text{А}.$$

Используя схему рис. 2.14, *в*, подсчитываем токи в ветвях от действия источника ЭДС (зажимы *ab* разомкнуты, так как внутреннее сопротивление источника тока равно бесконечности):

$$I''_1 = 0;\; I''_2 = I''_3 = E/(R_2 + R_3) = 2\text{А}.$$

Результирующие токи в ветвях вычислим, алгебраически суммируя соответствующие частичные токи этих двух режимов:

$$I_1 = I'_1 + I''_1 = 5 + 0 = 5\text{А};\; I_2 = I'_2 - I''_2 = 3 - 2 = 1\text{А};$$

$$I_3 = I'_3 + I''_3 = 2 + 2 = 4\text{А};\; \varphi_a = \varphi_b + I_2R_2 + I_1R_1;$$

$$U_{ab} = 1 \cdot 4 + 5 \cdot 2 = 14 \text{ В}.$$

Мощность, отдаваемая в схему источником тока, $U_{ab}J = 14 \cdot 5 = 70$ Вт. Мощность, отдаваемая в схему источником ЭДС, $EI_3 = 20 \cdot 4 = 80$ Вт.

Уравнение баланса мощности $I_1^2R_1 + I_2^2R_2 + I_3^2R_3 = U_{ab}J + EI_3$.

**§ 2.15. Входные и взаимные проводимости ветвей. Входное сопротивление.** На рис. 2.15,*а* изображена так называемая скелетная схема пассивной цепи. На ней показаны ветви и узлы. В каждой

ветви имеется сопротивление. Выделим в схеме две ветви: $m$ и $k$. Поместим в ветвь $m$ ЭДС $E_m$ (других ЭДС в схеме нет). Выберем контуры в схеме так, чтобы $k$-ветвь входила только в $k$-контур, а $m$-ветвь — только в $m$-контур. ЭДС $E_m$ вызовет токи в ветвях $k$ и $m$:

$$\left.\begin{aligned} I_k &= E_m g_{km}; \\ I_m &= E_m g_{mm} \end{aligned}\right\}. \tag{2.8}$$

Коэффициенты $g$ имеют размерность проводимости.

Коэффициент $g$ с одинаковыми индексами ($g_{mm}$) называют *входной проводимостью* ветви (ветви $m$). Он численно равен току в ветви $m$, возникшему от действия ЭДС $E_m = 1$В (единичной ЭДС): $I_m = 1 g_{mm}$.

Коэффициенты $g$ с разными индексами называют *взаимными проводимостями*. Так, $g_{km}$ есть взаимная проводимость $k$- и $m$-ветвей. Взаимная проводимость $g_{km}$ численно равна току в $k$-ветви, возникающему от действия единичной ЭДС в $m$-ветви[1].

Входные и взаимные проводимости ветвей используют при выводе общих свойств линейных электрических цепей (см. § 2.16 и 2.18) и при расчете цепей по методу наложения [см. формулу (2.7)].

Входные и взаимные проводимости могут быть определены расчетным и опытным путями.

При их расчетном определении составляют уравнения по методу контурных токов, следя за тем, чтобы ветви, взаимные и входные проводимости которых представляют интерес, входили каждая только в свой контур. Далее находят определитель системы $\Delta$ и по нему необходимые алгебраические дополнения:

$$g_{mm} = \Delta_{mm} / \Delta; \tag{2.9}$$

$$g_{km} = \Delta_{km} / \Delta. \tag{2.10}$$

По формуле (2.10) $g_{km}$ может получиться либо положительной, либо отрицательной величиной. Отрицательный знак означает, что ЭДС $E_m$, направленная согласно с контурным током в $m$-ветви, вызывает ток в $k$-ветви, не совпадающей по направлению с произвольно выбранным направлением контурного тока $I_k$ по $k$-ветви.

При опытном определении $g_{mm}$ и $g_{km}$ в $m$-ветвь схемы (рис. 2.15, *б*) включают источник ЭДС $E_m$, а в $k$-ветвь — амперметр (миллиамперметр). Поделим ток $I_k$ на ЭДС $E_m$ и найдем значение $g_{km}$. Для определения входной проводимости ветви $m(g_{mm})$ необходимо изме-

---

[1] Входные и взаимные проводимости ветвей можно определить и иначе: входная проводимость $m$-ветви — это коэффициент пропорциональности между током и ЭДС этой ветви (при отсутствии ЭДС в других ветвях схемы); взаимная проводимость ветвей $k$ и $m$ — коэффициент пропорциональности между током $k$-ветви и ЭДС $m$-ветви при отсутствии ЭДС в других ветвях схемы.



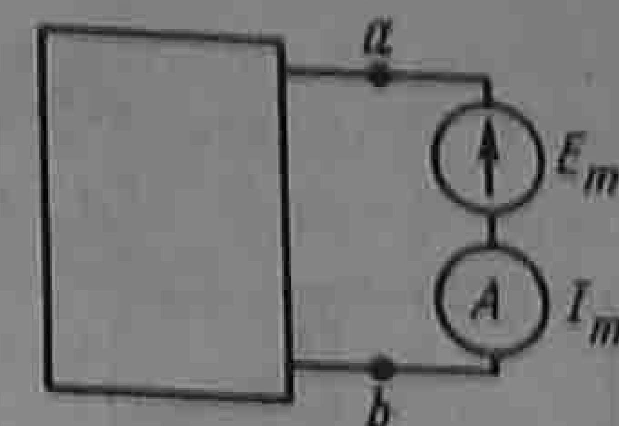



Рис. 2.16

рить ток в $m$-ветви, вызванной ЭДС $E_m$. Частное от деления тока $m$-ветви на ЭДС $m$-ветви и дает $g_{mm}$.

Выделим $m$-ветвь, обозначив всю остальную часть схемы (не содержащую ЭДС) некоторым прямоугольником (рис. 2.16). Вся схема, обозначенная прямоугольником, по отношению к зажимам $ab$ обладает некоторым сопротивлением. Его называют *входным сопротивлением*. Входное сопротивление $m$-ветви обозначим $R_{вхm}$. Тогда

$$R_{вхm} = E_m / I_m = 1 / g_{mm} = \Delta / \Delta_{mm}. \tag{2.11}$$

Таким образом, входное сопротивление $m$-ветви есть величина, обратная входной проводимости этой ветви. Его не следует смешивать с полным сопротивлением $m$-контура в методе контурных токов.

**Пример 15.** Определить входную $g_{11}$ и взаимную $g_{12}$ проводимости в схеме рис. 2.13.

Р е ш е н и е. Контуры в схеме рис. 2.13 выбраны так, что ветвь *1* (ветвь $cbm$) с источником ЭДС $E_1$ входит только в первый контур, а ветвь *2* (ветвь $ca$) с источником ЭДС $E_2$ — во второй.

Поэтому можно воспользоваться определителем системы $\Delta$ и алгебраическими дополнениями $\Delta_{11}$ и $\Delta_{12}$, составленными по данным примера 13:

$$g_{12} = \frac{\Delta_{12}}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} -5 & -2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}(-1)^{1+2}}{1009} = \frac{25}{1009} \approx 0{,}025 Ом^{-1} = 0{,}025 См,$$

$$g_{11} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 17 & -2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}(-1)^{1+1}}{1009} = \frac{81}{1009} \approx 0{,}081 Ом^{-1} = 0{,}081 См.$$

**§ 2.16. Теорема взаимности**. Теорема взаимности формулируется следующим образом: *для любой линейной цепи ток в $k$-ветви, вызванный источником ЭДС $E_m$, находящимся в $m$-ветви, $I_k = E_m g_{km}$ равен току $I_m$ в $m$-ветви, вызванному источником ЭДС $E_k$* (численно равной ЭДС $E_m$), находящимся в $k$-ветви, $I_m = E_k g_{mk}$.

Для доказательства теоремы взаимности обратимся к рис. 2.15, *а*. Как и при выводах в § 2.15, выделим две ветви схемы: ветвь $k$

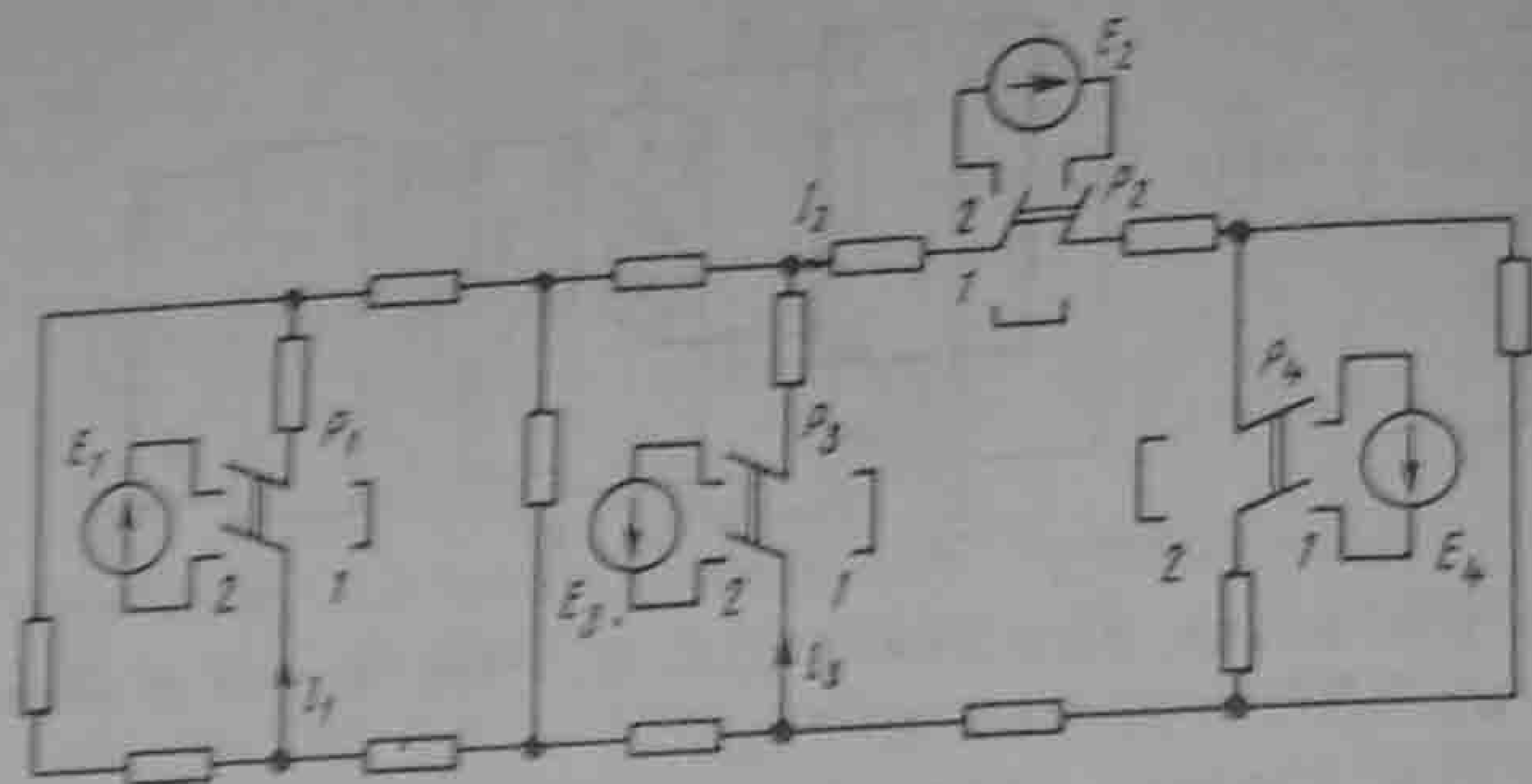



Рис. 2.17

и ветвь $m$. Включим в ветвь $m$ источник ЭДС $E_m$, в ветвь $k$ — ампер-
метр $A$[1] для измерения тока $I_k$. Пусть каждая из ветвей $k$ и $m$ входит
соответственно только в $k$- и $m$-контуры. Поэтому по методу контур-
ных токов $I_k = E_m\Delta_{km} / \Delta$. Поменяем местами источник ЭДС и ампер-
метр, т. е. источник ЭДС переместим из ветви $m$ в ветвь $k$ и назовем
теперь $E_k$, а амперметр — из ветви $k$ в ветвь $m$. В этом случае ток
$I_m = E_k\Delta_{mk} / \Delta$.

Так как $E_k = E_m$, а $\Delta_{mk} = \Delta_{km}$ в силу симметрии определителя системы $\Delta$ относительно главной диагонали (см. § 2.13), то ток $I_k$ в схеме рис. 2.15, *б* равняется току $I_m$ в схеме рис. 2.15, *в*.

При практическом использовании теоремы взаимности важно иметь в виду взаимное соответствие направлений токов и ЭДС в схемах рис. 2.15, *б*,*в*.

Так, если ЭДС $E_k$ источника ЭДС, находящегося в $k$-ветви схемы рис. 2.15, *в*, направлена согласно с контурным током $I_k$ в схеме рис. 2.15,*б*, то положительное направление отсчета для тока $I_m$ в схеме рис. 2.15, *в* будет совпадать с положительным направлением контурного тока по ветви $m$ (ЭДС $E_m$ в схеме рис. 2.15,*в* направлена по $I_m$).

Для нелинейных цепей теорема (принцип) взаимности невыполнима. Цепи, для которых не выполняется принцип взаимности, называют необратимыми.

**Пример 16.** В схеме рис. 2.17 переключатели $P_1$, $P_2$, $P_3$ и $P_4$ могут находиться в
первом или во втором положении. Если они находятся в положении $I$, то в схеме
включен только один источник ЭДС $E_4$. Под действием ЭДС $E_4$ протекают токи $I_1 =$
$=1{,}5$ А, $I_2 = 3$ А, $I_3 = 1$А. Найти ток $I_4$, если все переключатели находятся в
положении 2, полагая, что $E_1 = 20$ В, $E_2 = 40$ В, $E_3 = 50$ В, $E_4 = 10$ В.

Решение. Для определения тока $I_4$ воспользуемся принципом наложения и
принципом взаимности. Если бы в схеме был включен один источник ЭДС $E_1 = 10$ В,

[1] Амперметр включаем только для наглядности; сопротивление амперметра полагаем равным нулю.



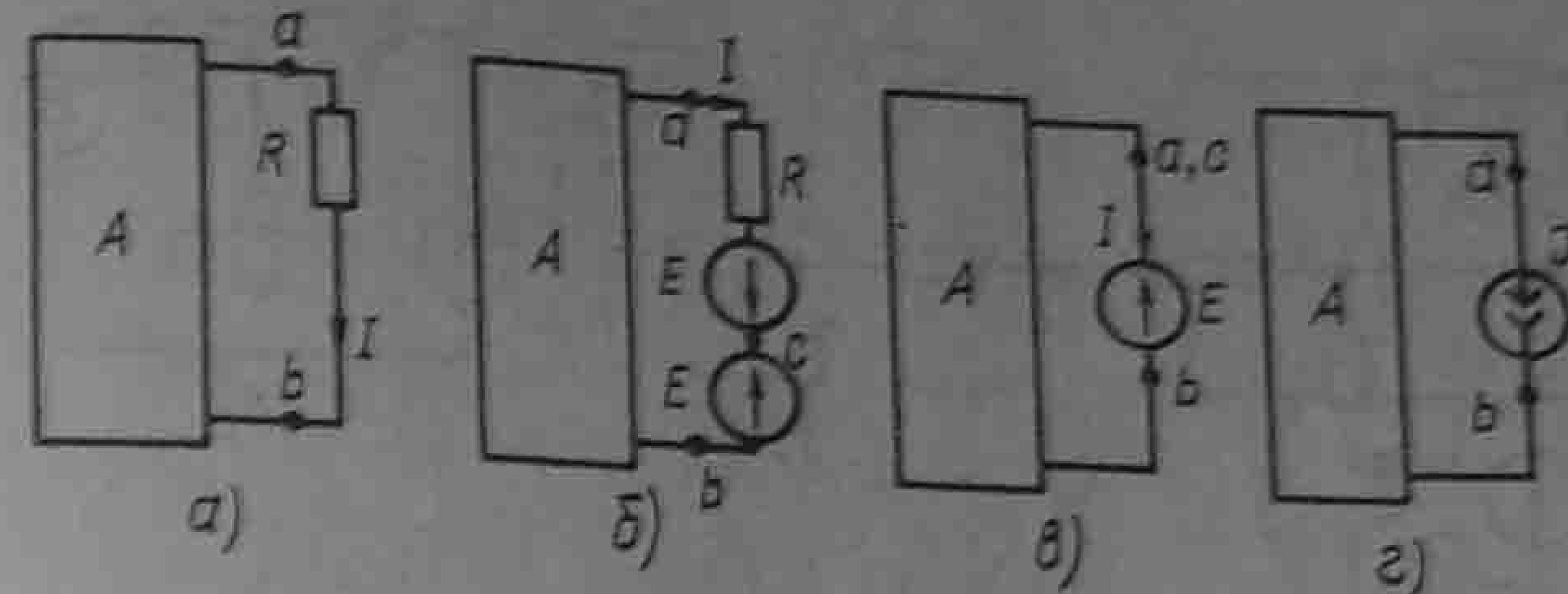



Рис. 2.18

а остальные ($E_2$ и $E_3$) отсутствовали, то в ветви 4[1] по принципу взаимности протекал бы сверху вниз ток в 1,5 А. Так как ЭДС $E_1 = 20$ В, то в ветви 4 протекает ток, равный $1{,}5 \cdot 20/10 = 3$ А. Аналогичным образом найдем токи в ветви 4 при включении источников ЭДС $E_2$ и $E_3$ и произведем алгебраическое сложение частичных токов (с учетом их направления):

$$I_4 = 1{,}5\frac{20}{10} + 3\frac{40}{10} - 1\frac{50}{10} = 10 \text{ А}.$$

**§ 2.17. Теорема компенсации.** Рассмотрим два варианта этой теоремы. В любой электрической цепи без изменения токораспределения сопротивление можно заменить: 1) источником ЭДС, ЭДС которого численно равна падению напряжения на заменяемом сопротивлении и направлена встречно току в этом сопротивлении; 2) источником тока $I$, ток которого численно равен току в этом сопротивлении и имеет то же направление, что и ток $I$.

Для доказательства теоремы компенсации выделим из схемы одну ветвь с сопротивлением $R$, по которой течет ток $I$, а всю остальную часть схемы условно обозначим прямоугольником (рис. 2.18,*а*).

Если в выделенную ветвь включить два одинаковых и противоположно направленных источника ЭДС $E$, ЭДС которых равна падению напряжения на сопротивлении $R$ под действием тока $I$ ($E = IR$; рис. 2.18,*б*), то ток $I$ в цепи от этого не изменится. Убедимся, что разность потенциалов между точками *а* и *с* в схеме рис. 2.18,*б* при этом равна нулю. Действительно,

$$\varphi_c = \varphi_a - IR + E = \varphi_a - IR + IR = \varphi_a.$$

Если $\varphi_c = \varphi_a$, то точки *а* и *с* можно объединить в одну, т. е. закоротить участок *ас* и получить схему рис. 2.18, *в*. В ней вместо сопротивления $R$ включен источник ЭДС $E$.

Схема, соответствующая второму варианту теоремы, изображена на рис. 2.18, *г*. Чтобы прийти к ней, заменим последовательно соединенные $R$ и $E$ на участке *ас* (рис. 2.18, *б*) параллельным соединением источника тока $J = E/R = I$ и сопротивления $R$. Так как

[1] Номер ветви соответствует индексу ЭДС.

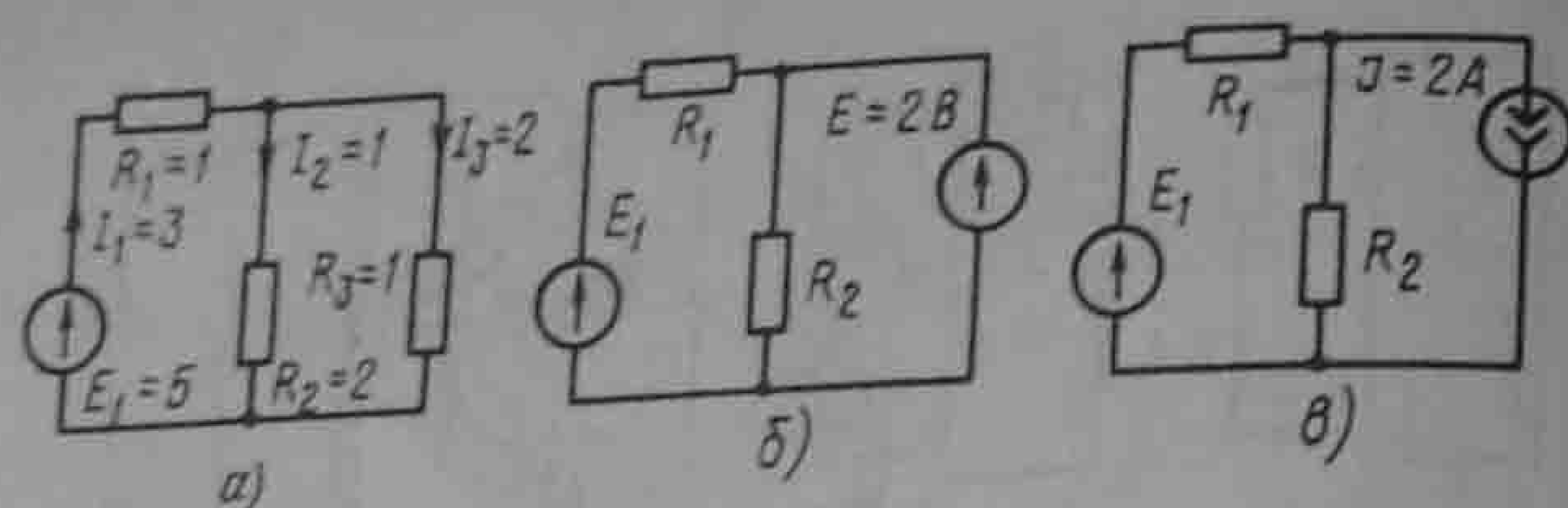



Рис. 2.19

$U_{ac} = 0$, то ток через $R$ будет отсутствовать и потому $R$ можно удалить из схемы. Если ЭДС $E$ участка $bc$ включить в состав источника тока, то получим схему рис. 2.18, *г*, где напряжение $U_{ba} = -IR$.

**Пример 17.** На схеме рис. 2.19, *а* даны значения $R$(Ом), ЭДС $E_1$ (В) и токов $I$(А). Заменить $R_3$ источником ЭДС и источником тока.

Р е ш е н и е. На рис. 2.19, *б* изображена схема с источником ЭДС $E = 2$В, а на рис. 2.19, *в* — с источником тока $J = 2$А.

**§ 2.18. Линейные соотношения в электрических цепях.** Если в линейной электрической цепи изменяется ЭДС или сопротивление в какой-либо одной ветви, то две любые величины (токи и напряжения) двух любых ветвей связаны друг с другом линейными зависимостями вида $y = a + bx$.

Функцию $x$ выполняет ток или напряжение одной ветви, функцию $y$ — ток или напряжение другой ветви.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно методу контурных токов, общее выражение для тока в $k$-ветви записывается в виде (2.7). Если в схеме изменяется только одна ЭДС, например ЭДС $E_m$, то все слагаемые в (2.7), кроме слагаемого $E_m g_{km}$, постоянны и могут быть для сокращения записи заменены некоторым слагаемым $A_k$. Следовательно,

$$I_k = A_k + E_m g_{km}. \tag{2.12}$$

Аналогично, для $p$-ветви

$$I_p = A_p + E_m g_{pm}. \tag{2.13}$$

Найдем $E_m$ из (2.13):

$$E_m = (I_p - A_p)/g_{pm}$$

и подставим в (2.12). Получим

$$I_k = a_k + b_k I_p, \tag{2.14}$$

где $a_k = A_k - A_p g_{km}$; $b_k = g_{km}/g_{pm}$.

Коэффициенты $a_k$ и $b_k$ могут быть $\lessgtr 0$. В частном случае либо $a_k$, либо $b_k$ может быть равно нулю.



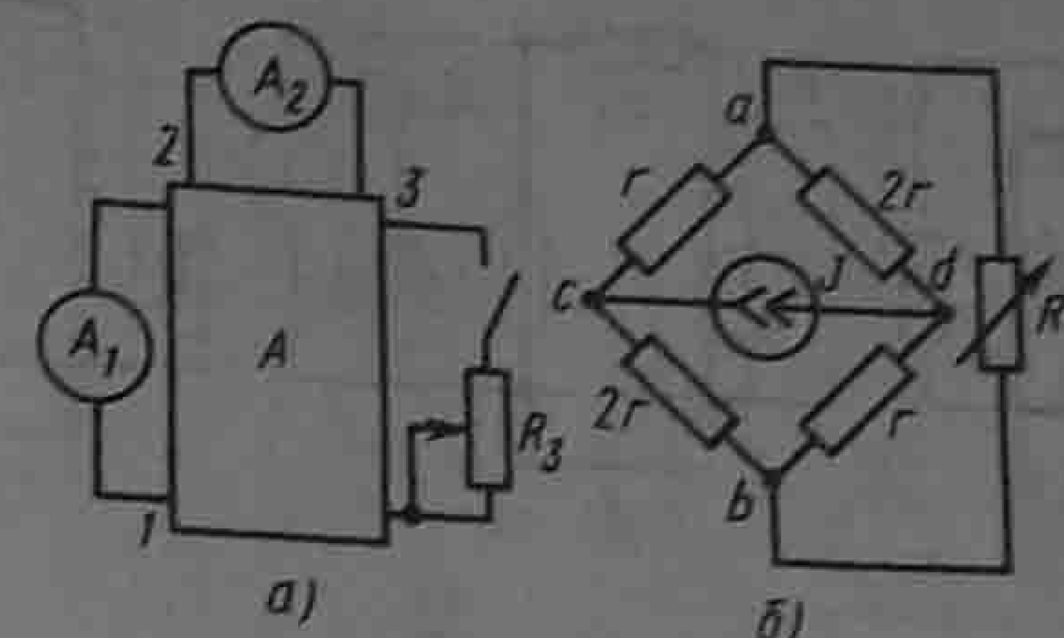



Рис. 2.20

Равенство (2.14) свидетельствует о том, что при изменении ЭДС $E_m$ токи $I_k$ и $I_p$ связаны линейной зависимостью. Из теоремы компенсации известно, что любое сопротивление можно заменить источником ЭДС. Следовательно, изменение сопротивления в $m$-ветви эквивалентно изменению ЭДС $E_m$. Таким образом, линейное соотношение между двумя любыми токами (2.14) имеет место при изменении не только ЭДС $E_m$, но и сопротивления какой-то $m$-ветви.

Если обе части (2.12) умножить на сопротивление $k$-ветви $R_k$ и проделать аналогичные выкладки, то можно убедиться в том, что напряжение $k$-ветви линейно связано с током в $p$-ветви.

Коэффициенты $a_k$ и $b_k$ из (2.14) и в других подобных выражениях могут быть найдены расчетным или опытным путем.

При опытном определении коэффициентов достаточно найти значения двух токов (соответственно напряжений) при двух различных режимах работы схемы и затем решить систему из двух уравнений с двумя неизвестными. Пусть, например, в первом опыте $I_k = I_{k1}$ и $I_p = I_{p1}$, а во втором $I_k = I_{k2}$ и $I_p = I_{p2}$. Тогда

$$I_{k1} = a_k + b_k I_{p1}; \qquad I_{k2} = a_k + b_k I_{p2},$$

$$a_k = \frac{I_{k2} - \frac{I_{p2}}{I_{p1}} I_{k1}}{1 - I_{p2}/I_{p1}}; \qquad b_k = \frac{I_{k1} - a_k}{I_{p1}}.$$

Если в схеме одновременно изменяются ЭДС или сопротивления в каких-либо двух ветвях, то любые три величины в этой схеме (токи, напряжения) связаны друг с другом линейным соотношением вида $y = a + bx + cz$.

Доказательство этого соотношения проводится аналогично приведенному ранее.

**Пример 18.** На рис. 2.20, *а* изображена схема, в которой выделены три ветви. В ветви *1* включен амперметр $A_1$, в ветви *2* — амперметр $A_2$. В ветви *3* имеются ключ $K$ и сопротивление $R_3$. Если $K$ разомкнут, то амперметр $A_1$ показывает 1 А, амперметр $A_2$ — 5 А. При замкнутом ключе амперметр $A_1$ показывает 2 А, а амперметр $A_2$ — 4 А. При замкнутом ключе сопротивление $R_3$ изменили так, что показание амперметра $A_2$ стало 4,5 А. Каково показание амперметра $A_1$ в этом режиме?

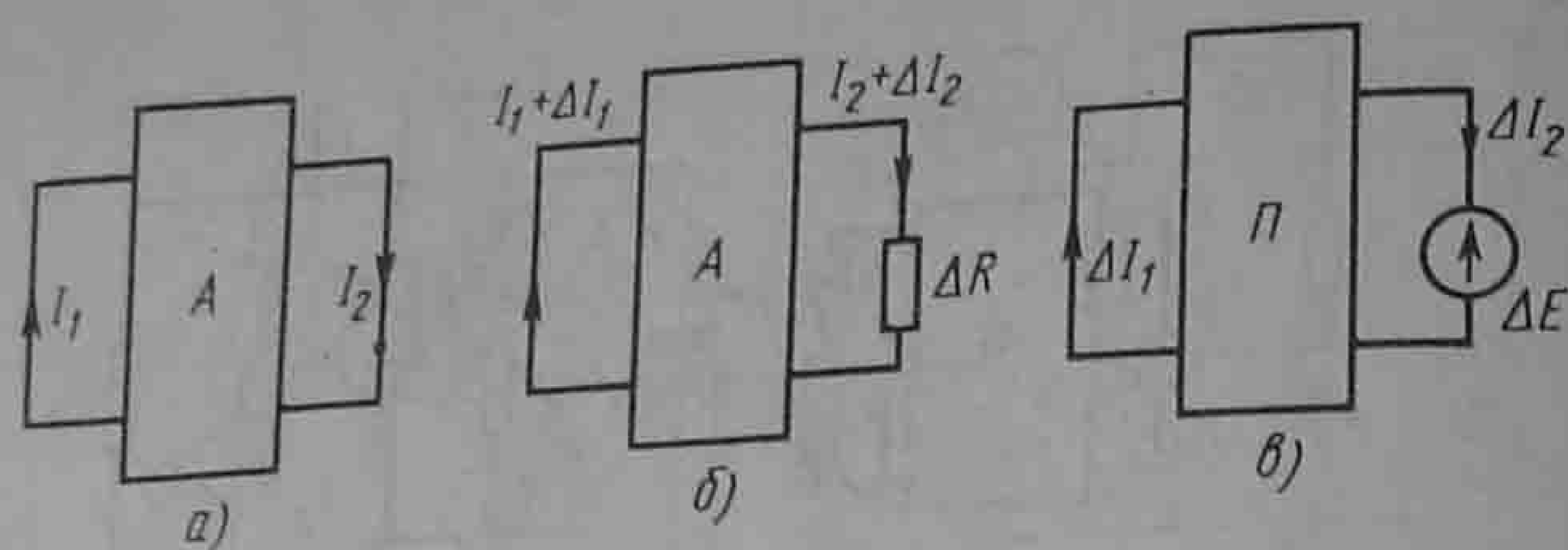



Рис. 2.21

Решение. Выразим $I_1$ через $I_2$: $I_1 = a + bI_2$. Составим уравнение для определения $a$ и $b$:

$$1 = a + 5b; 2 = a + 4b.$$

Отсюда $a = 6$ и $b = -1$. При $I_2 = 4{,}5$ А; $I_1 = 6 - 4{,}5 \cdot 1 = 1{,}5$ А.

**Пример 19.** В схеме рис. 2.20, *б* сопротивление $R$ изменяется от нуля до бесконечности. Вывести зависимость напряжения $U_{cd}$ от напряжения $U_{ab}$.

Решение. При разомкнутой ветви $ab$ $U_{cd} = \frac{3}{2}rJ$ и $U_{ab} = \frac{rJ}{2}$. При коротком замыкании ветви $ab$ $U_{cd} = \frac{3}{4}rJ$ и $U_{ab} = 0$. Отсюда $a = \frac{4}{3}rJ$ и $b = \frac{1}{3}$. Следовательно, $U_{cd} = \frac{4}{3}rJ + \frac{1}{3}U_{ab}$.

**§ 2.19. Изменения токов ветвей, вызванные приращением сопротивления одной ветви (теорема вариаций).** На рис. 2.21, *а* выделим ветви *1* и *2* с токами $I_1$ и $I_2$, заключив остальную часть схемы вместе с источниками энергии в прямоугольник $A$ (активный); проводимости $g_{12}$ и $g_{22}$ полагаем известными. Пусть сопротивление ветви *2* изменилось на $\Delta R$ (рис. 2.21, *б*), в результате чего токи стали $I_1 + \Delta I_1$ и $I_2 + \Delta I_2$. В соответствии с теоремой компенсации заменим $\Delta R$ на ЭДС $\Delta E = \Delta R(I_2 + \Delta I_2)$, направленную встречно току $I_2$. На основании принципа наложения можно сказать, что приращения токов $\Delta I_1$ и $\Delta I_2$ вызваны ЭДС $\Delta E$ в схеме рис. 2.21, *в*, в которой часть схемы, заключенная в прямоугольник, стала пассивной (буква $П$). Так как схема внутренних соединений и значения сопротивлений в схеме прямоугольника остались без изменений, то проводимости $g_{12}$ и $g_{22}$ в схеме рис. 2.21, *в* имеют те же значения, что и в схеме рис. 2.21, *а*. Для схемы рис. 2.21, *в* имеем:

$$\Delta I_1 = -\Delta E g_{12} = -g_{12}\Delta R(I_2 + \Delta I_2);$$

$$\Delta I_2 = -\Delta E g_{22} = -g_{22}\Delta R(I_2 + \Delta I_2).$$

Знаки минус поставлены потому, что ЭДС $\Delta E_2$ направлена встречно току $I_2$.



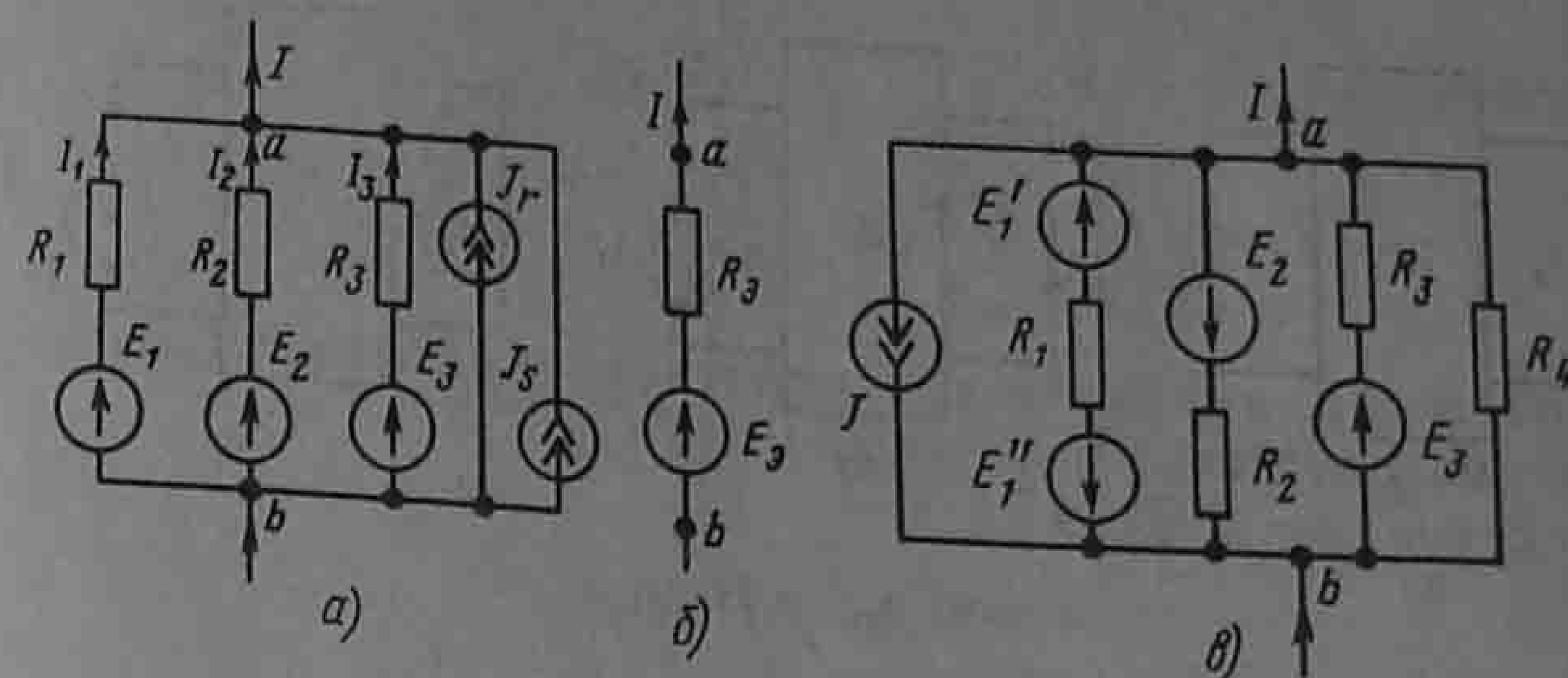



Рис. 2.22

Отсюда

$$\Delta I_2 = -\frac{g_{22}\Delta R I_2}{1 + \Delta R g_{22}}; \Delta I_1 = -\frac{g_{12}\Delta R I_2}{1 + \Delta R g_{22}}. \tag{2.15}$$

Соотношения (2.15) позволяют определить изменение токов в ветвях *1* и *2*, вызванные изменением сопротивления в ветви *2*.

**Пример 20.** В схеме рис. 2.21 $g_{22} = 5/26$ См, $g_{12} = 3/26$ См. Токи $I_1 = 7$ А, $I_2 = 3$ А. Определить токи $I_1$ и $I_2$ после того, как сопротивление второй ветви возросло на $\Delta R = 1$ Ом.

Решение. По формулам (2.15), $\Delta I_1 = -0{,}29$ А, $\Delta I_2 = -0{,}483$ А:

$$I_1' = I_1 + \Delta I_1 = 6{,}71 \text{ А}, I_2' = I_2 + \Delta I_2 = 2{,}517 \text{ А}.$$

**§ 2.20. Замена нескольких параллельных ветвей, содержащих источники ЭДС и источники тока, одной эквивалентной.** Расчет сложных схем упрощается при замене нескольких параллельно включенных ветвей, содержащих источники ЭДС, источники тока и сопротивления, одной эквивалентной ветвью.

Участок цепи рис. 2.22, *б* эквивалентен участку цепи рис. 2.22, *а*, если при любых значениях тока $I$, подтекающего из всей остальной, не показанной на рисунке части схемы, напряжение на зажимах $a$ и $b$ ($U_{ab}$) в обеих схемах одинаково. Для того чтобы выяснить, чему равняются $R_э$ и $E_э$, составим уравнения для обеих схем.

Для схемы рис. 2.22, *а*

$$I_1 + I_2 + I_3 + J_r + J_s = I,$$

но

$$I_1 = (E_1 - U_{ab})/R_1 = (E_1 - U_{ab})g_1;$$

$$I_2 = (E_2 - U_{ab})g_2; \tag{2.16}$$

..................................

$$I_n = (E_n - U_{ab})g_n.$$

Следовательно,

$$I=\sum_{k=1}^{n} I_k=\sum_{k=1}^{n}E_k g_k+\sum_{k=1}^{q}J_k-U_{ab}\sum_{k=1}^{n}g_k, \qquad (2.16а)$$

где $n$ — число параллельных ветвей с источниками ЭДС; $q$ — число параллельных ветвей с источниками тока.

Для схемы рис. 2.22, *б*

$$I=E_э g_э-U_{ab}g_э, \qquad (2.17)$$

где $g_э=1/R_э$.

Равенство токов $I$ в схемах рис. 2.22, *а*, *б* должно иметь место при любых значениях $U_{ab}$, а это возможно только в том случае, когда коэффициент при $U_{ab}$ (2.17) равен коэффициенту при $U_{ab}$ в (2.16а).

Следовательно,

$$g_э=\sum_{k=1}^{n} g_k. \qquad (2.18)$$

Если слагаемые с $U_{ab}$ в (2.16а) и (2.17) равны и токи $I$ по условию эквивалентности двух схем также равны, то

$$\sum_{k=1}^{n}E_k g_k+\sum_{k=1}^{q}J_k=E_э g_э,$$

откуда

$$E_э=\frac{\sum_{k=1}^{n}E_k g_k+\sum_{k=1}^{q}J_k}{\sum_{k=1}^{n}g_k}. \qquad (2.19)$$

Формула (2.18) дает возможность найти проводимость $g_э$ и по ней $R_э$ в схеме рис. 2.22, *б*. Из этой формулы видно, что проводимость $g_э$ не зависит от того, есть в ветвях схемы рис. 2.22, *а* ЭДС или нет.

При подсчетах по формуле (2.19) следует иметь в виду следующее: 1) если в какой-либо ветви схемы ЭДС отсутствует, то соответствующее слагаемое в числителе (2.19) выпадает, но проводимость этой ветви в знаменателе (2.19) остается; 2) если какая-либо ЭДС в исходной схеме имеет направление, обратное изображенному на рис. 2.22, *а*, то соответствующее слагаемое войдет в числитель формулы (2.19) со знаком минус.

Ветви схемы рис. 2.22, *а*, *б* эквивалентны только в смысле поведения их по отношению ко всей остальной части схемы, не показанной на рисунке, но они не эквивалентны в отношении мощности,



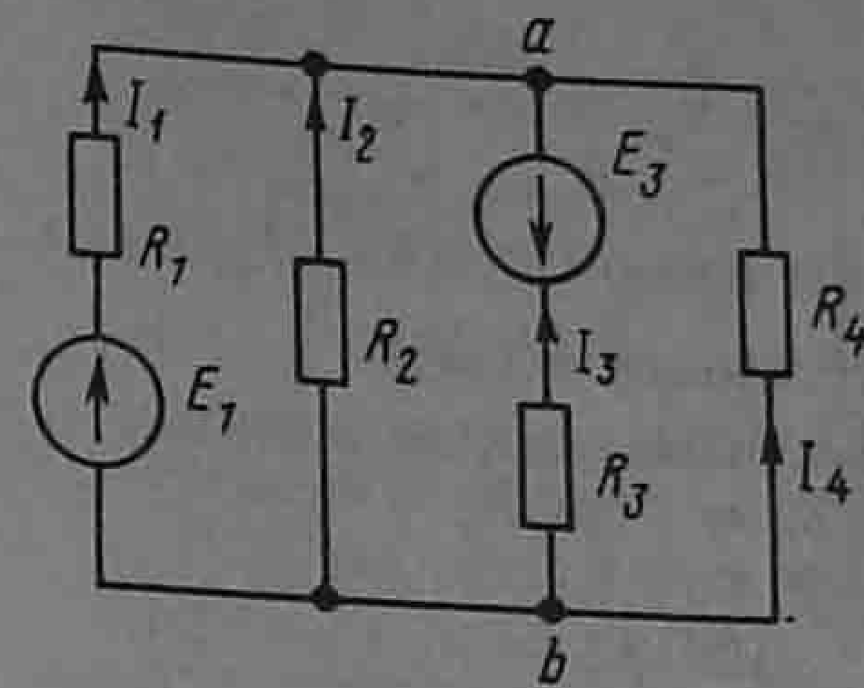



Рис. 2.23

выделяющейся в них. Качественно поясним это. В ветвях схемы рис. 2.22, *а* токи могут протекать даже при $I=0$, тогда как в ветви *ab* рис. 2.22, *б* при $I=0$ ток и потребление энергии отсутствуют.

**Пример 21.** Заменить параллельные ветви рис. 2.22, *в* одной эквивалентной. Дано: $E_1'=10$ В; $E_1''=30$ В; $E_2=40$ В; $E_3=60$ В; $R_1=2$ Ом; $R_2=4$ Ом; $R_3=1$ Ом; $R_4=5$ Ом; $J=6$ А.

Р е ш е н и е. Находим:

$$g_1=0{,}5 \text{ См};\ g_2=0{,}25 \text{ См};\ g_3=1 \text{ См};\ g_4=0{,}2 \text{ См};$$

$$R_э=\frac{1}{\sum_{k=1}^{4}g_k}=\frac{1}{0{,}5+0{,}25+1+0{,}2}=0{,}513 \text{ См};$$

$$E_э=\frac{\sum_{k=1}^{4}E_k g_k-J}{\sum g_k}=\frac{(10-30)0{,}5-40\cdot 0{,}25+60\cdot 1-6}{1{,}95}=18{,}4 \text{ В},$$

Таким образом, для эквивалентной ветви рис. 2.22, *б* $R_э=0{,}513$ Ом; $E_э=18{,}4$ В.

**§ 2.21. Метод двух узлов.** Часто встречаются схемы, содержащие всего два узла; на рис. 2.23 изображена одна из таких схем. Наиболее рациональным методом расчета токов в них является метод двух узлов.

Под *методом двух узлов* понимают метод расчета электрических цепей, в котором за искомое (с его помощью определяют затем токи ветвей) принимают напряжение между двумя узлами схемы.

Расчетные формулы этого метода получают на основе формул (2.16а) и (2.16); их также можно просто получить из более общего метода — метода узловых потенциалов (см. § 2.22).

В отличие от схемы рис. 2.21, *а* ток $I$ к узлам *a* и *b* схемы рис. 2.23 не подтекает. Поэтому если в формуле (2.16а) принять $I=0$, то из нее может быть найдено напряжение между двумя узлами:

$$U_{ab}=\frac{\Sigma E_k g_k+\Sigma J_k}{\Sigma g_k}. \qquad (2.20)$$

После определения напряжения $U_{ab}$ находят ток в любой ($n$-й) ветви по формуле $I_n=(E_n-U_{ab})g_n$.

**Пример 22.** Найти токи в схеме рис. 2.23, и сделать проверку баланса мощности, если $E=120$ В, $E_3=50$ В, $R_1=2$ Ом, $R_2=4$ Ом, $R_3=1$ Ом, $R_4=10$ Ом.

Р е ш е н и е. Определим токи в схеме рис. 2.23:

$$U_{ab}=\frac{120\cdot 0{,}5-50\cdot 1}{0{,}5+0{,}25+1+0{,}1}=\frac{10}{1{,}85}=5{,}4\ \text{В};$$

$$I_1=(E_1-U_{ab})/R_1=(120-5{,}4)/2=57{,}3\ \text{А};$$

$$I_2=(E_2-U_{ab})/R_2=(0-5{,}4)/4=-1{,}35\ \text{А};$$

$$I_3=-55{,}4\ \text{А};\ I_4=-0{,}54\ \text{А}.$$

В схеме потребляется мощность

$$I_1^2R_1+I_2^2R_2+I_3^2R_3+I_4^2R_4=57{,}3^2\cdot 2+1{,}35^2\cdot 4+55{,}4^2\cdot 1+0{,}54^2\cdot 10=9647\ \text{Вт}.$$

Источники ЭДС доставляют мощность $E_1I_1-E_3I_3=120\cdot 57{,}3+50\cdot 55{,}4=9647$ Вт.

**§ 2.22. Метод узловых потенциалов.** Ток в любой ветви схемы можно найти по закону Ома для участка цепи, содержащего ЭДС. Для того чтобы можно было применить закон Ома, необходимо знать потенциалы узлов схемы. Метод расчета электрических цепей, в котором за неизвестные принимают потенциалы узлов схемы, называют *методом узловых потенциалов*.

Допустим, что в схеме $n$ узлов. Так как любая (одна) точка схемы может быть заземлена без изменения токораспределения в ней, один из узлов схемы можно мысленно заземлить, т. е. принять потенциал его равным нулю. При этом число неизвестных уменьшается с $n$ до $n-1$.

Число неизвестных в методе узловых потенциалов равно числу уравнений, которые необходимо составить для схемы по первому закону Кирхгофа. В том случае, когда число узлов без единицы меньше числа независимых контуров в схеме, данный метод является более экономным, чем метод контурных токов.

Обратимся к схеме рис. 2.24, которая имеет довольно большое число ветвей (11) и сравнительно небольшое число узлов (4). Если узел *4* мысленно заземлить, т. е. принять $\varphi_4=0$, то необходимо определить потенциалы только трех узлов: $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\varphi_3$. Для единообразия в обозначениях условимся в § 2.22 токи писать с двумя индексами: первый индекс соответствует номеру узла, от которого ток утекает, второй индекс — номеру узла, к которому ток подтекает. Проводимости ветвей также будут снабжаться двумя индексами. Необходимо заметить, что эти проводимости не имеют ничего общего



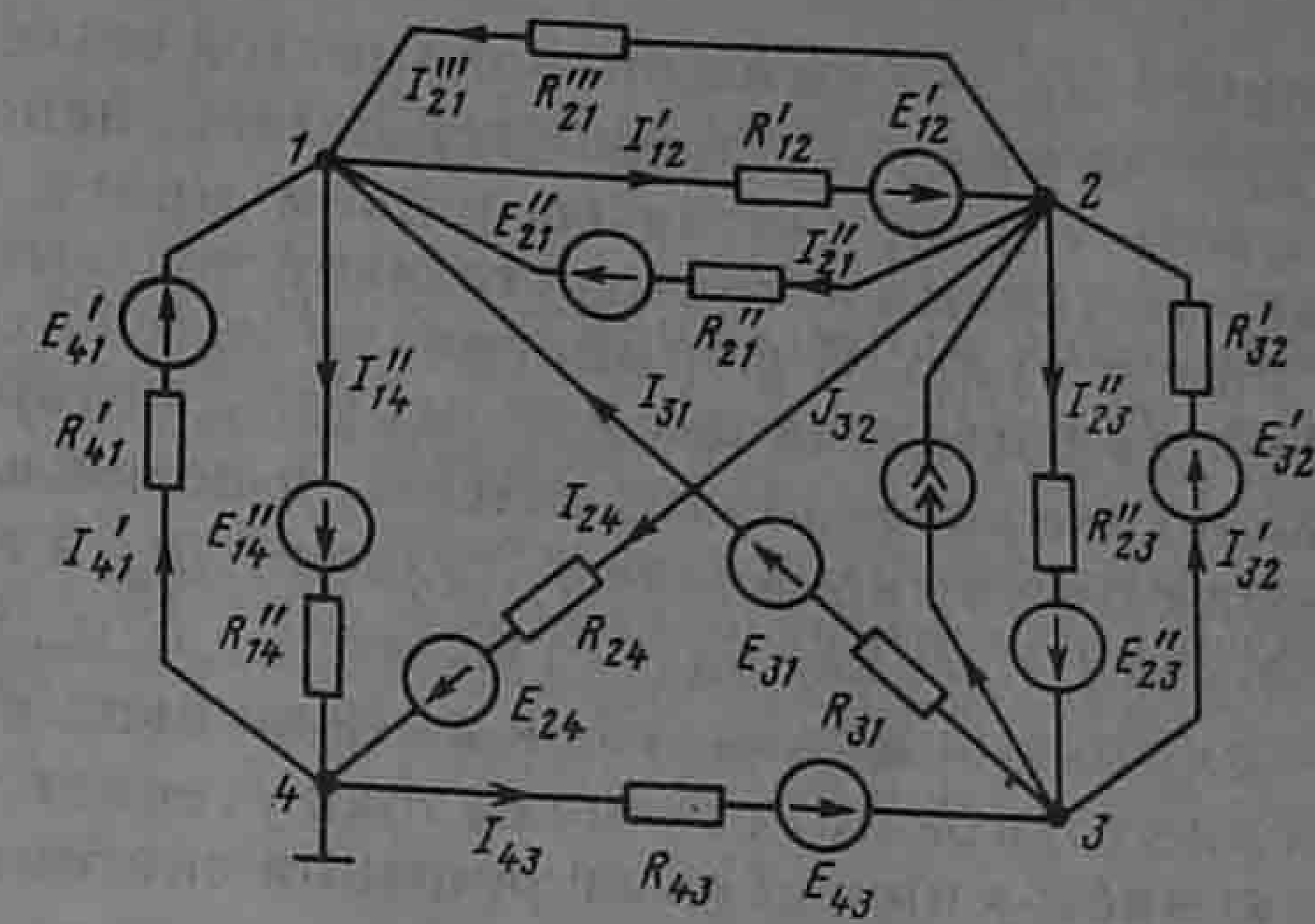



Рис. 2.24

с входными и взаимными проводимостями ветвей, которые рассматривались в § 2.15.

В соответствии с обозначениями токов на рис. 2.24 составим уравнение по первому закону Кирхгофа для первого узла:

$$I_{41}'-I_{14}''+I_{21}'''-I_{12}'+I_{21}''+I_{31}=0,$$

или

$$[E_{41}'-(\varphi_1-\varphi_4)]g_{41}'-[E_{14}''-(\varphi_4-\varphi_1)]g_{11}''+[0-(\varphi_1-\varphi_2)]\times$$
$$\times g_{12}'''-[E_{12}'-(\varphi_2-\varphi_1)]g_{12}'+$$
$$+[E_{21}''-(\varphi_1-\varphi_2)]g_{12}''+[E_{31}-(\varphi_1-\varphi_3)]g_{13}=0.$$

Перепишем последнее уравнение следующим образом:

$$\varphi_1G_{11}+\varphi_2G_{12}+\varphi_3G_{13}=J_{11}, \qquad (2.21)$$

где

$$G_{11}=g_{41}'+g_{13}+g_{12}''+g_{41}''+g_{12}'+g_{12}''';$$

$$G_{12}=-(g_{12}'+g_{12}'''+g_{12}'');\ G_{13}=-g_{13};$$

$$J_{11}=E_{41}'g_{41}'+E_{31}g_{31}+E_{21}''g_{21}''-E_{14}''g_{41}''-E_{12}'g_{12}'.$$

Подобные же уравнения могут быть записаны и для остальных узлов схемы. Если схема имеет $n$ узлов, то ей соответствует система из $n-1$ уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&\varphi_1G_{11}+\varphi_2G_{12}+\ldots+\varphi_{n-1}G_{1,n-1}=J_{11};\\
&\varphi_1G_{21}+\varphi_2G_{22}+\ldots+\varphi_{n-1}G_{2,n-1}=J_{22};\\
&\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\\
&\varphi_1G_{n-1,1}+\varphi_2G_{n-1,2}+\ldots+\varphi_{n-1}G_{n-1,n-1}=J_{n-1,n-1}.
\end{aligned}\right\} \qquad (2.22)$$

В общем случае $G_{kk}$ — сумма проводимостей ветвей, сходящихся в узле $k$; $G_{km}$ — сумма проводимостей ветвей, непосредственно соединяющих узлы $k$ и $m$, взятая со знаком минус. Если между какими-либо двумя узлами ветвь отсутствует, то соответствующая проводимость равна нулю. В формировании узлового тока $k$-узла $J_{kk}$ участвуют те ветви, подходящие к этому узлу, которые содержат источники ЭДС и (или) тока. Если ЭДС $E_p$ $p$-ветви направлены к $k$-узлу, то ее вклад в формирование $J_{kk}$ равен $E_p g_p$, а если эта ЭДС направлена от $k$-узла, то ее вклад составляет $-E_p g_p$. Если к $k$-узлу подтекает ток от источника тока, то он должен быть введен в $J_{kk}$ со знаком плюс, если этот ток от источника тока утекает, то он должен входить в $J_{kk}$ со знаком минус. После решения системы (2.22) относительно потенциалов определяют токи в ветвях по закону Ома для участка цепи, содержащего ЭДС.

В том случае, когда в схеме имеются два узла, соединенных ветвью, в которой имеется ЭДС, а сопротивление ее равно нулю, перед составлением системы уравнений по методу узловых потенциалов один из этих узлов рекомендуется устранить в соответствии с приемом, рассмотренным в § 2.24.

Система уравнений (2.22) может быть представлена в матричной форме записи:

$$[G][\varphi] = [J_{kk}], \qquad (2.22а)$$

$$[G] = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \dots G_{1,n-1} \\ G_{21} & G_{22} & \dots G_{2,n-1} \\ \dots & \dots & \dots \dots \\ \dots & \dots & \dots \dots \\ G_{n-1,1} & G_{n-1,2} & \dots G_{n-1,n-1} \end{bmatrix}; \quad [\varphi] = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ . \\ . \\ . \\ \varphi_{n-1} \end{bmatrix};$$

$$[J_{kk}] = \begin{bmatrix} J_{11} \\ J_{22} \\ . \\ . \\ . \\ J_{n-1,n-1} \end{bmatrix}.$$

Ее решение

$$[\varphi] = [G]^{-1}[J_{kk}]. \qquad (2.22б)$$

Еще Максвеллом было установлено, что распределение токов в электрических цепях всегда происходит так, что тепловая функция системы

$$P = \frac{1}{2} \sum_{N=1,2,3\dots} \sum_{m=1,2,3\dots} [E_{Nm} - (\varphi_N - \varphi_m)]^2 g_{Nm}$$

минимальна. Коэффициент 1/2 обусловлен тем, что при двойном суммировании мощность каждой ветви учитывается дважды. Доказательство основано на том, что совокупность уравнений (2.22) является совокупностью условий минимума функции $P$,



т. е. совокупностью условий $\frac{1}{2}\frac{\partial P}{\partial \varphi_1} = 0, \frac{1}{2}\frac{\partial P}{\partial \varphi_2} = 0$ и т. д. Так как вторые производные $\frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial \varphi_1^2} = G_{11} > 0, \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial \varphi_2^2} = G_{22} > 0$ положительны, то это и является доказательством минимума тепловой функции $P$.

**Пример 23.** Найти токи в ветвях схемы рис. 2.24 и сделать проверку по второму закону Кирхгофа. Дано: $E_{41}' = 10$ В; $E_{14}'' = 6$ В; $E_{12}'' = 20$ В; $E_{21}'' = 30$ В; $E_{31} = 14$ В; $E_{24} = 10$ В; $E_{43} = 8$ В; $E_{23}'' = 12$ В; $E_{32}' = 7$ В; $R_{41}' = 1$ Ом; $R_{14}'' = 2$ Ом; $R_{12}' = 10$ Ом; $R_{21}''' = 5$ Ом; $R_{31} = 2$ Ом; $R_{24} = 4$ Ом; $R_{34} = 2$ Ом; $R_{23}'' = 4$ Ом; $R_{32}' = 2$ Ом. Источник тока, включенный между узлами 3 и 2, дает ток $J_{32} = 1,5$ А.

Решение. Записываем систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1 G_{11} + \varphi_2 G_{12} + \varphi_3 G_{13} = J_{11}; \\ \varphi_1 G_{21} + \varphi_2 G_{22} + \varphi_3 G_{23} = J_{22}; \\ \varphi_1 G_{31} + \varphi_2 G_{32} + \varphi_3 G_{33} = J_{33}. \end{aligned}\right\}$$

Подсчитываем проводимости:

$$G_{11} = \frac{1}{R_{41}'} + \frac{1}{R_{14}''} + \frac{1}{R_{12}'} + \frac{1}{R_{21}''} + \frac{1}{R_{21}'''} + \frac{1}{R_{31}} = 2,4 \text{ См};$$

$$G_{22} = \frac{1}{R_{12}'} + \frac{1}{R_{21}''} + \frac{1}{R_{21}'''} + \frac{1}{R_{24}} + \frac{1}{R_{32}'} + \frac{1}{R_{23}''} = 1,4 \text{ См};$$

$$G_{33} = \frac{1}{R_{32}'} + \frac{1}{R_{23}''} + \frac{1}{R_{31}} + \frac{1}{R_{43}} = 1,75 \text{ См};$$

$$G_{12} = G_{21} = -\left(\frac{1}{R_{21}'''} + \frac{1}{R_{12}'} + \frac{1}{R_{21}''}\right) = -0,4 \text{ См};$$

$$G_{13} = G_{31} = -\frac{1}{R_{31}} = -0,5 \text{ См};$$

$$G_{23} = G_{32} = -(0,25 + 0,5) = -0,75 \text{ См}.$$

При подсчете $G_{22}$, $G_{33}$ и $G_{23}$ учтено, что проводимость ветви с источником тока равна нулю (сопротивление источника тока равно бесконечности).

Узловые токи:

$$J_{11} = \frac{E_{41}'}{R_{41}'} - \frac{E_{14}''}{R_{14}''} + \frac{E_{31}}{R_{31}} - \frac{E_{12}'}{R_{12}'} + \frac{E_{21}''}{R_{21}''} = 15 \text{ А};$$

$$J_{22} = \frac{E_{32}'}{R_{32}'} - \frac{E_{23}''}{R_{23}''} + \frac{E_{12}'}{R_{12}'} - \frac{E_{21}''}{R_{21}''} - \frac{E_{24}}{R_{24}} + J_{32} = -1,5 \text{ А};$$

$$J_{33} = -3,5 + 3 - 7 + 4 - 1,5 = -5 \text{ А}.$$

Система уравнений

$$2,4\varphi_1 - 0,4\varphi_2 - 0,5\varphi_3 = 15;$$

$$-0,4\varphi_1 + 1,4\varphi_2 - 0,75\varphi_3 = -1,5;$$

$$-0,5\varphi_1 - 0,75\varphi_2 + 1,75\varphi_3 = -5$$

имеет решение $\varphi_1 = 6$ В; $\varphi_2 = 0,06$ В; $\varphi_3 = -1,07$ В.

Заключительный этап расчета состоит в подсчете токов по закону Ома. Перед определением токов в ветвях схемы следует эти токи обозначить и выбрать для них положительные направления:

$$I_{41}' = \frac{E_{41}' - (\varphi_1 - \varphi_4)}{R_{41}'} = \frac{10 - (6 - 0)}{1} = 4 \text{ A};$$

$$I_{21}''' = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{R_{21}'''} = -1{,}185 \text{ A};$$

$$I_{32}' = \frac{\varphi_3 - \varphi_2 + E_{32}'}{R_{32}'} = 2{,}92 \text{ A}; I_{43} = \frac{\varphi_4 - \varphi_3 + E_{43}}{R_{43}} \approx 4{,}55 \text{ A и т. д.}$$

Сделаем проверку решения по второму закону Кирхгофа для периферийного контура.

Алгебраическая сумма падений напряжений $4 \cdot 1 + 1{,}185 \cdot 5 - 2{,}92 \cdot 2 - 4{,}55 \cdot 2 \approx -5$ В.

Алгебраическая сумма ЭДС $10 - 7 - 8 = -5$ В.

Покажем, что основная формула (2.20) метода двух узлов получается как частный случай (2.22). Действительно, если один узел схемы (рис. 2.23), например узел $b$, заземлить, то остается найти только один потенциал $\varphi_a = U_{ab}$. Для получения формулы (2.20) из (2.22) следует положить $\varphi_1 = \varphi_a = U_{ab}$; $\varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_4 = \ldots = 0$.

**§ 2.23. Преобразование звезды в треугольник и треугольника в звезду.** Соединение трех сопротивлений, имеющее вид трехлучевой звезды (рис. 2.25), называют *звездой*, а соединение трех сопротивлений так, что они образуют собой стороны треугольника (рис. 2.26), — *треугольником*. В узлах *1, 2, 3* (потенциалы их $\varphi_1$, $\varphi_2$ и $\varphi_3$) треугольник и звезда соединяются с остальной частью схемы (не показанной на рисунках).

Обозначим токи, подтекающие к узлам *1, 2, 3*, через $I_1$, $I_2$ и $I_3$.

Часто при подсчете электрических цепей оказывается полезным преобразовать треугольник в звезду или, наоборот, звезду в треугольник. Практически чаще бывает необходимо преобразовывать треугольник в звезду. Если преобразование выполнить таким образом, что при одинаковых значениях потенциалов одноименных точек треугольника и звезды подтекающие к этим точкам токи одинаковы, то вся внешняя схема «не заметит» произведенной замены. Выведем формулы преобразований. С этой целью выразим токи $I_1$, $I_2$ и $I_3$ в звезде и в треугольнике через разности потенциалов точек и соответствующие проводимости.

Для звезды

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0, \tag{2.23}$$

но

$$I_1 = (\varphi_1 - \varphi_0)g_1; \; I_2 = (\varphi_2 - \varphi_0)g_2; \; I_3 = (\varphi_3 - \varphi_0)g_3. \tag{2.24}$$



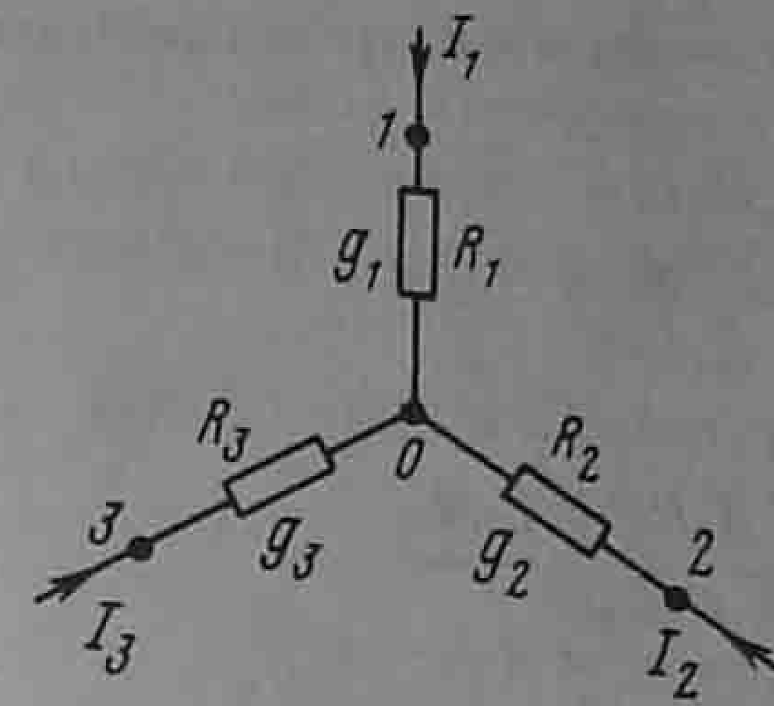



Рис. 2.25

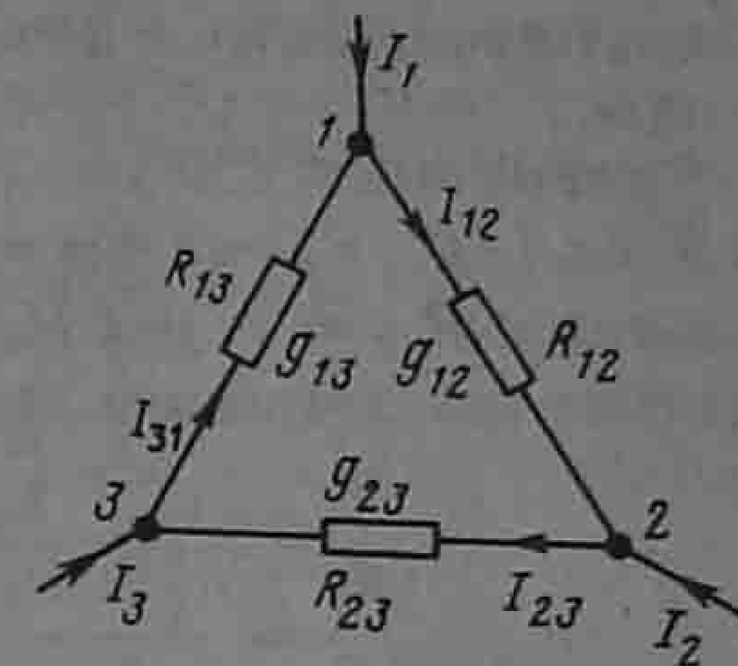



Рис. 2.26

Подставим (2.24) в (2.23) и найдем $\varphi_0$:

$$\varphi_1 g_1 + \varphi_2 g_2 + \varphi_3 g_3 - \varphi_0(g_1 + g_2 + g_3) = 0,$$

откуда

$$\varphi_0 = \frac{\varphi_1 g_1 + \varphi_2 g_2 + \varphi_3 g_3}{g_1 + g_2 + g_3}. \tag{2.25}$$

Введем $\varphi_0$ в выражение (2.24) для тока $I_1$:

$$I_1 = (\varphi_1 - \varphi_0)g_1 = \frac{[\varphi_1(g_2 + g_3) - \varphi_2 g_2 - \varphi_3 g_3]g_1}{g_1 + g_2 + g_3}. \tag{2.26}$$

Для треугольника в соответствии с обозначениями на рис. 2.26

$$I_1 = I_{12} - I_{31} = (\varphi_1 - \varphi_2)g_{12} - (\varphi_3 - \varphi_1)g_{13} = \varphi_1(g_{12} + g_{13}) - \varphi_3 g_{13} - \varphi_2 g_{12}. \tag{2.27}$$

Так как ток $I_1$ в схеме рис. 2.25 равен току $I_1$ в схеме рис. 2.26 при любых значениях потенциалов $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\varphi_3$, то коэффициент при $\varphi_2$ в правой части (2.27) равен коэффициенту при $\varphi_2$ в правой части (2.26), а коэффициент при $\varphi_3$ в правой части (2.27) — коэффициенту при $\varphi_3$ в правой части (2.26).

Следовательно,

$$g_{12} = g_1 g_2/(g_1 + g_2 + g_3); \tag{2.28}$$

$$g_{13} = g_1 g_3/(g_1 + g_2 + g_3). \tag{2.29}$$

Аналогично,

$$g_{23} = g_2 g_3/(g_1 + g_2 + g_3). \tag{2.30}$$

Формулы (2.28) — (2.30) дают возможность определить проводимости сторон треугольника через проводимости лучей звезды. Они имеют легко запоминающуюся структуру: индексы у проводимостей в числителе правой части соответствуют индексам у прово-

димости в левой части; в знаменателе — сумма проводимостей лучей звезды.

Из уравнений (2.28) — (2.30) выразим сопротивления лучей звезды $R_1 = 1/g_1$; $R_2 = 1/g_2$ и $R_3 = 1/g_3$ через сопротивления сторон треугольника: $R_{12} = 1/g_{12}$; $R_{23} = 1/g_{23}$; $R_{13} = 1/g_{13}$.

С этой целью запишем дроби, обратные (2.28) — (2.30):

$$R_{12} = \frac{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3}}{\dfrac{1}{R_1}\dfrac{1}{R_2}} = \frac{\dfrac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}{R_1R_2R_3}}{\dfrac{1}{R_1R_2}} = \frac{m}{R_3}, \qquad (2.31)$$

где

$$m = R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1; \qquad (2.32)$$

$$R_{23} = m/R_1; \qquad (2.33)$$

$$R_{13} = m/R_2. \qquad (2.34)$$

Подставив (2.31), (2.33) и (2.34) в (2.32), получим

$$m = m^2\left(\frac{1}{R_{23}R_{13}} + \frac{1}{R_{13}R_{12}} + \frac{1}{R_{12}R_{23}}\right) = m^2\frac{R_{12} + R_{23} + R_{31}}{R_{12}R_{23}R_{31}}.$$

Следовательно,

$$m = \frac{R_{12}R_{23}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}.$$

Подставив $m$ в (2.33), найдем

$$R_1 = \frac{R_{12}R_{31}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}}. \qquad (2.35)$$

Аналогично,

$$R_2 = \frac{R_{23}R_{12}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}}; \qquad (2.36)$$

$$R_3 = \frac{R_{13}R_{23}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}}. \qquad (2.37)$$

Структура формул (2.35) — (2.37) аналогична структуре формул (2.28) — (2.30).

Преобразование треугольника в звезду можно пояснить, рассмотрев, например, схему рис. 2.27, *а*, *б*. На рис. 2.27, *а* изображена схема до преобразования, пунктиром обведен преобразуемый треугольник. На рис. 2.27, *б* представлена та же схема после преобразования. Расчет токов произвести для нее проще (например, методом двух узлов), чем для схемы рис. 2.27, *а*.

В полезности преобразования звезды в треугольник можно убедиться на примере схем рис. 2.27, *в*, *г*. На рис. 2.27, *в* изображена схема до преобразования, пунктиром обведена преобразуемая в



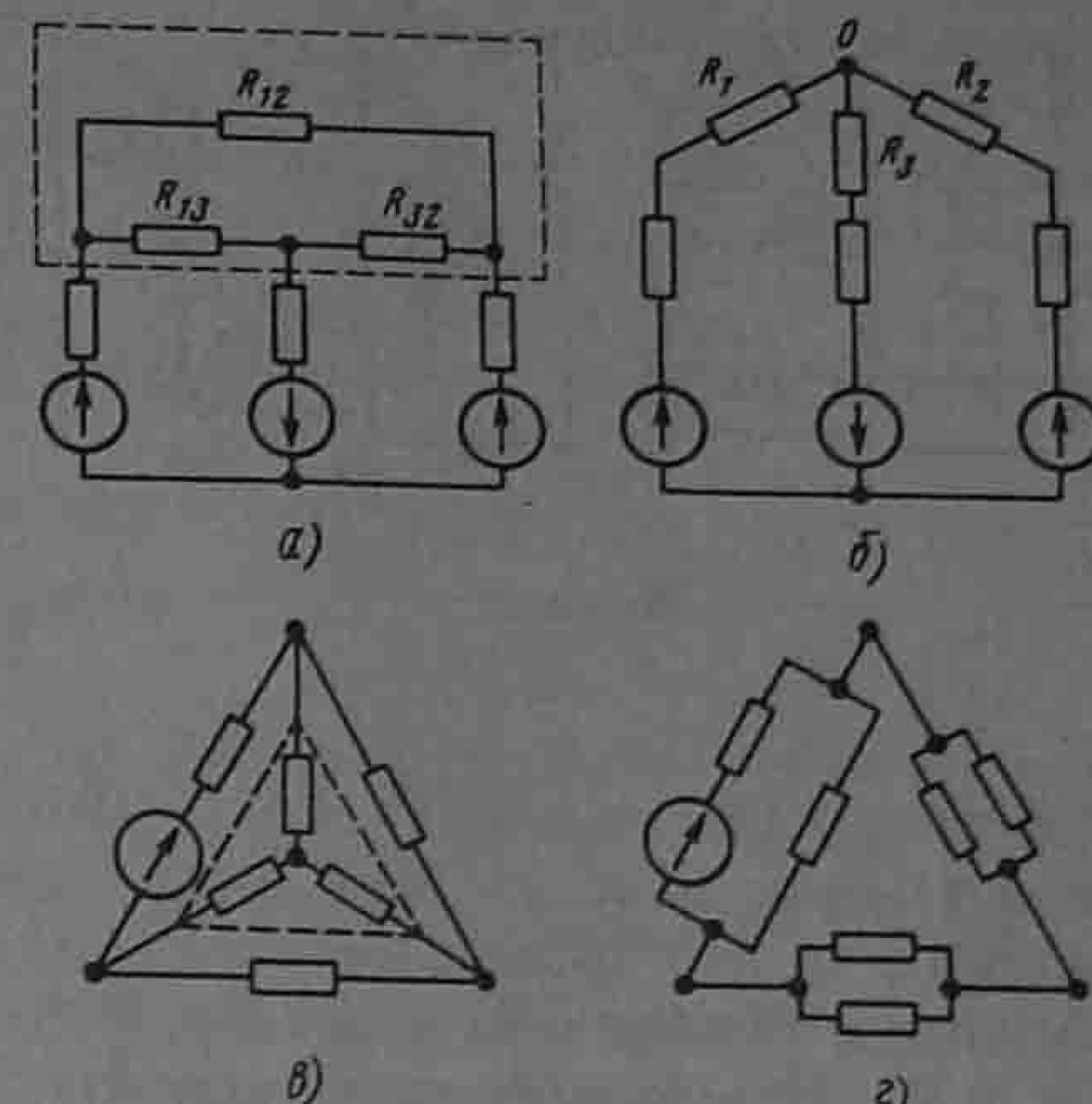



Рис. 2.27

треугольник звезда. На рис. 2.27, *г* представлена схема после преобразования, которая свелась к последовательному соединению сопротивлений[1].

**Пример 24.** Найти значения сопротивлений $R_1$, $R_2$, $R_3$ в схеме рис. 2.27, *б*, если сопротивления $R_{12}$, $R_{13}$, $R_{32}$ в схеме рис. 2.27, *а* равны соответственно 2,3,5 Ом.

Решение. По формуле (2.35), $R_1 = 2\cdot3/(2+3+5) = 0{,}6$ Ом; по формуле (2.36), $R_2 = (5\cdot2)/10 = 1$ Ом; по формуле (2.37), $R_3 = (3\cdot5)/10 = 1{,}5$ Ом.

**§ 2.24. Перенос источников ЭДС и источников тока.** На участке цепи рис. 2.28, *а* между узлами *a* и *b* имеется источник ЭДС *E*. Этот источник можно перенести в ветви *1* и *2*, а узел *a* устранить и в результате получить участок на рис. 2.28, *б*. Эквивалентный переход поясняется рис. 2.28, *в*. Точки *c*, *d*, *b* имеют одинаковый потенциал и потому могут быть объединены в одну точку *b*.

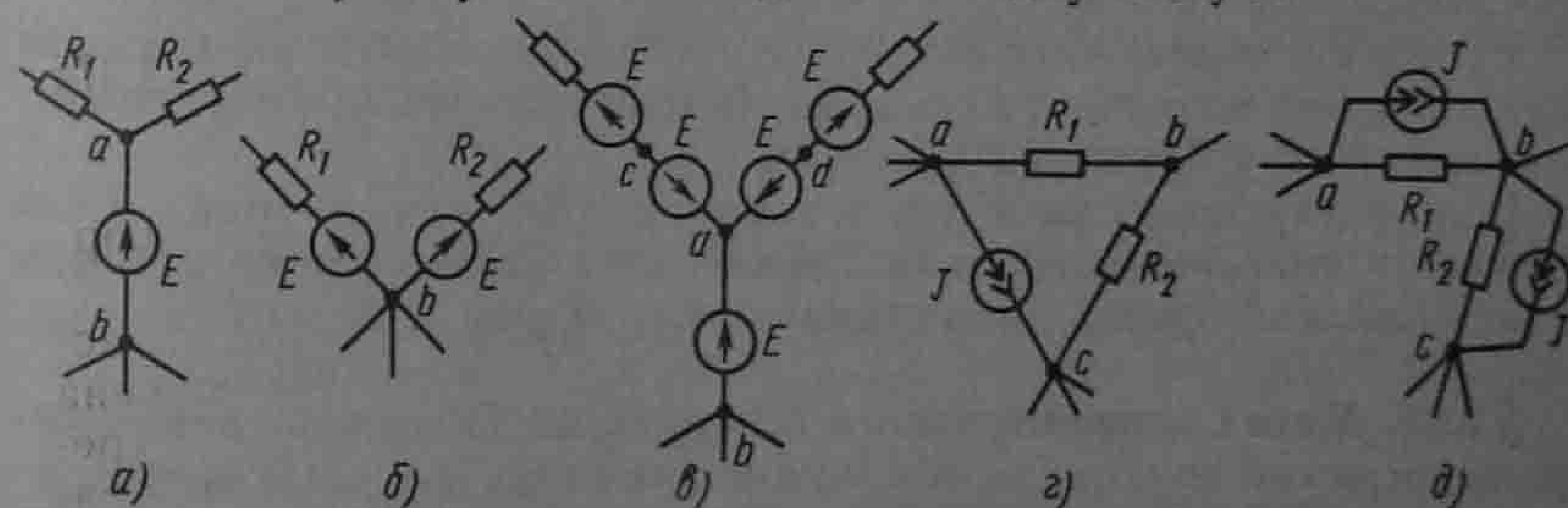



Рис. 2.28

[1] В § 3.31 рассмотрен еще один вид преобразований — преобразование последовательно-параллельного соединения в параллельное.

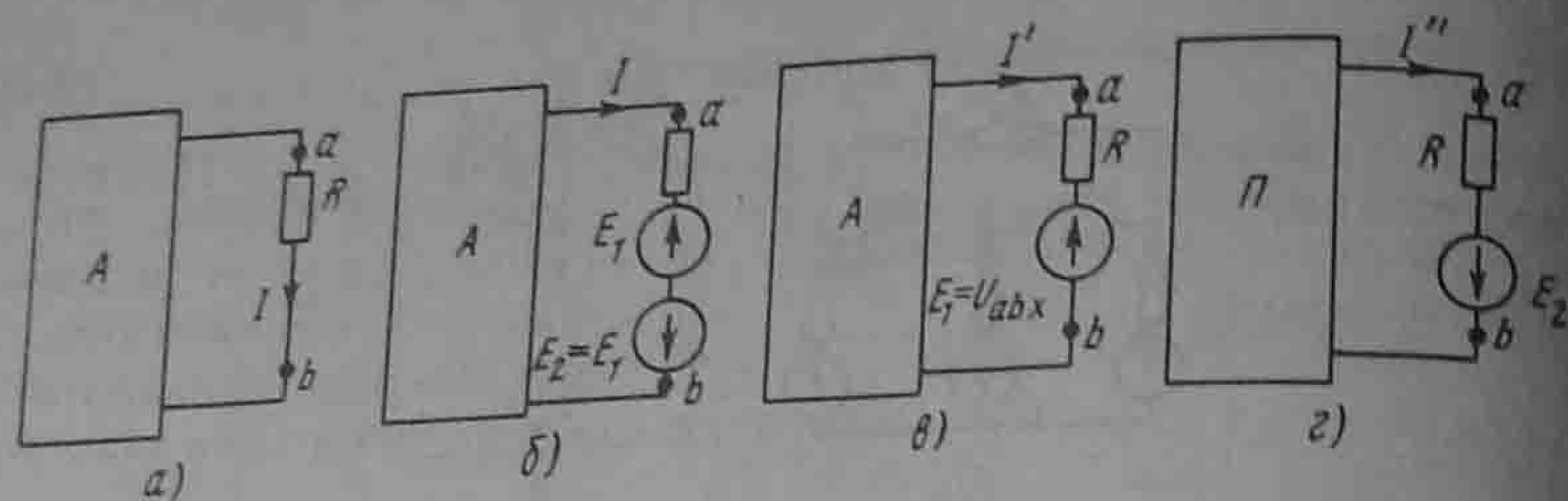



Рис. 2.29

Участок $abc$ на рис. 2.28, г, между крайними точками $a$ и $c$ которого включен источник тока, может быть заменен участком рис. 2.28, д, отличающимся от участка рис. 2.28, г тем, что источник тока между точками $a$ и $c$ заменен на два источника, присоединенных параллельно $R_1$ и $R_2$. Эквивалентность замены следует из неизменности значений токов в каждом из узлов. Ток в узле $b$ не изменился, так как в этот узел добавили и вычли ток $J$. Практически источники переносят при преобразованиях схем с целью их упрощения и при записи уравнений по методу контурных токов и узловых потенциалов в матрично-топологической форме записи (см. § 2.33).

**§ 2.25. Активный и пассивный двухполюсники.** В любой электрической схеме можно мысленно выделить какую-то одну ветвь, а всю остальную часть схемы независимо от ее структуры и сложности условно изобразить некоторым прямоугольником (рис. 2.29, а). Такой прием был использован в § 2.17 без специальных объяснений. По отношению к выделенной ветви вся схема, обозначенная прямоугольником, представляет собой так называемый двухполюсник.

Таким образом, *двухполюсник* — это обобщенное название схемы, которая двумя выходными зажимами (полюсами) присоединена к выделенной ветви.

Если в двухполюснике есть источник ЭДС или (и) тока, то такой двухполюсник называют *активным*. В этом случае в прямоугольнике ставят букву $A$ (рис. 2.29, а — в).

Если в двухполюснике нет источника ЭДС и (или) тока, то его называют *пассивным*. В этом случае в прямоугольнике либо не ставят никакой буквы, либо ставят букву $П$ (рис. 2.29, г).

**§ 2.26. Метод эквивалентного генератора.** По отношению к выделенной ветви двухполюсник можно заменить эквивалентным генератором, ЭДС которого равна напряжению холостого хода на зажимах выделенной ветви, а внутреннее сопротивление равно входному сопротивлению двухполюсника.

Пусть задана некоторая схема и требуется найти ток в одной ее ветви. Мысленно заключим всю схему, содержащую ЭДС и сопро-



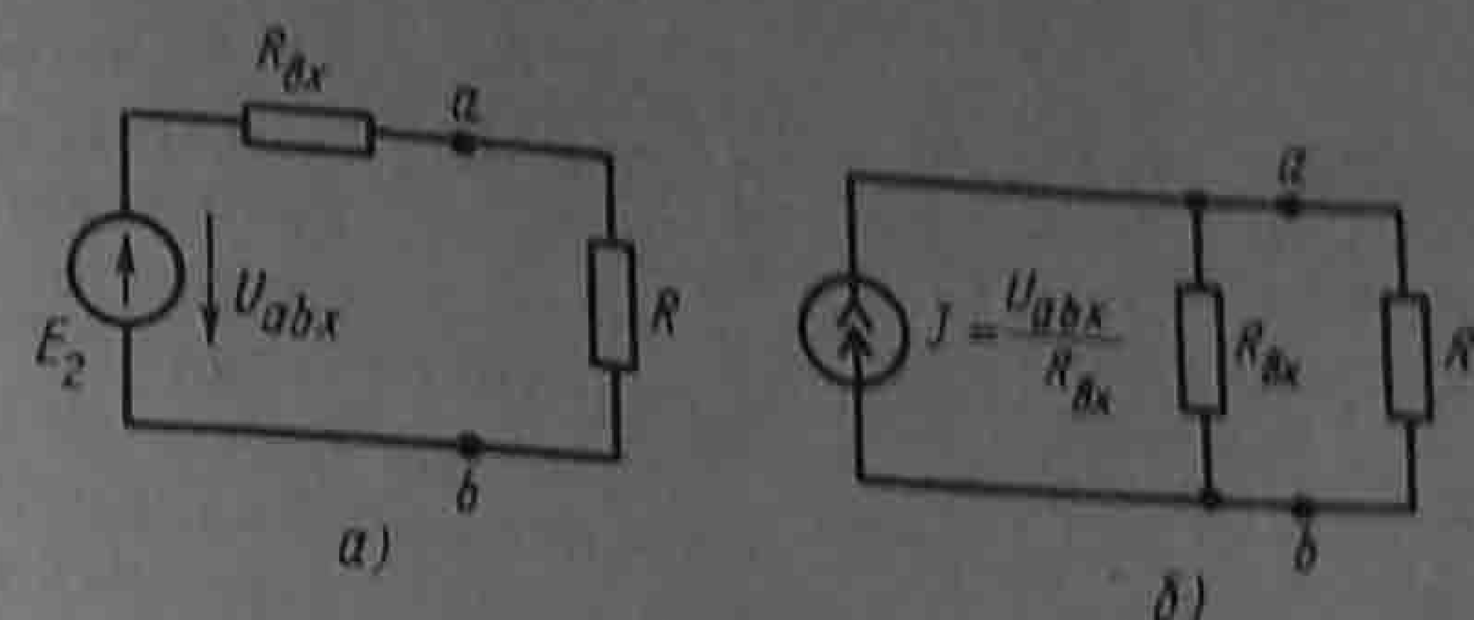



Рис. 2.30

тивления, в прямоугольник, выделив из нее ветвь $ab$, в которой требуется найти ток $I$ (рис. 2.29, а).

Ток $I$ не изменится, если в ветвь $ab$ включить две равные и противоположно направленные ЭДС $E_1$ и $E_2$ (рис. 2.29, б).

На основании принципа наложения ток можно представить в виде суммы двух токов $I'$ и $I''$: $I = I' + I''$.

Под током $I'$ будем понимать ток, вызванный источником ЭДС $E_1$ и всеми источниками ЭДС и тока активного двухполюсника, заключенными в прямоугольник. Ток $I''$ вызывается только одним источником ЭДС $E_2$. В соответствии с этим для нахождения токов $I'$ и $I''$ используем схемы рис. 2.29, в, г. В прямоугольнике $П$ (рис. 2.29, г) отсутствуют все источники, но оставлены их внутренние сопротивления.

ЭДС $E_1$ направлена встречно напряжению $U_{ab}$. По закону Ома для участка цепи, содержащего ЭДС,

$$I' = (U_{ab} - E_1) / R. \qquad (а)$$

Выберем $E_1$ так, чтобы ток $I'$ был равен нулю. Отсутствие тока в ветви $ab$ эквивалентно ее размыканию (холостому ходу). Напряжение на зажимах $ab$ при холостом ходе ветви обозначим $U_{abx}$.

Следовательно, если выбрать $E_1 = U_{abx}$, то $I' = 0$. Так как $I = I' + I''$, а $I' = 0$, то $I = I''$. Но ток $I''$ в соответствии со схемой (рис. 2.29, г) определяется как

$$I'' = E_2 / (R + R_{вх}) = U_{abx} / (R + R_{вх}), \qquad (б)$$

где $R_{вх}$ — входное сопротивление двухполюсника по отношению к зажимам $ab$; $R$ — сопротивление ветви $ab$. Уравнению (б) отвечает эквивалентная схема рис. 2.30, а, где вместо двухполюсника изображены источник ЭДС $U_{abx} = E_2$ и сопротивление $R_{вх}$ (схема Гельмгольца — Тевенена).

Совокупность источника ЭДС $E_2 = U_{abx}$ и сопротивления $R_{вх}$ можно рассматривать как некоторый эквивалентный генератор ($R_{вх}$ является его внутренним сопротивлением, а $U_{abx}$ — его ЭДС).

Таким образом, по отношению к выделенной ветви (ветви $ab$ рис.

2.29, *а*) всю остальную часть схемы можно заменить эквивалентным генератором с перечисленными значениями параметров.

Метод расчета тока в выделенной ветви, основанный на замене активного двухполюсника эквивалентным генератором, принято называть *методом эквивалентного генератора (активного двухполюсника)*, а также *методом холостого хода и короткого замыкания*.

В дальнейшем чаще используется первое название.

Рекомендуется такая последовательность расчета тока этим методом:

а) найти напряжение на зажимах разомкнутой ветви $ab$;

б) определить входное сопротивление $R_{вх}$ всей схемы по отношению к зажимам $ab$ при закороченных источниках ЭДС и разомкнутых ветвях с источниками тока[1];

в) подсчитать ток по формуле

$$I = U_{abx} / (R + R_{вх}). \qquad (2.38)$$

Если сопротивление ветви $ab$ равно нулю ($R=0$), то для нее имеет место режим короткого замыкания, а протекающий по ней ток есть ток короткого замыкания ($I_к$). Из (2.38) при $R=0$

$$I_к = U_{abx} / R_{вх}, \qquad (2.39)$$

или

$$R_{вх} = U_{abx} / I_к. \qquad (2.40)$$

Из формулы (2.40) следует простой метод опытного определения входного сопротивления активного двухполюсника. Для этого необходимо измерить напряжение холостого хода на зажимах разомкнутой ветви $U_{abx}$ и ток короткого замыкания $I_к$ ветви, а затем найти $R_{вх}$ как частное от деления $U_{abx}$ на $I_к$.

Название метода — метод холостого хода и короткого замыкания — объясняется тем, что при решении этим методом для нахождения $U_{abx}$ используется холостой ход ветви $ab$, а для определения входного сопротивления двухполюсника $R_{вх}$ — короткое замыкание ветви $ab$.

Заменив источник ЭДС источником тока, получим схему эквивалентного генератора в виде рис. 2.30, *б*.

**Пример 25.** Определить ток в диагонали $ab$ мостовой схемы рис. 2.31, *а*, полагая $R_1=R_4=1$ Ом; $R_2=4$ Ом; $R_3=2$ Ом; $R_5=2$ Ом; $E_1=10$ В.

Решение. Размыкаем ветвь $ab$ (рис. 2.31, *б*) и находим напряжение холостого хода:

$$\varphi_a = \varphi_b + I_2R_2 - I_1R_1 = \varphi_b + \frac{E_1R_2}{R_2+R_4} - \frac{E_1R_1}{R_1+R_3} =$$

$$= \varphi_b + E_1\left(\frac{R_2}{R_2+R_4} - \frac{R_1}{R_1+R_3}\right);$$

$$U_{abx} = \varphi_a - \varphi_b = E_1\left(\frac{R_2}{R_2+R_4} - \frac{R_1}{R_1+R_3}\right) =$$

$$= 10\left(\frac{4}{4+1} - \frac{1}{1+2}\right) = 4{,}67 \text{ В}.$$

Подсчитываем входное сопротивление всей схемы по отношению к зажимам $ab$ при закороченном источнике ЭДС (рис. 2.31, *в*).

Точки $c$ и $d$ схемы оказываются соединенными накоротко. Поэтому

$$R_{вх} = \frac{R_1R_3}{R_1+R_3} + \frac{R_2R_4}{R_2+R_4} = \frac{1\cdot 2}{1+2} + \frac{4\cdot 1}{4+1} = 1{,}47 \text{ Ом}.$$

Определяем ток в ветви по формуле (2.38):

$$I = U_{abx} / (R_5 + R_{вх}) = 4{,}67 / (2 + 1{,}47) = 1{,}346 \text{ А}.$$

**§ 2.27. Передача энергии от активного двухполюсника нагрузке.** Если нагрузка $R$ подключена к активному двухполюснику (см. рис. 2.29, *а*), то через нее потечет ток $I = U_{abx} / (R + R_{вх})$ и в ней выделится мощность

$$P = I^2R = \frac{U_{abx}^2}{(R+R_{вх})^2}R. \qquad (2.41)$$

Выясним, каково должно быть соотношение между сопротивлением нагрузки $R$ и входным сопротивлением двухполюсника $R_{вх}$, чтобы в сопротивлении нагрузки выделялась максимальная мощность; чему она равна и каков при этом КПД передачи. С этой целью определим первую производную $P$ по $R$ и приравняем ее нулю:

$$\frac{dP}{dR} = \frac{(R+R_{вх})^2 - 2R(R+R_{вх})}{(R+R_{вх})^4} = 0.$$

Отсюда

$$R = R_{вх}. \qquad (2.42)$$

Нетрудно найти вторую производную и убедиться в том, что она отрицательна ($d^2P / dR^2 < 0$). Следовательно, соотношение (2.42) соответствует максимуму функции $P = f(R)$. Подставив (2.42) в (2.41), получим максимальную мощность, которая может быть выделена в нагрузке $R$:

$$P_{max} = U_{abx}^2 / 4R_{вх}. \qquad (2.43)$$

Полезную мощность, выделяющуюся в нагрузке, определяют по уравнению (2.41). Полная мощность, выделяемая эквивалентным генератором,

$$P_{полн} = U_{abx}I = U_{abx}^2 / (R_{вх} + R).$$

[1] Если среди источников питания схемы есть источники тока, то при определении входного сопротивления всей схемы по отношению к зажимам $ab$ ветви с источниками тока следует считать разомкнутыми. Это станет понятным, если вспомнить, что внутреннее сопротивление источников тока равно бесконечности (см. § 2.2).

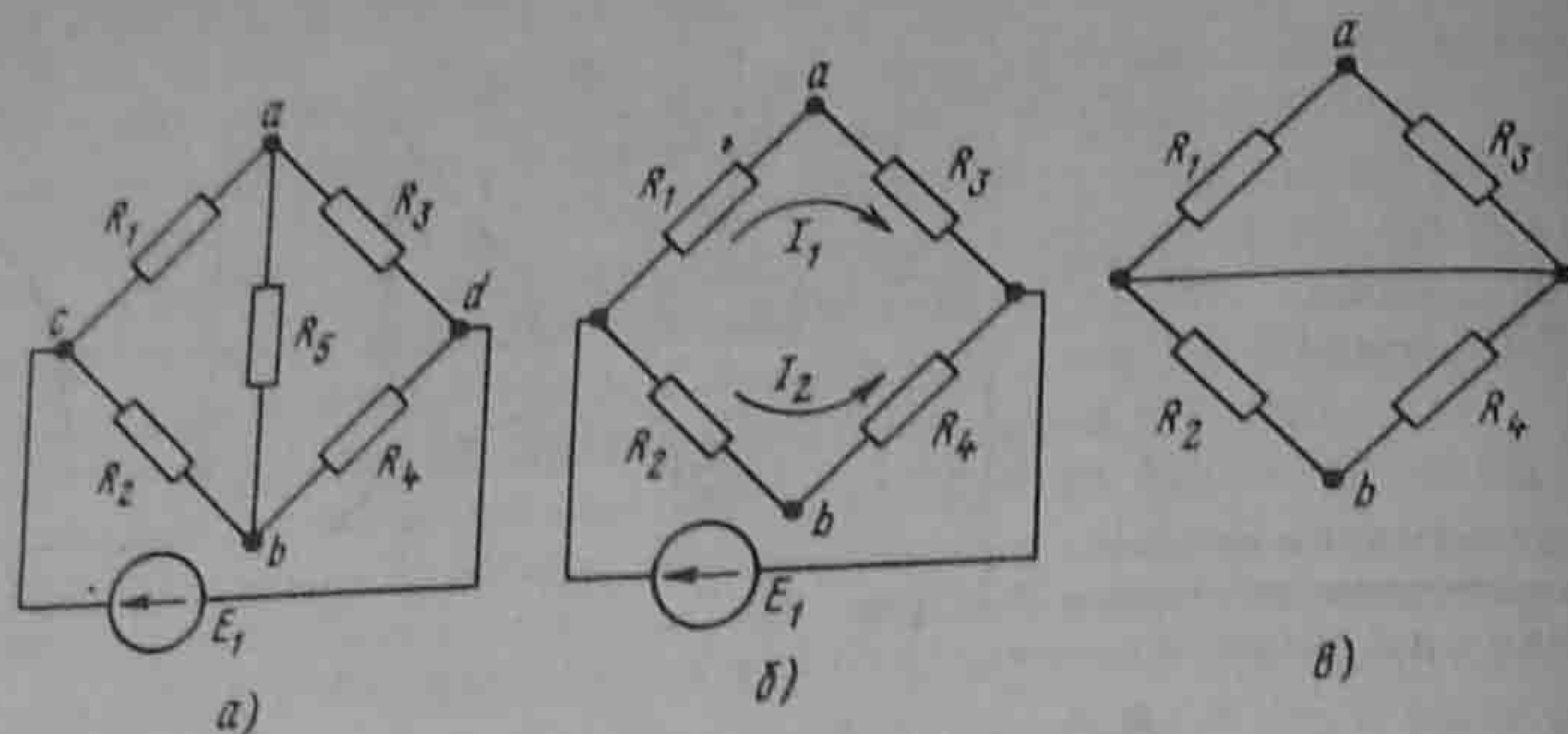



Рис. 2.31

Коэффициент полезного действия

$$\eta = P / P_{\text{полн}} = R / (R + R_{\text{вх}}). \tag{2.44}$$

Если $R = R_{\text{вх}}$, то $\eta = 0{,}5$.

Если мощность $P$ значительна, то работать с таким низким КПД, как 0,5, недопустимо. Но если мощность $P$ мала и составляет всего несколько милливатт (такой мощностью обладают, например, различные датчики устройств автоматики), то с низким КПД можно не считаться, поскольку достигнута главная цель — в этом режиме датчик отдает нагрузке максимально возможную мощность. Выбор сопротивления нагрузки $R$, равного входному сопротивлению $R_{\text{вх}}$ активного двухполюсника, называют *согласованием нагрузки*.

**Пример 26.** При каком значении сопротивления $R_5$ (рис. 2.31, *а*) в нем выделяется максимальная мощность и чему она равна?

Решение. Из условия (2.42) находим $R_5 = R_{\text{вх}} = 1{,}47$ Ом; $P_{\max} = U_{abx}^2 / (4R_{\text{вх}}) = 4{,}67^2 / (4 \cdot 1{,}47) = 3{,}71$ Вт.

**§ 2.28. Передача энергии по линии передач.** Схема линии передачи электрической энергии изображена на рис. 2.32, где $U_1$ — напряжение генератора в начале линии; $U_2$ — напряжение на нагрузке в конце линии; $R_л$ — сопротивление проводников линии; $R_2$ — сопротивление нагрузки.

Напряжение $U_1 = U_{ab}$ (рис. 2.32) направлено противоположно ЭДС $E$. Объясняется это тем, что напряжение имеет направление от точки с более высоким потенциалом к точке с более низким, тогда как ЭДС направлена от точки с более низким потенциалом к точке с более высоким, т. е. стрелка внутри источника ЭДС указывает направление возрастания потенциала внутри источника.

При передаче больших мощностей (например, нескольких десятков мегаватт) в реальных линиях передач КПД $\eta = 0{,}94 \div 0{,}99$, а напряжение $U_2$ лишь на несколько процентов меньше $U_1$. Ясно, что каждый процент повышения КПД при передаче больших мощностей имеет существенное экономическое значение.



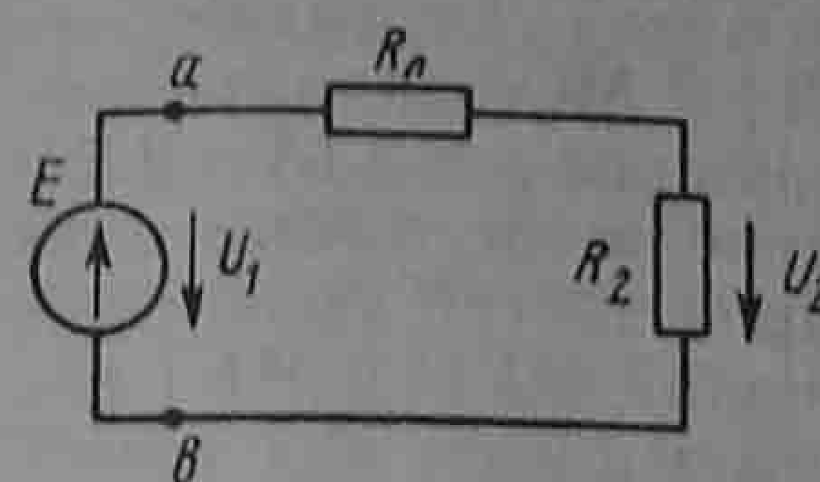



Рис. 2.32

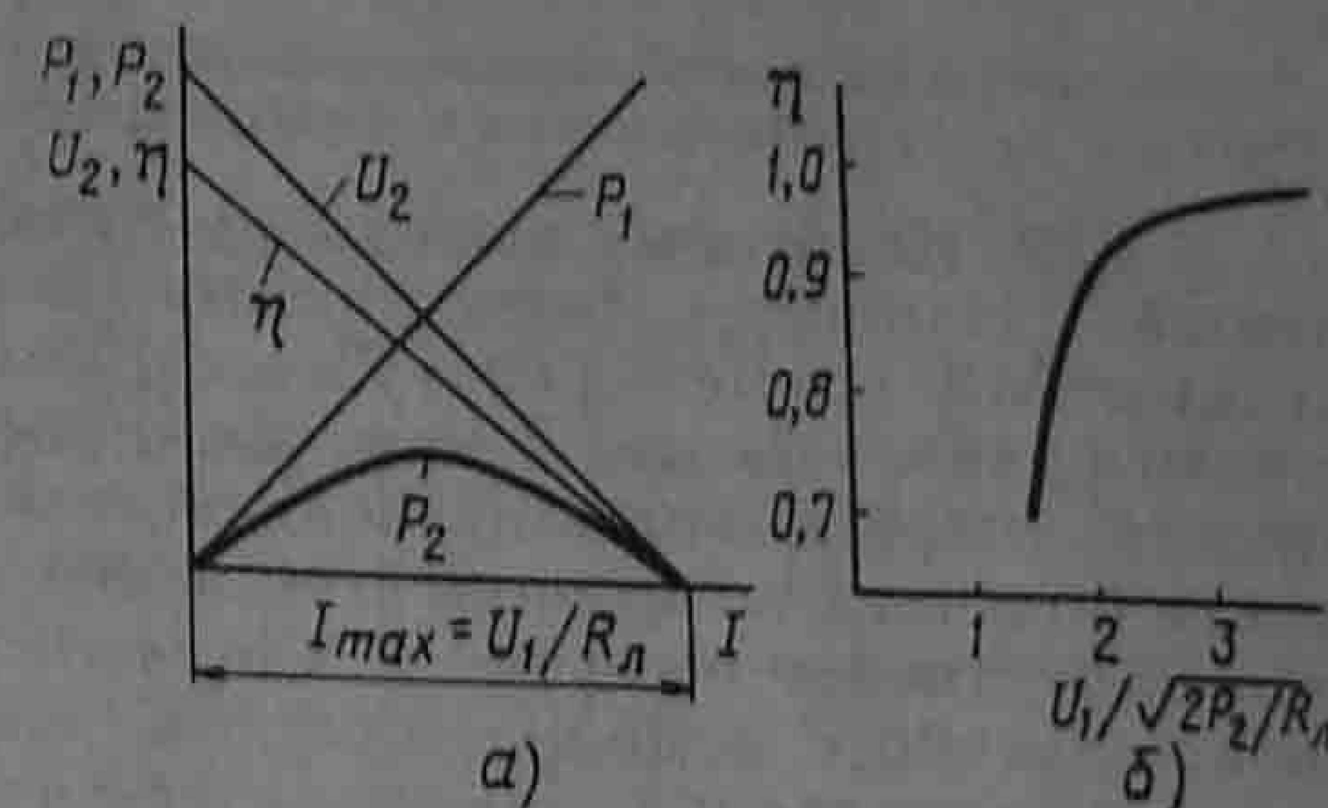



Рис. 2.33

Характер изменения мощности в начале линии $P_1$, мощности в нагрузке $P_2$, КПД и напряжения на нагрузке $U_2$ в функции от тока по линии при $U_1 = \text{const}$, $R_л = \text{const}$ иллюстрируется кривыми рис. 2.33, *а*. По оси абсцисс на этом рисунке отложен ток $I$, по оси ординат — $P_1$, $P_2$, $U_2$, $\eta$.

Максимальное значение тока $I_{\max} = U_1 / R_л$ имеет место при коротком замыкании нагрузки. Кривые построены по уравнениям

$$\left.\begin{aligned} P_1 = U_1 I;\ P_2 = U_1 I - I^2 R_л;\\ \eta = P_2 / P_1 = 1 - \frac{R_л I}{U_1} = \frac{R_2}{R_л + R_2};\ U_2 = U_1 - R_л I. \end{aligned}\right\} \tag{2.45}$$

Если по линии передачи с сопротивлением $R_л$ и сопротивлением нагрузки $R_2$ должна быть передана мощность

$$P_2 = I^2 R_2, \tag{а}$$

то КПД передачи тем выше, чем выше напряжение $U_1$ в начале линии.

**Пример 27.** Вывести формулу, показывающую, как при заданных $P_2$ и $R_л$ КПД зависит от напряжения в начале линии.

Решение. Из (а) определим $R_2 = P_2 / I^2$. Так как $I = U_1 / (R_л + R_2)$, то

$$R_2 = \frac{P_2 (R_л + R_2)^2}{U_1^2}. \tag{б}$$

Решим уравнение (б) относительно $R_2$ [знак минус в формуле (в) перед корнем отброшен, так как он соответствует правой части кривой $P_2 = f(I)$ с меньшим $\eta$]:

$$R_2 = \left(\frac{U_1^2}{2P_2} - R_л\right) + \sqrt{\left(\frac{U_1^2}{2P_2} - R_л\right)^2 - R_л^2}. \tag{в}$$

Таким образом,

$$\eta = \frac{R_2}{R_л + R_2} = \frac{R_2 + R_л - R_л}{R_л + R_2} = 1 - \frac{1}{\dfrac{U_1^2}{2P_2 R_л} + \sqrt{\left(\dfrac{U_1^2}{2P_2 R_л - 1}\right)^2 - 1}}. \tag{г}$$

На рис. 2.33, *б* изображена зависимость $\eta = f(U_1/\sqrt{2P_2R_л})$, построенная по формуле (г). Из рисунка видно, что $\eta$ возрастает с увеличением $U_1$.

**§ 2.29. Некоторые выводы по методам расчета электрических цепей.** 1. Наиболее эффективными являются метод узловых потенциалов (МУП) и метод контурных токов (МКТ). 2. Методика составления уравнений этими методами, рассмотренная в § 2.13 и 2.22, проста, упорядочена и позволяет легко контролировать правильность подсчета коэффициентов левой и правой частей уравнений непосредственно по схеме. 3. Системы уравнений МУП и МКТ решают обычно с помощью средств, всегда имеющихся под рукой (микрокалькулятора или логарифмической линейки), а относительно сложные схемы рассчитывают, используя ЭВМ. 4. Уравнения теории цепей могут быть составлены и матрично-топологическим методом, использующим некоторые топологические понятия и соответствующие им матрицы. Рассмотрим, как это делается. Но сначала напомним некоторые сведения о матрицах.

**§ 2.30. Основные свойства матриц и простейшие операции с ними.** Матрица — это совокупность чисел, расположенных в виде прямоугольной таблицы. Чтобы отличать матрицу по внешнему виду от определителя, ее заключают в квадратные скобки. Каждый элемент матрицы снабжают двумя индексами: первый соответствует номеру строки, второй — номеру столбца.

Матрицу называют *квадратной*, если число строк в ней равно числу столбцов

$$[A]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

*Диагональной* называют матрицу, у которой элементы главной диагонали не равны нулю, а все остальные — нули, например:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Матрицу, у которой элементы главной диагонали равны единице, а все остальные — нули, называют *единичной*:

$$[1]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

*Неопределенной* называют матрицу, у которой сумма элементов любой строки и любого столбца равна нулю.

Две матрицы равны, если равны соответствующие элементы этих матриц.

Матрица $[A]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ равна матрице

$$[B]=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}, \text{ если } a_{11}=b_{11},\ a_{12}=b_{12},\ a_{21}=b_{21},\ a_{22}=b_{22}.$$

У равных матриц равны определители. В рассматриваемом примере $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21}$, но из равенства двух определителей еще не следует равенства самих матриц. Операции над матрицами (их сложение, умножение) постулированы из соображений рациональности. При сложении (вычитании) матриц следует сложить (вычесть) соответствующие элементы этих матриц:

$$[A]+[C]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11}+c_{11} & a_{12}+c_{12} \\ a_{21}+c_{21} & a_{22}+c_{22} \end{bmatrix}.$$

При умножении двух матриц (число столбцов первой должно быть равно числу строк второй) $i$-ю строку первой матрицы умножают на $k$-й столбец второй. Умножим две матрицы, элементами которых являются числа

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1\cdot5+2\cdot7 & 1\cdot6+2\cdot8 \\ 3\cdot5+4\cdot7 & 3\cdot6+4\cdot8 \end{bmatrix}.$$

Руководствуясь приведенным правилом, нетрудно убедиться в том, что $[A][B]\neq[B][A]$, т. е. результирующая матрица зависит от последовательности расположения матриц сомножителей. По отношению к матрице $[A]$, когда ее определитель не равен нулю, можно составить обратную матрицу $[A]^{-1}$. Для этого необходимо: а) каждый элемент исходной матрицы $[A]$ заменить его алгебраическим дополнением; б) транспонировать полученную матрицу, т. е. строки сделать столбцами; в) разделить полученную матрицу на определитель исходной матрицы $[A]$.

**Пример 28.** Составить $[A]^{-1}$ для $[A]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$.

Р е ш е н и е. Заменив элементы на алгебраические дополнения, получим матрицу $\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{bmatrix}$. После транспонирования имеем $\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$. Следовательно,

$$[A]^{-1}=\frac{\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}.$$

Произведение $[A][A]^{-1}=[1]$.

Для решения уравнения $[A][B]=[C]$ относительно матрицы $[B]$ следует обе части этого уравнения умножить на $[A]^{-1}$: $[A]^{-1}[A][B]=[A]^{-1}[C]$ и учесть, что $[A]^{-1}[A]=[1]$. В результате получим $[B]=[A]^{-1}[C]$. В матричном уравнении $[A][X]=0$ можно переставлять столбцы в матрице $[A]$ при одновременной перестановке строк в матрице $[X]$.

**§ 2.31. Некоторые топологические понятия и топологические матрицы.** Положим, что в схеме имеется $y$ узлов и $в$ ветвей и каждая пара узлов соединена одной ветвью. Если в исходной схеме между какими-то двумя узлами имеется несколько параллельных ветвей, то их следует заменить одной эквивалентной. Перед составлением топологических матриц ветви схемы (графа) нумеруют и на них ставят стрелки. Стрелки указывают положительные направления для отсчета тока и напряжения на каждой ветви. Перед нумерацией ветвей графа нужно выбрать дерево. Как указывалось в § 2.8, дерево представляет такую совокупность узлов схемы и соединяющих их ветвей, когда ветви касаются всех узлов, но не образуют ни одного замкнутого контура. Число ветвей дерева равно $(y-1)$. Нумерацию ветвей графа начинают с нумерации ветвей дерева, используя номера с 1 по $y-1$. Номера с $y$ по $в$ придают ветвям графа, не вошедшим в выбранное дерево. Их называют ветвями связи или хордами. В качестве примера на рис. 2.34, *а* изображена схема, а на

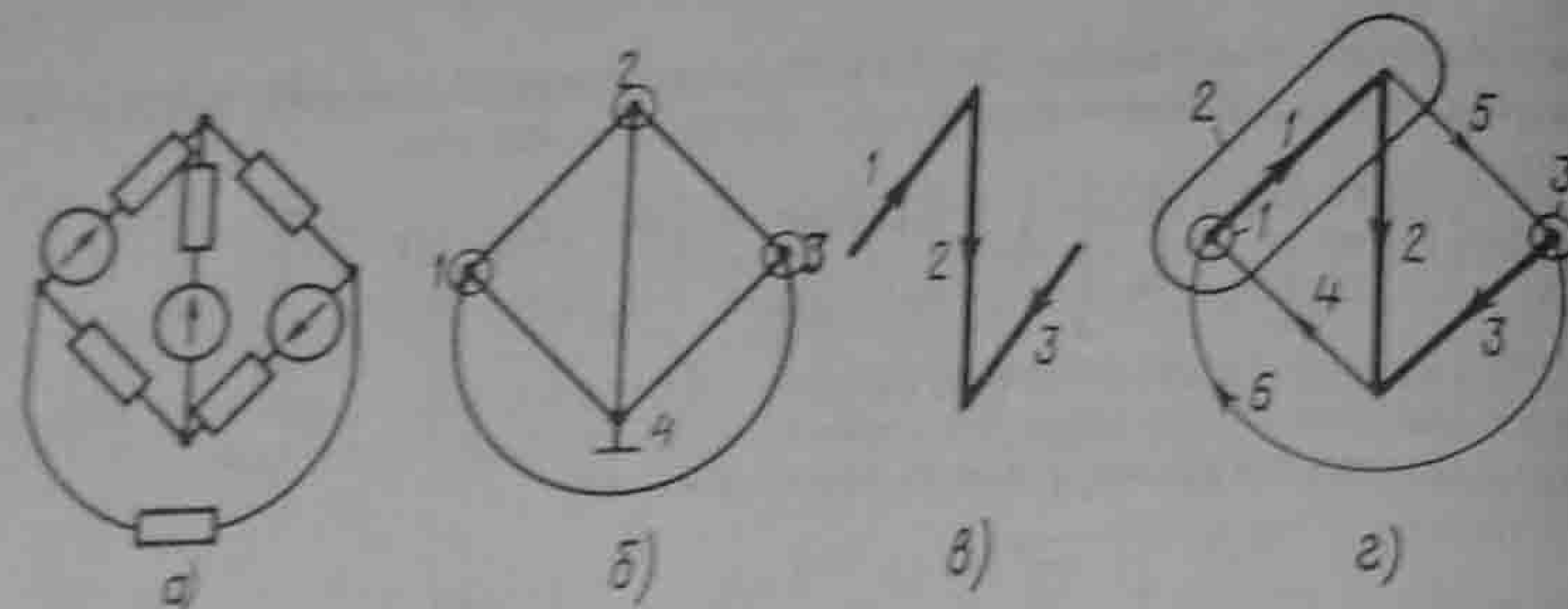



Рис. 2.34

рис. 2.34, *б* — соответствующий ей граф. Схема имеет четыре узла и шесть ветвей. Узлы обозначены цифрами *1* — *4* (рис. 2.34, *б*). На рис. 2.33, *в* показано дерево, которое положено далее в основу формирования топологических матриц.

Ветви дерева обозначим цифрами *1, 2, 3*, остальные ветви графа (ветви связи) — цифрами *4, 5, 6*. Ветви дерева рис. 2.34, *г* вычерчены утолщенными линиями, ветви связи — тонкими. На ветвях графа ставим стрелки, направление их произвольно (рис. 2.34, *в, г*). Узловую матрицу $[A]$ составляют для всех узлов графа, кроме одного. В этой матрице номер $i$-й строки соответствует номеру узла, а номер $j$-гостолбца — номеру ветви. В ячейки матрицы $[A]$ ставят числа 1, —1, 0. Если узел, для которого составляется строка матрицы, охватить некоторой поверхностью, след которой показать кружком, то в соответствующую ячейку матрицы $[A]$ ставят 1, если стрелка $j$-ветви направлена из кружка, ставят —1, если стрелка направлена в кружок, и 0, если ветвь не затронута кружком. При заземленном узле *4* (рис. 2.34, *б*):

$$\begin{array}{c} \\ \text{Узлы} \\ [A] = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \text{Ветви} \\ \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Заметим, что матрица $[A]$ может быть представлена двумя подматрицами:

$$[A] = \begin{array}{c} \text{Узлы} \\ 1 \\ \vdots \\ (y-1) \end{array} \begin{array}{c} \text{Ветви} \\ 1 \ldots (y-1) : y \ldots b \\ \begin{bmatrix} \\ A_1 \quad A_2 \end{bmatrix} \end{array}$$

Матрицу сечений $[Q]$ составляют для любых сечений графа, а матрицу главных сечений $[Q_r]$ — для главных сечений выбранного



дерева. След сечений на рисунках показывают овалами, вычерченными тонкими линиями.

*Главными сечениями* называют сечения, каждое из которых рассекает несколько ветвей связи и только одну ветвь выбранного дерева. Главные сечения нумеруют. Номер главного сечения соответствует номеру рассекаемой этим сечением ветви дерева. Для графа рис. 2.34, *б* главные сечения показаны на рис. 2.34, *г* и обозначены цифрами *1, 2, 3*. Сечение *1* рассекает ветвь *1* и ветви связи *4* и *6*, сечение *2* — ветвь *2* и ветви связи *4, 5, 6* (ветвь *1* целиком входит в овал *2* и не рассекается им), сечение *3* — ветвь *3* и ветви связи *5* и *6*. Строки матрицы $[Q_r]$ соответствуют сечениям, а столбца — ветвям графа.

В ячейках соответствующей строки матрицы $[Q_r]$ ставят 1 для рассекаемой этим сечением ветви дерева и для всех ветвей связи, стрелки на которых ориентированы относительно поверхности этого сечения (след этого сечения на плоскости — овал), так же как и стрелка на рассекаемой этим сечением ветви дерева. Когда стрелка на ветви связи направлена относительно овала иначе, чем стрелка на ветви дерева, ставят — 1, когда ветвь связи не рассечена — 0.

Применительно к дереву рис. 2.34, *в* для главных сечений (рис. 2.34, *г*):

$$\begin{array}{c} \\ \text{Сечения} \\ [Q_r] = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \text{Ветви} \\ \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

В общем случае матрица $[Q_r]$ может быть представлена в виде двух матриц:

$$[Q_r] = \begin{array}{c} \text{Сечения} \\ 1 \\ \vdots \\ (y-1) \end{array} \begin{bmatrix} \text{Ветви} \\ 1 \ldots (y-1) \,.\, y \ldots b \\ \vdots \\ Q_1 \quad Q_2 \end{bmatrix}.$$

Каждая строка $[Q_1]$ имеет только по одному элементу 1 и находится он на главной диагонали, поэтому $[Q_1]$ представляет собой единичную матрицу $[1]$ и $[Q_r] = [1 \vdots Q_2]$.

*Главными контурами* называют контуры, в каждый из которых входит только по одной ветви связи. Нумеруют главные контуры теми же номерами, какие присвоены ветвям связи в них. Главные контуры *4, 5, 6* дерева рис. 2.34, *в* изображены на рис. 2.35. Толстыми линиями показаны ветви дерева, тонкими — ветви связи.

Матрицей главных контуров $[K_r]$ называют матрицу, составленную из чисел 1, —1, 0, строки которой соответствуют номеру глав-

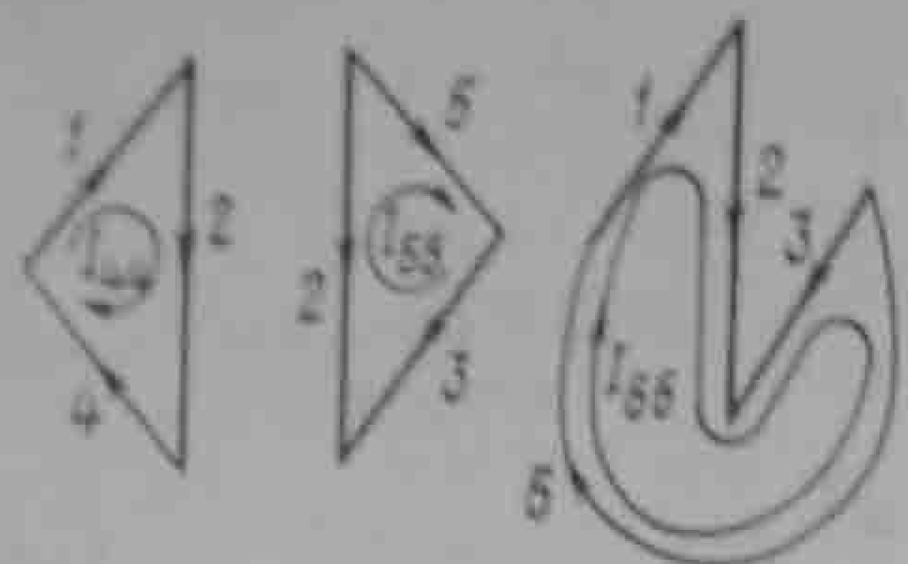



Рис. 2.35

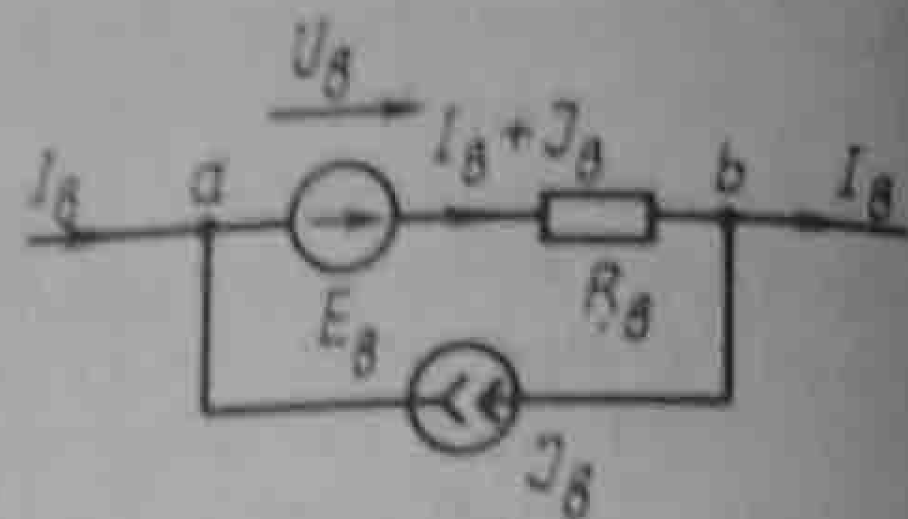



Рис. 2.36

ного контура, а столбцы — номеру ветви. Главные контуры при составлении матрицы $[K_r]$ обходят в направлении стрелки на ветви связи соответствующего контура. Если при таком обходе контура направление стрелки на какой-либо ветви этого контура совпадает с направлением обхода контура, то в соответствующую ячейку $[K_r]$ ставят 1, если не совпадает, то —1, если ветвь не обходится, то 0.

Для контуров *4, 5, 6* рис. 2.35:

$$[K_r] = \begin{array}{c} \text{Контуры} \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \overset{\text{Ветви}}{\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

В общем виде матрица $[K_r]$ может быть представлена в виде двух подматриц и имеет следующую нумерацию строк и столбцов:

$$[K_r] = \begin{array}{c} \text{Контуры} \\ y \\ \vdots \\ в \end{array} \overset{1\ldots(y-1)\quad y\ldots в}{\begin{bmatrix} & \vdots & \\ K_1 & \vdots & K_2 \\ & \vdots & \end{bmatrix}}.$$

Так как номер строки (номер контура) в $[K_2]$ определяется номером его ветви связи и обход контура осуществляется в соответствии со стрелкой на ветви связи, то каждая строка подматрицы $[K_2]$ имеет только один элемент 1, расположенный на ее главной диагонали, т. е. $[K_2]$ представляет собой единичную матрицу [1], а $[K_r]=[K_1\vdots 1]$.

**§ 2.32. Запись уравнений по законам Кирхгофа с помощью топологических матриц.** Совокупность уравнений по первому закону Кирхгофа может быть записана следующим образом:

$$[A][I_в] = 0, \tag{2.46}$$

где $[I_в]$ — матрица-столбец (транспонированная матрица-строка) токов ветвей. Для графа рис. 2.33, *г*



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} [I_1 I_2 I_3 I_4 I_5 I_6]^{\text{г}} = 0$$

Совокупность уравнений по второму закону Кирхгофа может быть записана так:

$$[K_r][U_в] = 0, \tag{2.47}$$

где $[U_в]$ — матрица-столбец (транспонированная матрица-строка) напряжения ветвей. Для графа рис. 2.33, *г*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [U_1 U_2 U_3 U_4 U_5 U_6]^{\text{г}} = 0.$$

**§ 2.33. Обобщенная ветвь электрической цепи.** В литературе, использующей матрично-топологическое направление теории цепей, вводят понятие обобщенной ветви электрической цепи (рис. 2.36). Она образована двумя параллельными ветвями. Первая состоит из сопротивления ветви $R_в$ (проводимость $g_в$) и источника ЭДС $E_в$, вторая — из источника тока $J_в$. Для принятых на рис. 2.36 положительных направлений токов ток через сопротивление $R_в$ равен $I_в + J_в$. Напряжение между точками *a* и *b* ветви обозначим $U_в$. Тогда, по закону Ома для участка цепи с ЭДС,

$$U_в + E_в = R_в(I_в + J_в) \tag{2.48}$$

или

$$(I_в + J_в) = g_в(U_в + E_в). \tag{2.49}$$

**§ 2.34. Вывод уравнений метода контурных токов с помощью топологических матриц.** Уравнение (2.48) справедливо для любой обобщенной ветви схемы, а также и для совокупности ветвей, входящих в любой главный контур. Запишем совокупность уравнений (2.48) для всех ветвей, входящих во все главные контуры:

$$[K_r][U_в] + [K_r][E_в] = [K_r][R_в]\{[I_в] + [J_в]\}, \tag{2.50}$$

где

$$[R_в] = \begin{bmatrix} R_1 & & & & \\ & R_2 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & R_в \end{bmatrix}$$

— диагональная матрица сопротивлений ветвей.

Учтем, что по второму закону Кирхгофа сумма напряжений любого замкнутого контура электрической цепи равна нулю, поэтому

$[K_r][U_в] = 0$. Кроме того, матрица-столбец токов ветвей $[I_в]$ может быть записана через матрицу-столбец контурных токов $[I_{kk}]$ и транспонированную матрицу главных контуров $[K_r]$:

$$[I_в] = [K_r]^т[I_{kk}]. \qquad (2.51)$$

При этом полагаем, что контурный ток каждого главного контура направлен в соответствии со стрелкой на ветви связи этого контура. Контурные токи $I_{44}$, $I_{55}$, $I_{66}$ схемы рис. 2.34, *г* показаны на рис. 2.35. Для этой схемы

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{44} \\ I_{55} \\ I_{66} \end{bmatrix}$$

Отсюда

$$I_1 = I_{44} + I_{66};\ I_2 = I_{44} - I_{55} + I_{66};\ I_3 = I_{55} - I_{66};$$
$$I_4 = I_{44};\ I_5 = I_{55};\ I_6 = I_{66}.$$

Подставив (2.51) в (2.50), получим

$$[K_r][R_в][K_r]^т[I_{kk}] = [K_r][E_в] - [K_r][R_в][J_в]. \qquad (2.52)$$

Произведение $[K_r][R_в][K_r]^т = [R]$ — это матрица контурных сопротивлений метода контурных токов. Так как контуры нумеруем от $y$ до $в$, то

$$[R] = \begin{bmatrix} R_{y,y} & R_{y,y+1} & \dots & R_{y,в} \\ R_{y+1,y} & R_{y+1,y+1} & \dots & R_{y+1,в} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{в,y} & R_{в,y+1} & \dots & R_{в,в} \end{bmatrix},$$

где $R_{m,m}$ — полное сопротивление $m$-контура; $R_{m,n}$ — сопротивление ветви (ветвей) смежной между $m$- и $n$-контурами; берется со знаком плюс, если контурные токи $I_{m,m}$ и $I_{n,n}$ текут через смежную ветвь согласно, и со знаком минус, если встречно.

Для рис. 2.34, *г*, полагая сопротивления ветвей $R_1 - R_6$, имеем

$$[R] = \begin{bmatrix} R_{44} & R_{45} & R_{46} \\ R_{54} & R_{55} & R_{56} \\ R_{64} & R_{65} & R_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 + R_2 + R_4 & -R_2 & R_1 + R_2 \\ -R_2 & R_2 + R_5 + R_3 & -(R_2 + R_3) \\ R_1 & -(R_2 + R_3) & R_1 + R_2 + R_3 + R_6 \end{bmatrix}.$$

Запишем решение (2.52) относительно $[I_{kk}]$:

$$[I_{kk}] = \{[K_r][R_в][K_r]^т\}^{-1}[K_r]\{[E_в] - [R_в][J_в]\}. \qquad (2.53)$$



**§ 2.35. Вывод уравнений метода узловых потенциалов с помощью топологических матриц**[1]. Совокупность уравнений (2.49) для $y - 1$ узлов схемы заменим матричным уравнением

$$[A][I_в] + [A][J_в] = [A][g_в][U_в] + [A][g_в][E_в].$$

По первому закону Кирхгофа, $[A][I_в] = 0$. Матрицу-столбец напряжений ветвей $[U_в]$ можно записать через транспонированную матрицу $[A]$ и матрицу-столбец потенциалов незаземленных узлов $[\varphi]$, т. е. в виде $[U_в] = [A]^т[\varphi]$. Для рис. 2.34, *г*, полагая узел *4* заземленным, имеем

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix}.$$

Действительно,

$U_1 = \varphi_1 - \varphi_2$; $U_2 = \varphi_2$; $U_3 = \varphi_3$; $U_4 = -\varphi_1$; $U_5 = \varphi_2 - \varphi_3$; $U_6 = \varphi_3 - \varphi_1$.

Таким образом, система уравнений метода узловых потенциалов запишется так:

$$[A][g_в][A]^т[\varphi] = -[A][g_в][E_в] + [A][J_в], \qquad (2.54)$$

где $[A][g_в][A]^т = [G]$ — матрица узловых проводимостей метода узловых потенциалов. При заземленном $y$-узле

$$[G] = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \dots & G_{1,y-1} \\ G_{21} & G_{22} & \dots & G_{2,y-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_{y-1,1} & G_{y-1,2} & \dots & G_{y-1,y-1} \end{bmatrix}.$$

Для рис. 2.33, *б*

$$[G] = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 + g_4 + g_6 & -g_1 & -g_6 \\ -g_1 & g_1 + g_2 + g_5 & -g_5 \\ -g_6 & -g_5 & g_3 + g_5 + g_6 \end{bmatrix}.$$

**§ 2.36. Соотношения между топологическими матрицами.** Полагаем, что при составлении матриц $[A]$, $[Q_r]$, $[K_r]$ выполнены условия, оговоренные в § 2.31. Тогда

$$[A] = \begin{matrix} \text{Узлы} \\ 1 \\ \vdots \\ (y-1) \end{matrix} \begin{bmatrix} \text{Ветви} & \\ 1 \dots (y-1), & y \dots b \\ & \\ A_1 \quad \vdots & A_2 \end{bmatrix}; \quad [Q_r] = \begin{matrix} \text{Сечения} \\ 1 \\ \vdots \\ (y-1) \end{matrix} \begin{bmatrix} \text{Ветви} & \\ 1 \dots y-1 & y \dots b \\ & \\ K_1 \quad \vdots & Q_2 \end{bmatrix};$$

---

[1] Матрично-топологические методы систематизированы в [18].

$$[K_r] = \begin{matrix} \text{Контуры} \\ y \\ \vdots \\ b \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 \ldots (y-1) & \vdots & y \ldots b \\ & \vdots & \\ K_1 & \vdots & 1 \\ & \vdots & \end{bmatrix}.$$

Представим матрицу-столбец токов ветвей $[I_в]$ в виде подматрицы токов ветвей дерева $[I_д]$ и подматрицы токов ветвей связи $[I_c]$

$$[I_в] = \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ y-1 \\ y \\ \vdots \\ b \end{matrix} \begin{bmatrix} I_д \\ --- \\ I_c \end{bmatrix}.$$

Матрицу-столбец напряжений ветвей также представим в виде подматрицы напряжений ветвей дерева $[U_д]$ в подматрицы напряжений ветвей связи $[U_c]$

$$[U_в] = \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ y-1 \\ y \\ \vdots \\ b \end{matrix} \begin{bmatrix} U_д \\ --- \\ U_c \end{bmatrix}.$$

По первому закону Кирхгофа $[A][I_в] = 0$ или

$$[A_1][I_д] + [A_2][I_c] = 0. \qquad (2.55)$$

Алгебраическая сумма токов в любом сечении схемы равна нулю, поэтому $[Q_r][I_в] = 0$. Следовательно,

$$\begin{bmatrix} 1 \vdots Q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_д \\ --- \\ I_c \end{bmatrix} = [1][I_д] + [Q_2][I_c] = 0. \qquad (2.56)$$

По второму закону Кирхгофа, $[K_r][U_в] = 0$, поэтому

$$\begin{bmatrix} K_1 \vdots 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_д \\ --- \\ U_c \end{bmatrix} = [K_1][U_д] + [1][U_c] = 0. \qquad (2.57)$$

Учтем, что столбец $[K_1]$ соответствует строкам $[Q_2]$, если у всех ненулевых элементов изменить знаки. Следовательно,

$$[K_1] = -[Q_2]^т \text{ и } [Q_2] = -[K_1]^т. \qquad (2.58)$$

Обозначим

$$[F] = [K_1] = -[Q_2]^т. \qquad (2.59)$$

Тогда

$$[K_r] = [F \vdots 1], \qquad (2.60)$$

$$[Q_r] = [1 \vdots -F^т]. \qquad (2.61)$$

Умножив (2.55) слева на $[A]^{-1}$, получим

$$[I_д] = -[A_1]^{-1}[A_2][I_c]. \qquad (2.62)$$



Но из (2.56) имеем $[1][I_д] = -[Q_2][I_c]$, поэтому

$$[Q_2] = [A_1]^{-1}[A_2]. \qquad (2.63)$$

Дадим обоснование еще одному соотношению

$$[A][K_r]^т = 0. \qquad (2.64)$$

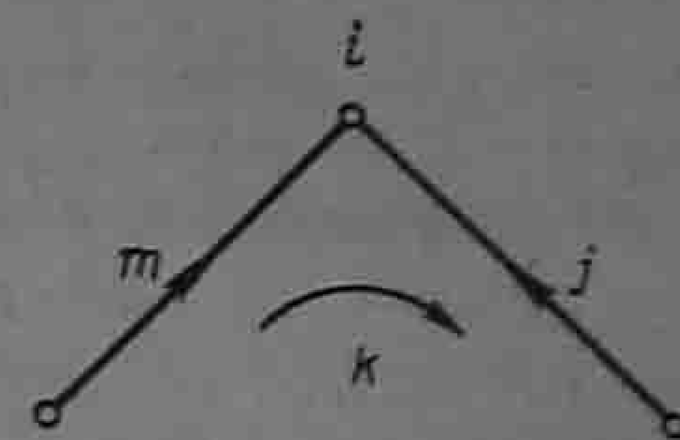



Рис. 2.37

В каждой строке этого матричного произведения складываются произведения элементов $i$-строки $a_{ij}$ на элементы $k$-столбца $b_{kj}$. Произведение $a_{ij}b_{kj}$ не будет нулем, если $j$ ветвь подходит к узлу $i$ и входит в контур $k$ (рис. 2.37). Но в контуре $k$ узел $i$ соединен не с одним, а с двумя узлами ветвями $m$ и $j$, поэтому всегда будет еще ненулевое произведение $a_{im}b_{km}$, отвечающее ветви $m$, независимо от того, как направлены стрелки на ветвях и каково направление обхода контура $k$. Следовательно, каждая строка (2.64) $a_{ij}b_{kj} + a_{im}b_{km} = 0$.

Соотношения между топологическими матрицами существенны для формализации расчета цепей на ЭВМ. Например, записав $[Q_2] = -[F]^т$, определяем $[F]$ и по ней $-[K_r]$.

**§ 2.37. Сопоставление матрично-топологического и традиционного направлений теории цепей.** В § 2.29 указывалось, что основными методами расчета электрических цепей являются МУП и МКТ. Оба эти метода могут быть применены в своей традиционной форме записи: $[G][\varphi] = [J_{kk}]$ для МУП и $[R][I_{kk}] = [E_{kk}]$ для МКТ либо в матрично-топологической в виде уравнений (2.52) и (2.54). Для задач, встречающихся в курсе ТОЭ, составление систем уравнений традиционным способом (см. § 2.13; 2.22), осуществляемое непосредственно по схеме, значительно проще, быстрее, удобнее и надежнее. Проще и быстрее выполняется и проверка составленных уравнений. Что касается решения составленных уравнений, то системы с относительно небольшим числом уравнений, записанные в традиционной форме, могут быть решены с помощью микрокалькулятора или логарифмической линейки. Системы с большим числом уравнений в том и другом случае решают с помощью ЭВМ.

Положительная сторона матрично-топологического направления теории цепей заключается в большой степени упорядоченности составления систем уравнений. Если ввести определенную иерархию ветвей электрических цепей по наличию и отсутствию в них источников питания, индуктивных и емкостных элементов, индуктивных сечений и емкостных контуров, то могут быть составлены алгоритмы, позволяющие не только составлять системы уравнений с помощью ЭВМ, но и осуществлять с их помощью так называемое машинное проектирование. Под машинным проектированием понимают числовые расчеты на ЭВМ относительно сложных систем на оптимальный в том или ином смысле режим их работы. Совокупность вопросов, относящихся к машинному проектированию, в настоящее время усиленно разрабатывается, однако многие из них

выходят за рамки курса ТОЭ и составляют предмет специальных курсов. В заключение можно сказать, что традиционное и матрично-топологическое направления теории цепей дополняют друг друга и потому студент должен владеть обоими направлениями. При выполнении повседневных инженерных расчетов и решении задач, встречающихся в курсе ТОЭ, целесообразнее пользоваться уравнениями теории цепей в их традиционной форме записи, при машинном проектировании — матрично-топологической форме.

#### Вопросы для самопроверки

1. Определите понятия "электрическая цепь", "электрическая схема", "узел", "устранимый узел", "ветвь", "источник ЭДС" и "источник тока". 2. Как выбирают положительные направления для токов ветвей и как связаны с ними положительные направления напряжений на сопротивлениях? 3. Что понимают под ВАХ? 4. Нарисуйте ВАХ реального источника, источника ЭДС, источника тока, линейного резистора. 5. Сформулируйте закон Ома для участка цепи с ЭДС, первый и второй законы Кирхгофа. Запишите в буквенном виде, сколько уравнений следует составлять по первому и сколько по второму закону Кирхгофа. Для двух законов Кирхгофа дайте по две формулировки. 6. Чем следует руководствоваться при выборе контуров, для которых следует составлять уравнения по второму закону Кирхгофа. Почему ни в один из этих контуров не должен входить источник тока? 7. Поясните этапы построения потенциальной диаграммы. 8. В чем отличие напряжения от падения напряжения? 9. Охарактеризуйте основные этапы метода контурных токов (МКТ) и метода узловых потенциалов (МУП). При каком условии число уравнений по МУП меньше числа уравнений по МКТ? 10. Сформулируйте принцип и метод наложения. 11. Сформулируйте и докажите теорему компенсации. 12. Запишите и поясните линейные соотношения в электрических цепях. 13. Что понимают под входными и взаимными проводимостями? Как их определяют аналитически и как опытным путем? 14. Покажите, что метод двух узлов есть частный случай МУП. 15. Приведите примеры, показывающие полезность преобразования звезды в треугольник и треугольника в звезду. 16. Сформулируйте теорему компенсации и теорему вариаций. 17. Дайте определение активного двухполюсника, начертите две его схемы замещения, найдите их параметры, перечислите этапы расчета методом эквивалентного генератора. 18. Запишите условие передачи максимальной мощности нагрузке. Каков при этом КПД? 19. Покажите, что если в линейной цепи изменяются сопротивления в каких-то двух ветвях, то три любых тока (напряжения) связаны линейной зависимостью вида $z = a + bx + cy$. 20. Выведите формулы преобразования треугольника в звезду, если в ветвях треугольника кроме резисторов имеются и источники ЭДС. 21. В электрической цепи известны токи в двух ветвях $k$ и $m$ ($I_k$ и $I_m$). Сопротивления в этих ветвях получили приращения $\Delta R_k$ и $\Delta R_m$. Полагая известными входные и взаимные проводимости ветвей $k$, $m$, $r$, определите приращения токов в ветвях $k$, $m$, $r$, т. е. $\Delta I_k$, $\Delta I_m$, $\Delta I_r$. 22. Какие топологические матрицы вы знаете? 23. Запишите уравнения по законам Кирхгофа с использованием матриц $[A]$ и $[K_r]$. 24. Что понимают под обобщенной ветвью? 25. Выразите токи ветвей через контурные токи и матрицу $[K_r]$. 26. Выразите напряжения ветвей через потенциалы узлов и матрицу $[A]$. 27. Выведите уравнения метода узловых потенциалов, используя матрицы $[A]$, $[g_B]$ и $[A]^T$. 28. Выведите уравнения контурных токов, используя матрицы $[K_r]$, $[R_B]$ и $[K_r]^T$. 29. Охарактеризуйте сильные и слабые стороны матрично-топологического направления теории цепей. 30. Решите задачи 1.2; 1.7; 1.10; 1.13; 1.20; 1.24; 1.33; 1.40; 1.41; 1.45.



## Глава третья

# ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ОДНОФАЗНОГО СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

**§ 3.1. Синусоидальный ток и основные характеризующие его величины.** Синусоидальный ток представляет собой ток, изменяющийся во времени по синусоидальному закону (рис. 3.1):

$$i = I_m \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \psi\right) = I_m \sin(\omega t + \psi). \qquad (3.1)$$

Максимальное значение функции называют *амплитудой*. Амплитуду тока обозначают $I_m$. *Период* $T$ — это время, за которое совершается одно полное колебание.

*Частота* равна числу колебаний в 1 с (единица частоты $f$ — герц (Гц) или $c^{-1}$)

$$f = 1/T. \qquad (3.2)$$

Угловая частота (единица угловой частоты — рад/с или $c^{-1}$)

$$\omega = 2\pi f = 2\pi/T. \qquad (3.3)$$

Аргумент синуса, т. е. $(\omega t + \psi)$, называют *фазой*. Фаза характеризует состояние колебания (числовое значение) в данный момент времени $t$.

Любая синусоидально изменяющаяся функция определяется тремя величинами: амплитудой, угловой частотой и начальной фазой.

В странах СНГ и Западной Европе наибольшее распространение получили установки синусоидального тока частотой 50 Гц, принятой в энергетике за стандартную. В США стандартной является частота 60 Гц. Диапазон частот практически применяемых синусоидальных токов очень широк: от долей герца, например в геологоразведке, до миллиардов герц в радиотехнике.

Синусоидальные токи и ЭДС сравнительно низких частот (до нескольких килогерц) получают с помощью синхронных генераторов (их изучают в курсе электрических машин). Синусоидальные токи и ЭДС высоких частот получают с помощью ламповых или полупроводниковых генераторов (подробно рассматриваемых в

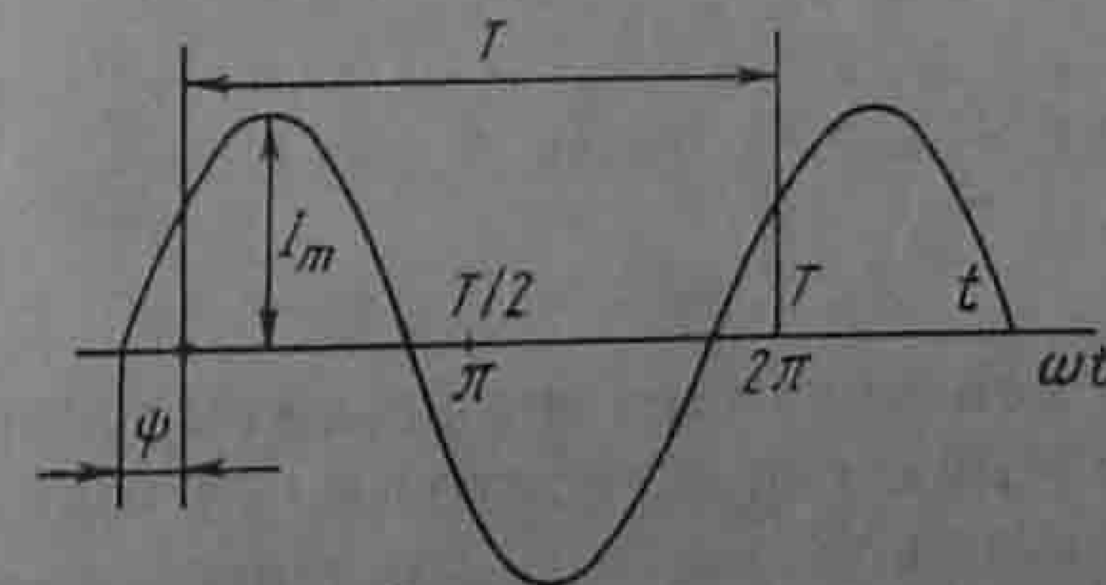



Рис. 3.1

курсе радиотехники и менее подробно — в курсе ТОЭ). Источник синусоидальной ЭДС и источник синусоидального тока обозначают на электрических схемах так же, как и источники постоянной ЭДС и тока, но обозначают их $e$ и $j$ [или $e(t)$ и $j(t)$].

**§ 3.2. Среднее и действующее значения синусоидально изменяющейся величины.** Под *средним значением* синусоидально изменяющейся величины понимают ее среднее значение за полпериода. Среднее значение тока

$$I_{ср} = \frac{1}{T/2}\int_0^{T/2} I_m \sin \omega t dt = \frac{2}{\pi} I_m , \tag{3.4}$$

т. е. среднее значение синусоидального тока составляет $2/\pi = 0{,}638$ от амплитудного. Аналогично, $E_{ср} = 2E_m/\pi$; $U_{ср} = 2U_m/\pi$.

Широко применяют понятие *действующего значения* синусоидально изменяющейся величины (его называют также эффективным или среднеквадратичным). Действующее значение тока

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I_m^2 \sin^2 \omega t dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0{,}707 I_m . \tag{3.5}$$

Следовательно, действующее значение синусоидального тока равно 0,707 от амплитудного. Аналогично,

$$E = E_m/\sqrt{2} \text{ и } U = U_m/\sqrt{2} .$$

Можно сопоставить тепловое действие синусоидального тока с тепловым действием постоянного тока, текущего то же время по тому же сопротивлению.

Количество теплоты, выделенное за один период синусоидальным током,

$$\int_0^T Ri^2 dt = RI_m^2 \frac{T}{2} .$$

Выделенная за то же время постоянным током теплота равна $RI^2_{пост} T$. Приравняем их:

$$RI_m^2 \frac{T}{2} = RI^2_{пост} T \text{ или } I_{пост} = I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} .$$

Таким образом, действующее значение синусоидального тока $I$ численно равно значению такого постоянного тока, который за время, равное периоду синусоидального тока, выделяет такое же количество теплоты, что и синусоидальный ток.



Большинство измерительных приборов показывает действующее значение измеряемой величины[1].

**§ 3.3. Коэффициент амплитуды и коэффициент формы.** *Коэффициент амплитуды* $k_а$ — это отношение амплитуды периодически изменяющейся функции к ее действующему значению. Для синусоидального тока

$$k_а = I_m / I = \sqrt{2} . \tag{3.6}$$

Под *коэффициентом формы* $k_ф$ понимают отношение действующего значения периодически изменяющейся функции к ее среднему за полпериода значению. Для синусоидального тока

$$k_ф = \frac{I}{I_{ср}} = \frac{I_m/\sqrt{2}}{2I_m/\pi} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1{,}11 .^2 \tag{3.7}$$

**§ 3.4. Изображение синусоидально изменяющихся величин векторами на комплексной плоскости. Комплексная амплитуда. Комплекс действующего значения.** На рис. 3.2 дана комплексная плоскость, на которой можно изобразить комплексные числа. Комплексное число имеет действительную (вещественную) и мнимую части. По оси абсцисс комплексной плоскости откладывают действительную часть комплексного числа, а по оси ординат — мнимую часть. На оси действительных значений ставим $+1$, а на оси мнимых значений $+j$ ($j = \sqrt{-1}$).

Из курса математики известна формула Эйлера

$$e^{j\alpha} = \cos \alpha + j \sin \alpha . \tag{3.8}$$

Комплексное число $e^{j\alpha}$ изображают на комплексной плоскости вектором, численно равным единице и составляющим угол $\alpha$ с осью вещественных значений (осью $+1$). Угол $\alpha$ отсчитываем против ча-

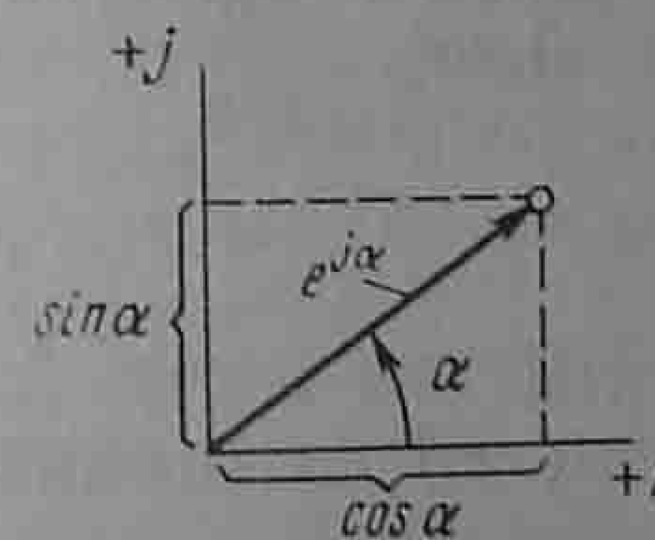



Рис. 3.2

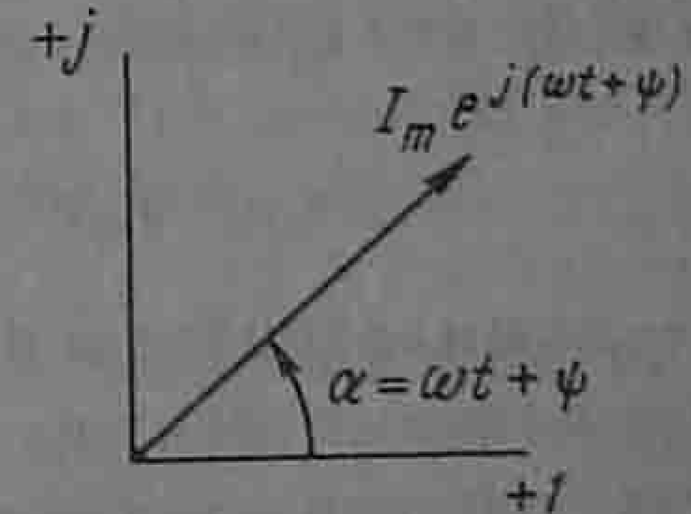



Рис. 3.3

[1] Действующее значение измеряют приборами электромагнитной, электродинамической и тепловой систем. Принцип действия измерительных приборов различных систем изучают в курсе электротехнических измерений.

[2] Для несинусоидальных периодических токов $k_а \neq \sqrt{2}$, $k_{ср} \neq 1{,}11$. Это отклонение косвенно свидетельствует о том, насколько несинусоидальный ток отличается от синусоидального.

совой стрелки от оси $+1$. Модуль функции

$$|e^{j\alpha}| = \sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = 1.$$

Проекция функции $e^{j\alpha}$ на ось $+1$ равна $\cos\alpha$, а на ось $+j$ равна $\sin\alpha$. Если вместо функции $e^{j\alpha}$ взять функцию $I_m e^{j\alpha}$, то

$$I_m e^{j\alpha} = I_m\cos\alpha + jI_m\sin\alpha.$$

На комплексной плоскости эта функция, так же как и функция $e^{j\alpha}$, изображается под углом $\alpha$ к оси $+1$, но длина вектора будет в $I_m$ раз больше.

Угол $\alpha$ в формуле (3.8) может быть любым. Положим, что $\alpha = \omega t + \psi$, т. е. угол $\alpha$ изменяется прямо пропорционально времени. Тогда

$$I_m e^{j(\omega t + \psi)} = I_m\cos(\omega t + \psi) + jI_m\sin(\omega t + \psi). \tag{3.9}$$

Слагаемое $I_m\cos(\omega t + \varphi)$ представляет собой действительную часть (Re) выражения $I_m e^{j(\omega t + \psi)}$

$$I_m\cos(\omega t + \psi) = \operatorname{Re} I_m e^{j(\omega t + \psi)}, \tag{3.10}$$

а функция $I_m\sin(\omega t + \psi)$ есть коэффициент при мнимой части (Im) выражения $I_m e^{j(\omega t + \psi)}$

$$i = I_m\sin(\omega t + \psi) = \operatorname{Im} I_m e^{j(\omega t + \psi)}. \tag{3.10а}$$

Таким образом, синусоидально изменяющийся ток $i$ [ср. (3.1) и (3.10а)] можно представить как $\operatorname{Im} I_m e^{j(\omega t + \psi)}$ или, что то же самое, как проекцию вращающегося вектора $I_m e^{j(\omega t + \psi)}$ на ось $+j$ (рис. 3.3).

Исторически сложилось так, что в радиотехнической литературе за основу обычно принимают не синусоиду, а косинусоиду и потому пользуются формулой (3.10).

С целью единообразия принято на комплексной плоскости изображать векторы синусоидально изменяющихся во времени величин для момента времени $\omega t = 0$. При этом вектор

$$I_m e^{j(\omega t + \psi)} = I_m e^{j\psi} = \dot I_m, \tag{3.11}$$

где $\dot I_m$ — комплексная величина, модуль которой равен $I_m$; $\psi$ — угол, под которым вектор $\dot I_m$ проведен к оси $+1$ на комплексной плоскости, равный начальной фазе.

Величину $\dot I_m$ называют *комплексной амплитудой* тока $i$. Комплексная амплитуда изображает ток $i$ на комплексной плоскости для момента времени $\omega t = 0$. Точка, поставленная над током $\dot I$ или напряжением $\dot U$, означает, что эта величина во времени изменяется синусоидально.

Поясним сказанное. Пусть ток $i = 8\sin(\omega t + 20°)$ А. Запишем выражение для комплексной амплитуды этого тока. В данном слу-



чае $I_m = 8$ А, $\psi = 20°$. Следовательно, $\dot I_m = 8e^{j20°}$ А. Пусть комплексная амплитуда тока $\dot I_m = 25e^{-j30°}$ А. Запишем выражение для мгновенного значения этого тока.

Для перехода от комплексной амплитуды к мгновенному значению умножим $\dot I_m$ на $e^{j\omega t}$ и возьмем коэффициент при мнимой части от полученного произведения [см. формулу (3.10а)]:

$$i = \operatorname{Im} 25e^{-j30°}e^{j\omega t} = \operatorname{Im} 25e^{j(\omega t - 30°)} = 25\sin(\omega t - 30°).$$

Под комплексом действующего значения тока или комплексом тока (комплексным током) $\dot I$ понимают частное от деления комплексной амплитуды на $\sqrt{2}$:

$$\dot I = \frac{\dot I_m}{\sqrt{2}} = \frac{I_m e^{j\psi}}{\sqrt{2}} = Ie^{j\psi}. \tag{3.12}$$

**Пример 29.** Записать выражение комплекса действующего значения тока $\dot I_m = 8e^{j20°}$ А.

Р е ш е н и е. Комплекс действующего значения тока $\dot I = 8e^{j20°}/\sqrt{2} = 5{,}67e^{j20°}$ А.

**§ 3.5. Сложение и вычитание синусоидальных функций времени на комплексной плоскости. Векторная диаграмма.** Положим, что необходимо сложить два тока ($i_1$ и $i_2$) одинаковой частоты. Сумма их дает некоторый ток той же частоты:

$$i = i_1 + i_2;$$

$$i_1 = I_{1m}\sin(\omega t + \psi_1);\ i_2 = I_{2m}\sin(\omega t + \psi_2);$$

$$i = I_m\sin(\omega t + \psi).$$

Требуется найти амплитуду $I_m$ и начальную фазу $\psi$ тока $i$. С этой целью ток $i_1$ изобразим на комплексной плоскости (рис. 3.4) вектором $\dot I_{1m} = I_{1m}e^{j\psi_1}$, а ток $i_2$ — вектором $\dot I_{2m} = I_{2m}e^{j\psi_2}$. Геометрическая сумма векторов $\dot I_{1m}$ и $\dot I_{2m}$ даст комплексную амплитуду суммарного тока $\dot I_m = I_m e^{j\psi}$. Амплитуда тока $I_m$ определяется длиной суммарного вектора, а начальная фаза $\psi$ — углом, образованным этим вектором и осью $+1$.

Для определения разности двух токов (ЭДС, напряжений) следует на комплексной плоскости произвести не сложение, а вычитание соответствующих векторов.

Обратим внимание на то, что если бы векторы $\dot I_{1m}$, $\dot I_{2m}$ и $\dot I_m$ стали вращаться вокруг начала координат с угловой скоростью $\omega$, то взаимное расположение векторов относительно друг друга осталось бы без изменений.

*Векторной диаграммой* называют совокупность векторов на комплексной плоскости, изображающих синусоидально изменяющиеся функции времени одной и той же частоты и построенных с

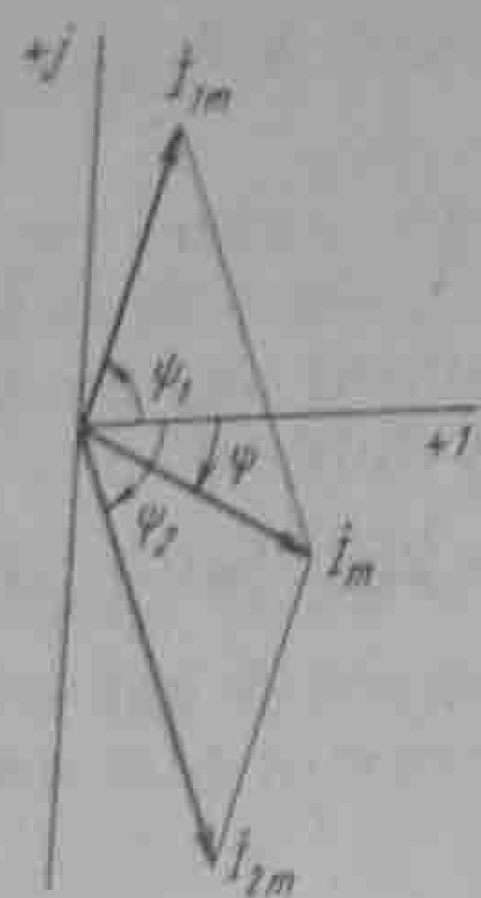



Рис. 3.4

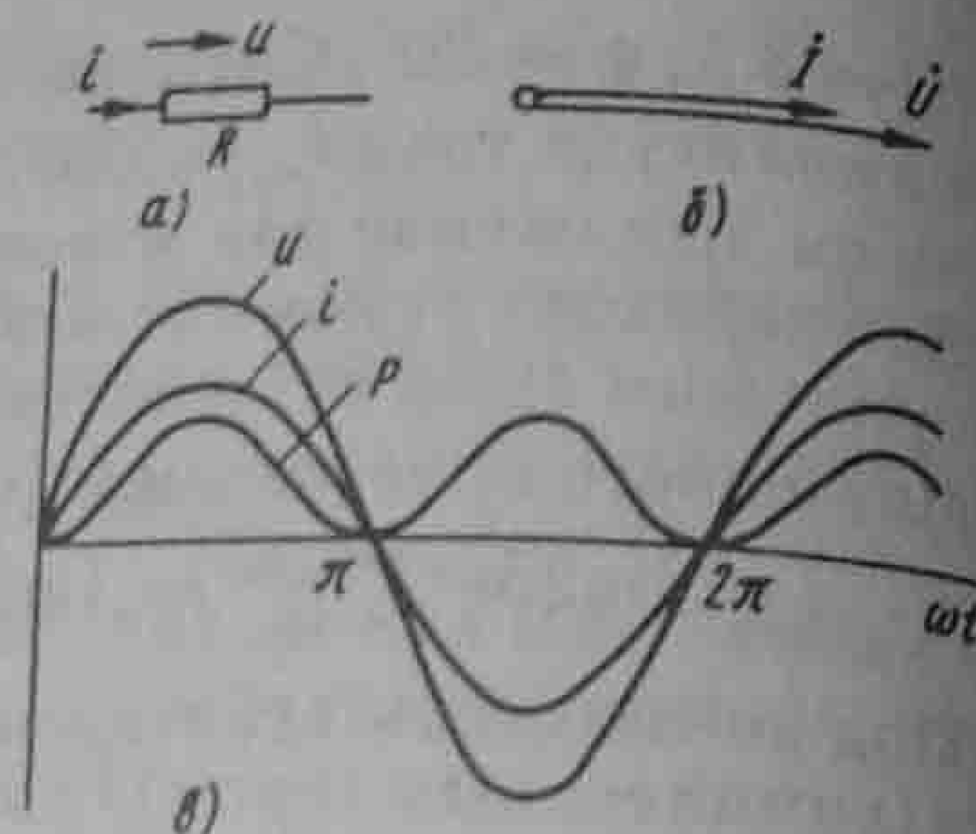



Рис. 3.5

соблюдением правильной ориентации их относительно друг друга по фазе. Пример векторной диаграммы дан на рис. 3.4.

**§ 3.6. Мгновенная мощность.** Протекание синусоидальных токов по участкам электрической цепи сопровождается потреблением энергии от источников. Скорость поступления энергии характеризуется мощностью. Под мгновенным значением мощности, или под *мгновенной мощностью*, понимают произведение мгновенного значения напряжения $u$ на участке цепи на мгновенное значение тока $i$, протекающего по этому участку:

$$p = ui, \qquad (3.13)$$

где $p$ — функция времени.

Перед тем как приступить к изучению основ расчета сложных цепей синусоидального тока, рассмотрим соотношения между токами и напряжениями в простейших цепях, векторные диаграммы для них и кривые мгновенных значений различных величин. Элементами реальных цепей синусоидального тока являются резисторы, индуктивные катушки и конденсаторы. Протеканию синусоидального тока оказывают сопротивление резистивные элементы (резисторы) — в них выделяется энергия в виде теплоты — и реактивные элементы (индуктивные катушки и конденсаторы) — они то запасают энергию в магнитном (электрическом) поле, то отдают её. Рассмотрим поведение этих элементов.

**§ 3.7. Резистивный элемент в цепи синусоидального тока.** Как говорилось в § 1.8, резистивный элемент — это идеализированный схемный элемент, учитывающий выделение теплоты в том или ином элементе реальной электрической цепи. Его характеризуют зависимостью напряжения $u$ на нем от протекающего по нему тока $i$ (вольт-амперной характеристикой) или сопротивлением $R = u/i$. На схемах его изображают, как и резистор, в виде прямоугольника (рис. 3.5, *а*). Положительные направления отсчета $u$ и $i$ совпадают.



Пусть $i = I_m \sin\omega t$. По закону Ома,

$$u = iR = RI_m \sin\omega t = U_m \sin\omega t; \qquad (3.14)$$

$$U_m = RI_m.$$

Векторная диаграмма комплекса тока $\dot I$ и совпадающего с ним по фазе комплекса напряжения $\dot U$ показана на рис. 3.5, *б*.

На рис. 3.5, *в* даны кривые мгновенных значений тока $i$, напряжения $u$ и мощности $p = U_m I_m \sin^2\omega t = \frac{U_m I_m}{2}(1 - \cos 2\omega t)$.

Мгновенная мощность $p$ имеет постоянную составляющую $\frac{U_m I_m}{2}$ и составляющую $\frac{U_m I_m}{2}\cos 2\omega t$, изменяющуюся с частотой $2\omega$. Потребляемая от источника питания за время $dt$ энергия равна $p dt$.

**§ 3.8. Индуктивный элемент в цепи синусоидального тока.** Индуктивный элемент позволяет учитывать явление наведения ЭДС, изменяющимся во времени магнитным потоком, и явление накопления энергии в магнитном поле реальных элементов электрической цепи. Его характеризуют зависимостью потокосцепления $\psi$ от тока $i$ (вебер-амперной характеристикой) или индуктивностью $L = \psi/i$. На электрических схемах индуктивный элемент изображают, как показано на рис. 3.6, *а*. На схеме замещения реальную индуктивную катушку можно представить в виде последовательно соединенных индуктивного и резистивного элементов.

Выделим индуктивный элемент (рис. 3.6, *а*). Положительные направления тока $i$ через него, ЭДС самоиндукции $e_L$ и напряжение на нем $u_{ab}$ указаны на рис. 3.6, *а*. Если $i = I_m \sin\omega t$, то $e_L = -L\frac{di}{dt} = -\omega L I_m \cos\omega t = \omega L I_m \sin(\omega t - 90°)$. Определим разность потенциалов между точками $a$ и $b$. При перемещении от точки $b$ к точке $a$ идем встречно ЭДС $e_L$, поэтому $\varphi_a = \varphi_b - e_L$ и $u_{ab} = \varphi_a - \varphi_b = -e_L = L\frac{di}{dt}$. В дальнейшем напряжение на индуктивном элементе будем обозначать $u_L$ или, просто, $u$ без индекса

$$u_{ab} = u_L = u = -e_L. \qquad (3.15)$$

Следовательно,

$$u = \omega L I_m \sin(\omega t + 90°) = U_m \sin(\omega t + 90°); \qquad (3.16)$$

$$U_m = \omega L I_m.$$

Произведение $\omega L$ обозначается $X_L$, называется *индуктивным сопротивлением* и измеряется в омах (Ом):

$$X_L = \omega L. \qquad (3.17)$$

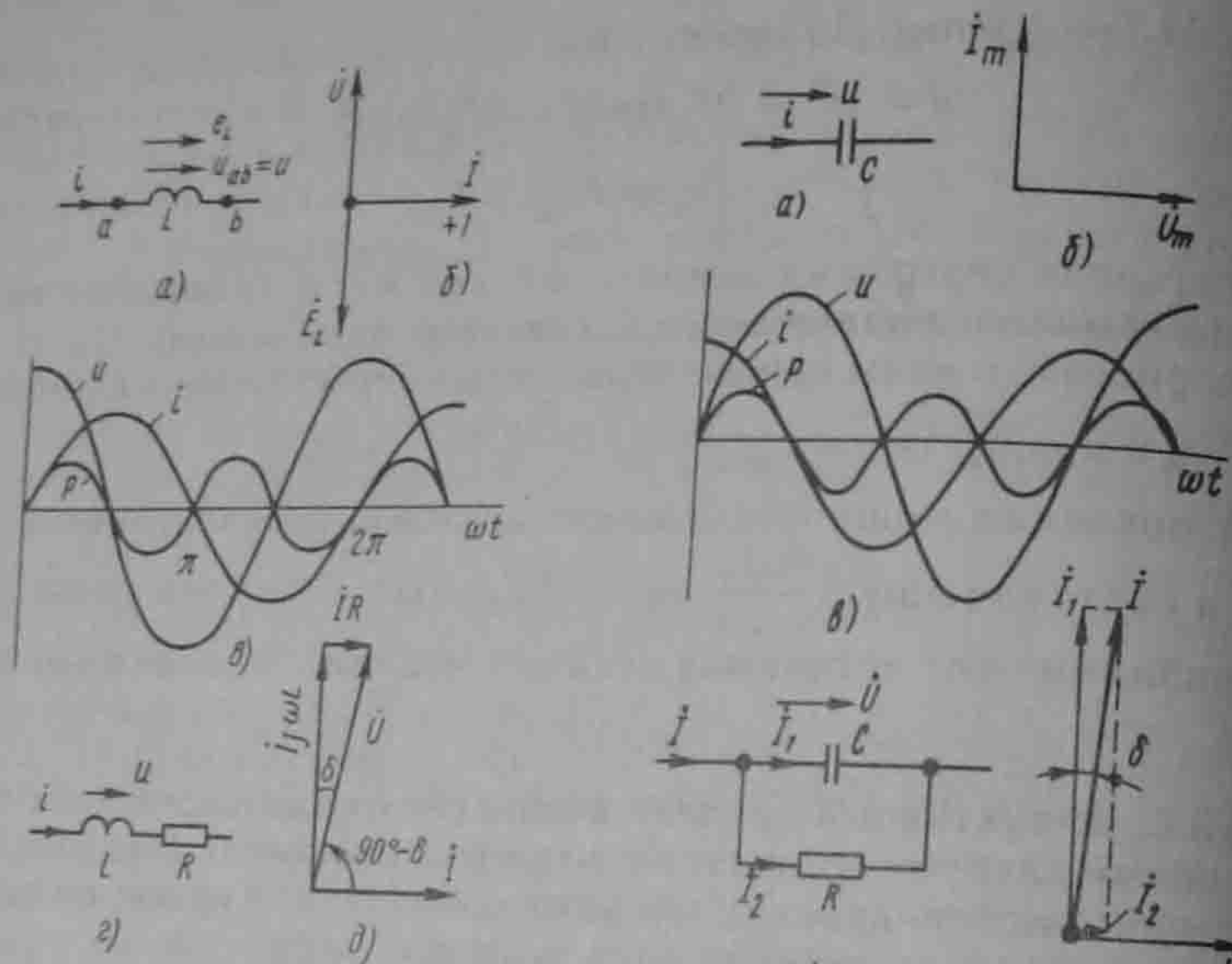



Рис. 3.6

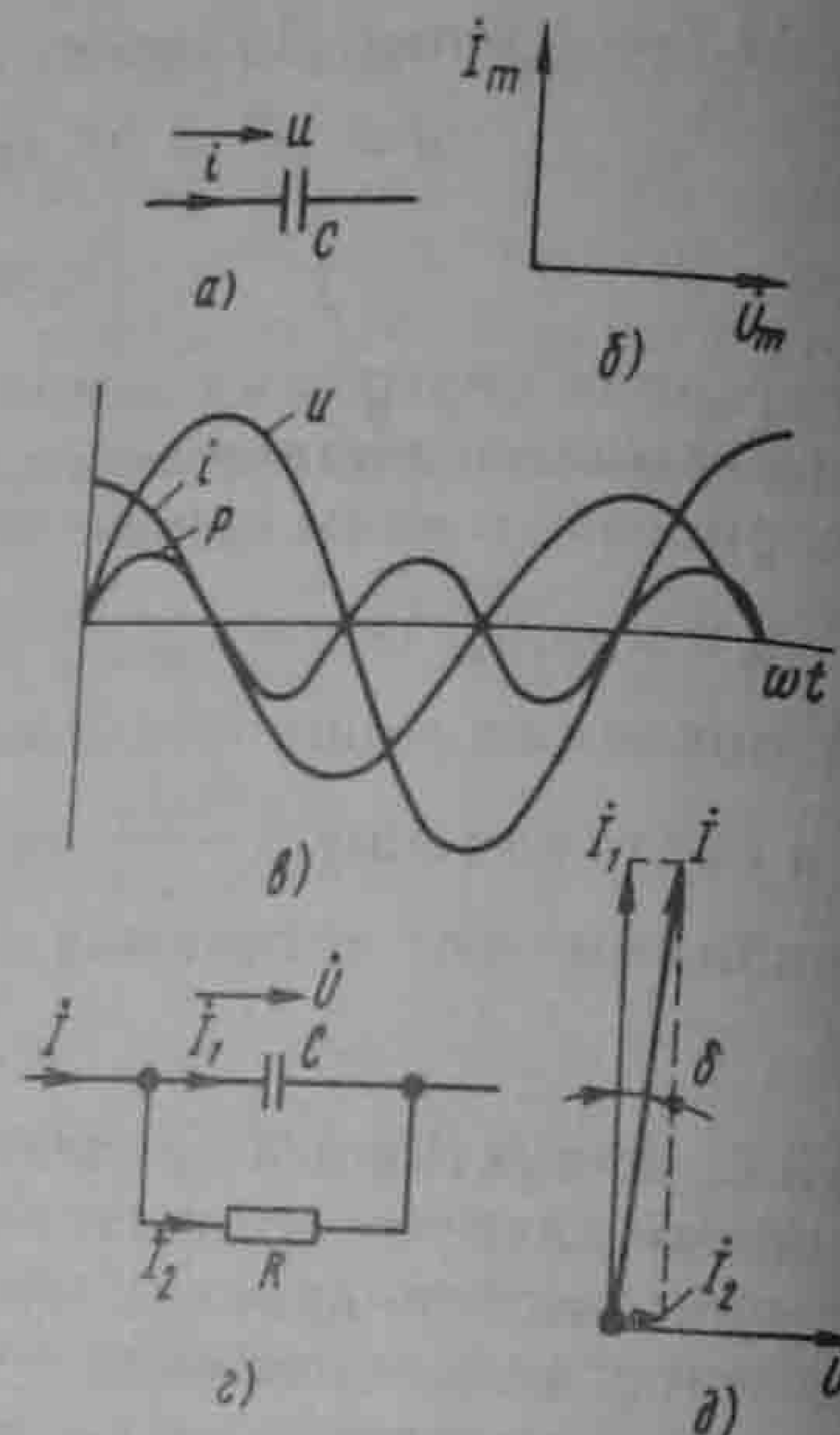



Рис. 3.7

Таким образом, индуктивный элемент (индуктивная катушка, у которой $R = 0$) при синусоидальном токе обладает сопротивлением, модуль которого $X_L = \omega L$ прямо пропорционален частоте ω [см. (3.16)] — на рис. 3.6, *б* вектор напряжений $\dot{U}$ опережает вектор тока $\dot{I}$ на 90°. Комплекс ЭДС самоиндукции $\dot{E}_L$ находится в противофазе с комплексом напряжений $\dot{U}$.

Графики мгновенных значений *i*, *u*, *p* изображены на рис. 3.6,*в*. Мгновенная мощность

$$p = ui = U_m \cos\omega t I_m \sin\omega t = \frac{U_m I_m}{2} \sin 2\omega t \qquad (3.18)$$

проходит через нулевое значение, когда через нуль проходит либо *i*, либо *u*. За первую четверть периода, когда *u* и *i* положительны, *p* также положительна. Площадь, ограниченная кривой *p* и осью абсцисс за это время, представляет собой энергию, которая взята от источника питания на создание энергии магнитного поля в индуктивной катушке. Во вторую четверть периода, когда ток в цепи уменьшается от максимума до нуля, энергия магнитного поля отдается обратно источнику питания, при этом мгновенная мощность отрицательна. За третью четверть периода у источника снова забирается энергия, за четвертую отдается и т. д. Следовательно, энергия периодически то забирается индуктивной катушкой от источника, то отдается ему обратно.



Падение напряжения на реальной индуктивной катушке равно сумме напряжений на $L$ и на $R$ (рис. 3.6, *д*). Как видно из этого рисунка, угол между напряжением $\dot{U}$ на катушке и током $\dot{I}$ равен $90° - \delta$, причем $\operatorname{tg}\delta = R/\omega L = 1/Q_L$, где $Q_L$ — добротность реальной индуктивной катушки. Чем больше $Q_L$, тем меньше δ.

**§ 3.9. Емкостный элемент в цепи синусоидального тока.** Емкостный элемент — это идеализированный схемный элемент, позволяющий учесть протекание токов смещения и явление накопления энергии в электрическом поле реальных элементов электрической цепи. Его характеризует зависимость заряда *q* от напряжения *u* (кулон-вольтная характеристика) или емкость $C = q/u$. Графическое изображение емкостного элемента такое же, что и изображение конденсатора — рис. 3.7, *а*. Положительные направления отсчета *u* и *i* совпадают. Если приложенное к конденсатору напряжение *u* не изменяется во времени, то заряд $q = Cu$ на одной его обкладке и заряд $-q$ на другой ($C$ — емкость конденсатора) неизменны, и ток через конденсатор не проходит ($i = \mathrm{d}q/\mathrm{d}t = 0$). Если же напряжение на конденсаторе изменяется во времени, например по синусоидальному закону (рис. 3.7, *а*):

$$u = U_m \sin\omega t, \qquad (3.19)$$

то по синусоидальному закону будет меняться и заряд *q* конденсатора: $q = Cu = CU_m \sin\omega t$, т. е. конденсатор будет периодически перезаряжаться. Периодическая перезарядка конденсатора сопровождается протеканием через него зарядного тока:

$$i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \omega C U_m \cos\omega t = \frac{U_m}{1/\omega C} \sin(\omega t + 90°). \qquad (3.19а)$$

Из сопоставления (3.19) и (3.19а) видно, что ток через конденсатор опережает по фазе напряжение на конденсаторе на 90°. Поэтому на векторной диаграмме (рис. 3.7, *б*) вектор $\dot{I}_m$ опережает вектор напряжения $\dot{U}_m$ на 90°. Амплитуда тока $I_m$ равна амплитуде напряжения $U_m$, деленной на емкостное сопротивление:

$$X_C = \frac{1}{\omega C}, \qquad (3.20)$$

$$I_m = U_m / X_C. \qquad (3.21)$$

Емкостное сопротивление обратно пропорционально частоте. Единица емкостного сопротивления — Ом. Графики мгновенных значений *u*, *i*, *p* изображены на рис. 3.7, *в*. Мгновенная мощность

$$p = \frac{U_m I_m}{2} \sin 2\omega t. \qquad (3.22)$$

За первую четверть периода конденсатор потребляет от источника питания энергию, которая идет на создание электрического

поля в нем. Во вторую четверть периода напряжение на конденсаторе уменьшается от максимума до нуля, и запасенная в электрическом поле энергия отдается источнику (мгновенная мощность отрицательна). За третью четверть периода энергия снова запасается, за четвертую отдается и т. д.

Если проинтегрировать по времени обе части равенства

$$i = C\frac{du}{dt}, \qquad (3.23)$$

то получим

$$u = \frac{1}{C}\int i\,dt. \qquad (3.24)$$

Равенство (3.24) позволяет определить напряжение на конденсаторе через ток по конденсатору. Ток через реальный конденсатор, пластины которого разделены твердым или жидким диэлектриком, в котором имеются тепловые потери, обусловленные вязким трением дипольных молекул и другими причинами, в расчете можно учесть по схеме (рис. 3.7, *г*). Результирующий ток $\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2$.

Ток $\dot{I}_1$ опережает $\dot{U}$ на 90°, а ток $\dot{I}_2$ совпадает с $\dot{U}$ по фазе (рис. 3.7, *д*). Угол $\delta$ называют *углом потерь*; $\operatorname{tg}\delta = 1/Q_C$, где $Q_C$ — добротность конденсатора, $\operatorname{tg}\delta$ зависит от типа диэлектрика и от частоты и изменяется от нескольких секунд до нескольких градусов.

**§ 3.10. Умножение вектора на $j$ и $-j$.** Пусть есть некоторый вектор $\dot{A} = Ae^{j\varphi_a}$ (рис. 3.8). Умножение его на $j$ дает вектор, по модулю равный $A$, но повернутый в сторону опережения (против часовой стрелки) по отношению к исходному вектору $\dot{A}$ на 90°. Умножение $\dot{A}$ на $-j$ поворачивает вектор $\dot{A}$ на 90° в сторону отставания (по часовой стрелке) также без изменения его модуля. Чтобы убедиться в этом, представим векторы $j$ и $-j$ в показательной форме:

$$j = 1\cdot e^{j90^\circ} = e^{j90^\circ}; \qquad (3.25)$$

$$-j = 1\cdot e^{-j90^\circ} = e^{-j90^\circ}. \qquad (3.26)$$

Тогда

$$\dot{A}j = Ae^{j\varphi_a}e^{j90^\circ} = Ae^{j(\varphi_a + 90^\circ)}; \qquad (3.27)$$

$$-\dot{A}j = Ae^{j\varphi_a}e^{-j90^\circ} = Ae^{j(\varphi_a - 90^\circ)}. \qquad (3.28)$$

Из (3.27) следует, что вектор $j\dot{A}$, по модулю равный $A$, составляет с осью +1 комплексной плоскости угол $\varphi_a + 90°$, т. е. повернут против часовой стрелки на 90° по отношению к вектору $\dot{A}$.

Согласно (3.28) умножение вектора $\dot{A}$ на $-j$ дает вектор, по модулю равный $A$, но повернутый по отношению к нему на 90° по часовой стрелке.



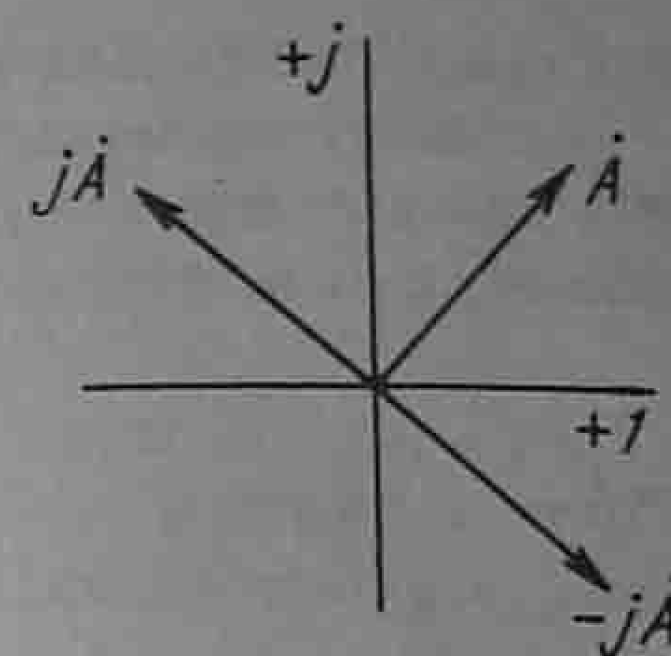


Рис. 3.8

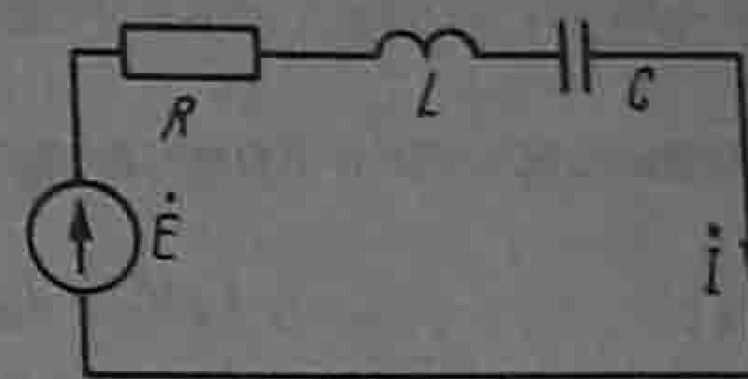


Рис. 3.9

**§ 3.11. Основы символического метода расчета цепей синусоидального тока.** Очень широкое распространение на практике получил символический, или комплексный, метод расчета цепей синусоидального тока.

Сущность символического метода расчета состоит в том, что при синусоидальном токе можно перейти от уравнений, составленных для мгновенных значений и являющихся дифференциальными уравнениями [см., например, (2.29)], к алгебраическим уравнениям, составленным относительно комплексов тока и ЭДС. Этот переход основан на том, что в уравнении, составленном по законам Кирхгофа для установившегося процесса, мгновенное значение тока $i$ заменяют комплексной амплитудой тока $\dot{I}_m$; мгновенное значение напряжения на резисторе сопротивлением $R$, равное $Ri$, — комплексом $R\dot{I}_m$, по фазе совпадающим с током $\dot{I}_m$; мгновенное значение напряжения на индуктивной катушке $u_L = L\frac{di}{dt}$ — комплексом $\dot{I}_m j\omega L$, опережающим ток на 90°; мгновенное значение напряжения на конденсаторе $u_C = \frac{1}{C}\int i\,dt$ — комплексом $\dot{I}_m\left(\frac{-j}{\omega C}\right)$, отстающим от тока на 90°; мгновенное значение ЭДС $e$ — комплексом $\dot{E}_m$. Справедливость замены $u_L = L\frac{di}{dt}$ на $\dot{I}_m j\omega L$ следует из § 3.7 и 3.8.

В § 3.8 было показано, что амплитуда напряжения на $L$ равна произведению амплитуды тока на $X_L = \omega L$. Множитель $j$ свидетельствует о том, что вектор напряжения на индуктивной катушке опережает вектор тока на 90°.

Аналогично, из § 3.9 следует, что амплитуда напряжения на конденсаторе равна амплитуде тока, умноженной на $X_C = 1/\omega C$. Отставание напряжения на конденсаторе от протекающего по ней тока на 90° объясняет наличие множителя $-j$.

Например, для схемы рис. 3.9 уравнение для мгновенных значений можно записать так:

$$u_R + u_L + u_C = e,$$

или

$$iR + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i\,dt = e. \qquad (3.29)$$

Запишем его в комплексной форме:

$$\dot{I}_m R + \dot{I}_m j\omega L + \dot{I}_m\left(\frac{-j}{\omega C}\right) = \dot{E}_m.$$

Вынесем $\dot{I}_m$ за скобку:

$$\dot{I}_m\left(R + j\omega L - \frac{j}{\omega C}\right) = \dot{E}_m. \qquad (3.30)$$

Следовательно, для схемы рис. 3.9

$$\dot{I}_m = \frac{\dot{E}_m}{R + j\omega L - \dfrac{j}{\omega C}}. \qquad (3.31)$$

Это уравнение позволяет найти комплексную амплитуду тока $\dot{I}_m$ через комплексную амплитуду ЭДС $\dot{E}_m$ и сопротивления цепи $R$, $\omega L$ и $1/\omega C$.

Метод называют *символическим* потому, что токи и напряжения заменяют их комплексными изображениями или символами. Так, $R\dot{I}_m$ — это изображение или символ падения напряжения $iR$; $j\omega L\dot{I}_m$ — изображение или символ падения напряжения $u_L = L\frac{di}{dt}$; $-\frac{j}{\omega C}\dot{I}_m$ — изображение или символ падения напряжения на конденсаторе $\frac{1}{C}\int i\,dt$.

**§ 3.12. Комплексное сопротивление. Закон Ома для цепи синусоидального тока.** Множитель $R + j\omega L - (j/\omega C)$ в уравнении (3.30) представляет собой комплекс, имеет размерность сопротивления и обозначается через $Z$. Его называют *комплексным сопротивлением*:

$$Z = ze^{j\varphi} = R + j\omega L - \frac{j}{\omega C}. \qquad (3.32)$$

Как и всякий комплекс, $Z$ можно записать в показательной форме. Модуль комплексного сопротивления принято обозначать через $z$. Точку над $Z$ не ставят, потому что принято ставить ее только над такими комплексными величинами, которые отображают синусоидальные функции времени.

Уравнение (3.30) можно записать так: $\dot{I}_m Z = \dot{E}_m$. Разделим обе его части на $\sqrt{2}$ и перейдем от комплексных амплитуд $\dot{I}_m$ и $\dot{E}_m$ к комплексам действующих значений $\dot{I}$ и $\dot{E}$:

$$\dot{I} = \dot{E}/Z. \qquad (3.33)$$



Уравнение (3.30) представляет собой *закон Ома для цепи синусоидального тока*.

В общем случае $Z$ имеет некоторую действительную часть $R$ и некоторую мнимую часть $jX$:

$$Z = R + jX, \qquad (3.34)$$

где $R$ — активное сопротивление; $X$ — реактивное сопротивление.

Для схемы (см. рис. 3.9) реактивное сопротивление

$$X = \omega L - 1/\omega C.$$

**§ 3.13. Комплексная проводимость.** Под комплексной проводимостью $Y$ понимают величину, обратную комплексному сопротивлению $Z$:

$$Y = 1/Z = g - jb = ye^{-j\varphi}. \qquad (3.35)$$

Единица комплексной проводимости — См (Ом$^{-1}$). Действительную часть ее обозначают через $g$, мнимую — через $b$. Так как

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R + jX} = \frac{R - jX}{R^2 + X^2} = \frac{R}{R^2 + X^2} - j\frac{X}{R^2 + X^2} = g - jb,$$

то

$$g = \frac{R}{R^2 + X^2}; \quad b = \frac{X}{R^2 + X^2}; \quad y = \sqrt{g^2 + b^2}. \qquad (3.36)$$

Если $X$ положительно, то и $b$ положительно. При $X$ отрицательном $b$ также отрицательно.

При использовании комплексной проводимости закон Ома (3.33) записывают так:

$$\dot{I} = \dot{U}Y, \qquad (3.33а)$$

или

$$\dot{I} = \dot{U}g - j\dot{U}b = \dot{I}_a + \dot{I}_r,$$

где $\dot{I}_a$ — активная составляющая тока; $\dot{I}_r$ — реактивная составляющая тока; $\dot{U}$ — напряжение на участке цепи, сопротивление которого равно $Z$.

**§ 3.14. Треугольник сопротивлений и треугольник проводимостей.** Из (3.34) следует, что модуль комплексного сопротивления

$$z = \sqrt{R^2 + X^2}. \qquad (3.37)$$

Следовательно, $z$ можно представить как гипотенузу прямоугольного треугольника (рис. 3.10) — треугольника сопротивлений, один катет которого равен $R$, другой — $X$. При этом

$$\mathrm{tg}\varphi = X/R. \qquad (3.38)$$

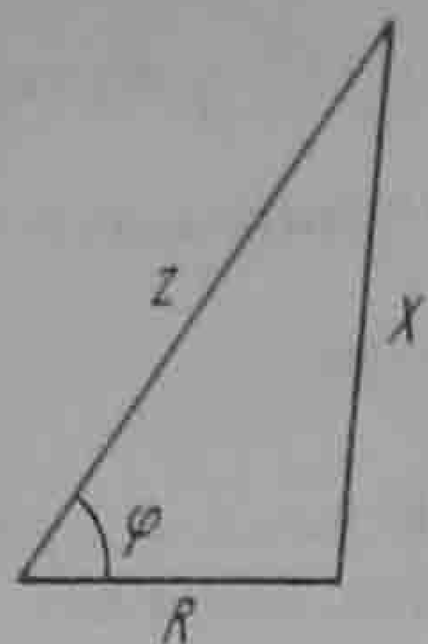



Рис. 3.10

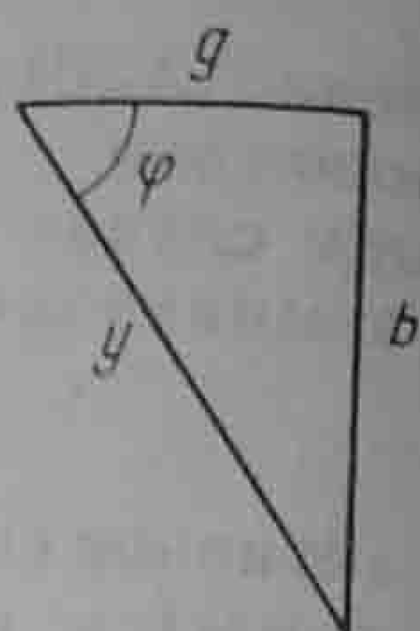



Рис. 3.11

Аналогичным образом модуль комплексной проводимости в соответствии с (3.36) $y = \sqrt{g^2 + b^2}$. Следовательно, $y$ есть гипотенуза прямоугольного треугольника (рис. 3.11), катетами которого являются активная $g$ и реактивная $b$ проводимости:

$$\operatorname{tg}\varphi = b/g. \tag{3.39}$$

Треугольник сопротивлений дает графическую интерпретацию связи между модулем полного сопротивления $z$ и активным и реактивным сопротивлениями цепи; треугольник проводимостей — интерпретацию связи между модулем полной проводимости $y$ и ее активной и реактивной составляющими.

**§ 3.15. Работа с комплексными числами.** При расчете цепей переменного тока приходится иметь дело с комплексными числами: сопротивление участка цепи или цепи в целом — это комплекс; проводимость — комплекс; ток, напряжение, ЭДС — комплексы. Для нахождения тока по закону Ома нужно комплекс ЭДС разделить на комплекс сопротивления.

Из курса математики известно, что комплексное число можно представить в трех формах записи: алгебраической $a + jb$, показательной $ce^{j\varphi}$ и тригонометрической $c\cos\varphi + jc\sin\varphi$.

Сложение двух и большего числа комплексов удобнее производить, пользуясь алгебраической формой записи. При этом отдельно складываются их действительные и мнимые части:

$$(a_1 + jb_1) + (a_2 + jb_2) + (a_3 - jb_3) = (a_1 + a_2 + a_3) + j(b_1 + b_2 - b_3).$$

Деление и умножение комплексных чисел целесообразно производить, пользуясь показательной формой записи. Например, нужно разделить комплекс $c_1e^{j\varphi_1}$ на комплекс $c_2e^{j\varphi_2}$. В результате деления будет получен комплекс

$$c_3e^{j\varphi_3} = \frac{c_1e^{j\varphi_1}}{c_2e^{j\varphi_2}} = \frac{c_1}{c_2}e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

Модуль результирующего комплекса $c_3$ равен частному от деления $c_1$ на $c_2$, а аргумент $\varphi_3 = \varphi_1 - \varphi_2$.

При умножении двух комплексов $c_1e^{j\varphi_1}$ и $c_2e^{j\varphi_2}$ результирующий комплекс

$$c_4e^{j\varphi_4} = c_1e^{j\varphi_1}c_2e^{j\varphi_2} = c_1c_2e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}.$$

При расчетах электрических цепей часто возникает необходимость в переходе от алгебраической формы записи комплекса к показательной или наоборот.



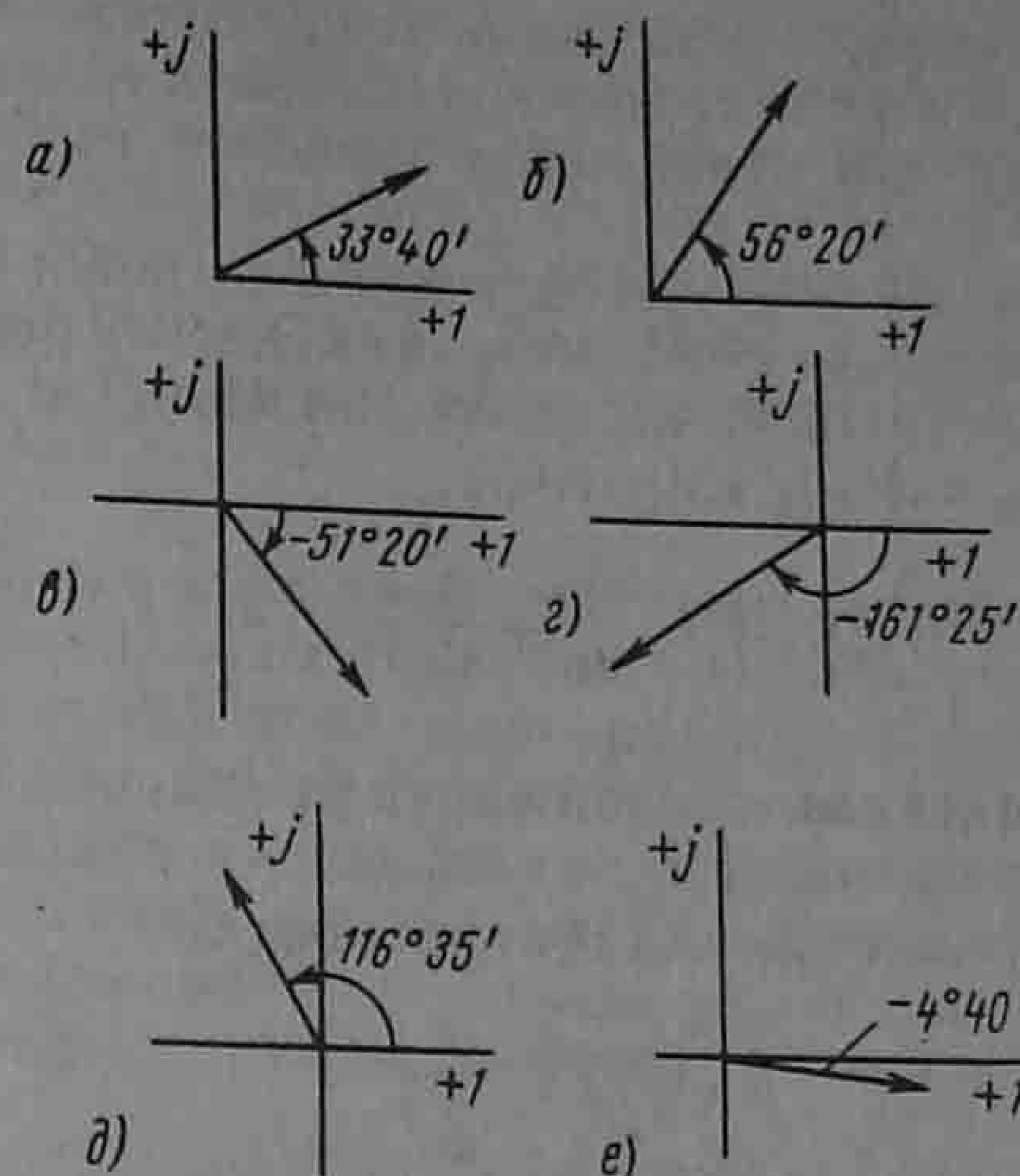



Рис. 3.12

Пусть задано комплексное число $a + jb = ce^{j\varphi}$. Здесь

$$c = \sqrt{a^2 + b^2},\ \operatorname{tg}\varphi = b/a,\ a = c\cos\varphi,\ b = c\sin\varphi.$$

Чтобы не совершить ошибку при записи показательной формы комплекса, рекомендуется сначала качественно изобразить заданный в алгебраической форме комплекс на комплексной плоскости, что позволит правильно выразить угол φ между осью + 1 и вектором. Углы, откладываемые против часовой стрелки от оси + 1, считают положительными, по часовой стрелке — отрицательными.

**Пример 30.** Перевести в показательную форму следующие комплексы: а) $3 + 2j$; б) $2 + 3j$; в) $4 - 5j$; г) $-6 - 2j$; д) $-0{,}2 + 0{,}4j$; е) $10 - j0{,}8$.
Решение пояснено на рис. 3.12, *а — е*: а) $3 + 2j = 3{,}6e^{j33°40'}$; б) $2 + 3j = 3{,}6e^{j56°20'}$; в) $4 - 5j = 6{,}4e^{-j51°20'}$; г) $-6 - 2j = 6{,}32e^{-j161°25'} = 6{,}32e^{j198°35'}$; д) $-0{,}2 + 0{,}4j = 0{,}448e^{j116°35'}$; е) $10 - 0{,}8j \cong 10e^{-j4°40'}$.

**§ 3.16. Законы Кирхгофа в символической форме записи.** По первому закону Кирхгофа, алгебраическая сумма мгновенных значений токов, сходящихся в любом узле схемы, равна нулю:

$$\sum i_k = 0. \tag{3.40}$$

Подставив вместо $i_k$ в (3.40) $\dot{I}_k e^{j\omega t}$ и вынеся $e^{j\omega t}$ за скобку, получим $e^{j\omega t}\sum \dot{I}_k = 0$. Так как $e^{j\omega t}$ не равно нулю при любом $t$, то

$$\sum \dot{I}_k = 0. \tag{3.40а}$$

Уравнение (3.40а) представляет собой первый закон Кирхгофа в символической форме записи.

Для замкнутого контура сколь угодно сложной электрической цепи синусоидального тока можно составить уравнение по второму закону Кирхгофа для мгновенных значений токов, напряжений и ЭДС.

Пусть замкнутый контур содержит $n$ ветвей и каждая $k$-ветвь в общем случае включает в себя источник ЭДС $e_k$, резистор $R_k$, индуктивный $L_k$ и емкостный $C_k$ элементы, по которым протекает ток $i_k$. Тогда по второму закону Кирхгофа,

$$\sum_{k=1}^{n}\left(i_k R_k + L_k \frac{di_k}{dt} + \frac{1}{C_k}\int i_k dt\right) = \sum_{k=1}^{n} e_k. \tag{3.41}$$

Но каждое слагаемое левой части уравнения в соответствии с § 3.12 можно заменить на $\dot{I}_k Z_k$, а каждое слагаемое правой части — на $\dot{E}_k$. Поэтому уравнение (3.41) переходит в

$$\sum_{k=1}^{n} \dot{I}_k Z_k = \sum_{k=1}^{n} \dot{E}_k. \tag{3.41a}$$

Уравнение (3.41а) представляет собой второй закон Кирхгофа в символической форме записи.

**§ 3.17. Применение к расчету цепей синусоидального тока методов, рассмотренных в главе «Электрические цепи постоянного тока».** Для анализа и расчета электрических цепей постоянного тока разработан ряд методов и приемов, облегчающих решение по сравнению с решением системы уравнений при непосредственном использовании законов Кирхгофа. Из гл. 2 известно, что к числу таких методов относятся методы контурных токов, узловых потенциалов, эквивалентного генератора и т. д. Известно также, что окончательные расчетные формулы этих методов получают в результате выводов, в основу которых положены первый и второй законы Кирхгофа.

Поскольку первый и второй законы Кирхгофа справедливы и для цепей синусоидального тока, можно было бы записать уравнения для мгновенных значений величин цепей синусоидального тока, перейти от них к уравнениям в комплексах и затем повторить вывод всех формул гл. 2 для цепей синусоидального тока. Понятно, что проделывать выводы заново нет необходимости.

В том случае, когда отдельные ветви электрической цепи синусоидального тока не связаны между собой магнитно, все расчетные формулы гл. 2 пригодны и для расчета цепей синусоидального тока, если в этих формулах вместо постоянного тока $I$ подставить комплекс тока $\dot{I}$, вместо проводимости $g$ — комплексную проводимость $Y$, вместо сопротивления $R$ — комплексное сопротивление $Z$ и вместо постоянной ЭДС $E$ — комплексную ЭДС $\dot{E}$.

Если же отдельные ветви электрической цепи синусоидального тока связаны друг с другом магнитно (это имеет место при наличии



взаимоиндукции), то падение напряжения на каком-либо участке цепи зависит *не только* от тока данной ветви, но и от токов тех ветвей, с которыми данная ветвь связана магнитно. Расчет электрических цепей синусоидального тока при наличии в них магнитно-связанных ветвей приобретает ряд *особенностей,* которые не могут быть учтены, если в формулах гл. 2 непосредственно заменить $E$ на $\dot{E}$, $R$ на $Z$ и $g$ на $Y$. Особенности расчета магнитно-связанных цепей рассмотрены в § 3.36.

**§ 3.18. Применение векторных диаграмм при расчете электрических цепей синусоидального тока.** Ток и напряжения на различных участках электрической цепи синусоидального тока, как правило, по фазе не совпадают. Наглядное представление о фазовом расположении различных векторов дает векторная диаграмма токов и напряжений. Аналитические расчеты электрических цепей синусоидального тока рекомендуется сопровождать построением векторных диаграмм, чтобы иметь возможность качественно контролировать эти расчеты.

Качественный контроль заключается в сравнении направлений различных векторов на комплексной плоскости, которые получают при аналитическом расчете, с направлением этих векторов исходя из физических соображений. Например, на векторной диаграмме напряжение $\dot{U}_L$ должно опережать ток $\dot{I}$ на 90°, а напряжение $\dot{U}_C$ — отставать от тока $\dot{I}$ на 90°.

Если аналитический расчет дает результаты, не совпадающие с такими очевидными положениями, то, следовательно, в него вкралась ошибка. Кроме того, векторную диаграмму часто используют и как средство расчета, например в методе пропорциональных величин.

**Пример 31.** В схеме (рис. 3.12, *а*) $e = 141\sin\omega t$ В; $R_1 = 3$ Ом; $R_2 = 2$ Ом; $L = 0{,}00955$ Гн. Угловая частота $\omega = 314$ рад/с. Определить ток и напряжение на элементах цепи.

Решение. Запишем уравнение для мгновенных значений

$$i(R_1 + R_2) + L\frac{di}{dt} = e.$$

Перейдем от него к уравнению в комплексах:

$$\dot{I}(R_1 + R_2) + j\omega L\dot{I} = \dot{E} \text{ или } \dot{I}Z = \dot{E},$$

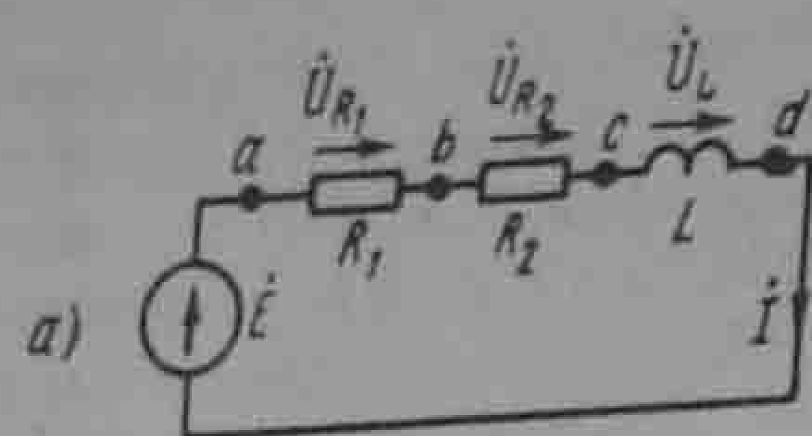
$$\text{где } Z = R_1 + R_2 + j\omega L = 3 + 2 + j314\cdot 0{,}00955 = 5 + 3j = 5{,}82e^{j31^\circ}.$$

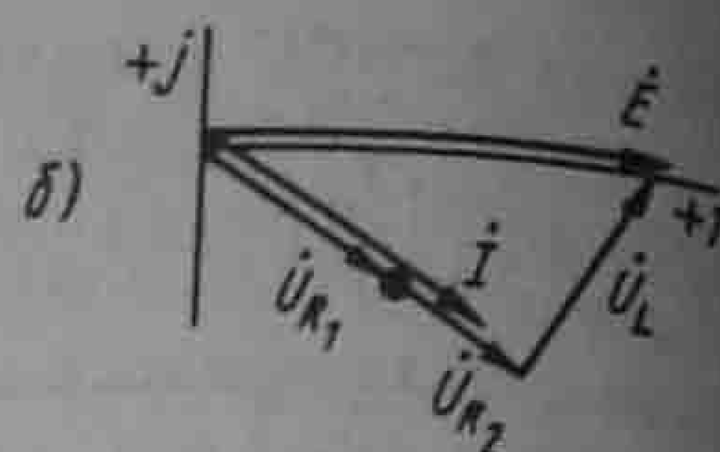
Комплекс действующего значения ЭДС $\dot{E} = 141/\sqrt{2} = 100$ В. Ток

$$\dot{I} = \dot{E}/Z = 100/5{,}8e^{j31^\circ} = 17{,}2e^{-j31^\circ} \text{ А}.$$

Напряжения на $R_1$ $\dot{U}_{R1} = \dot{U}_{ab} = \dot{I}R_1 = 51{,}6e^{-j31^\circ}$ В, на $R_2$ $\dot{U}_{R2} = \dot{U}_{bc} = \dot{I}R_2 = 34{,}4e^{-j31^\circ}$ В; на $L$ $\dot{U}_L = \dot{U}_{cd} = j\omega L\dot{I} = 3j\cdot 17{,}2e^{-j31^\circ} = 51{,}6e^{j59^\circ}$ В.

Векторная диаграмма изображена на рис. 3.13, *б*. Вектор $\dot{E}$ направлен по оси + 1. Вектор тока $\dot{I}$ отстает от него на 31°.



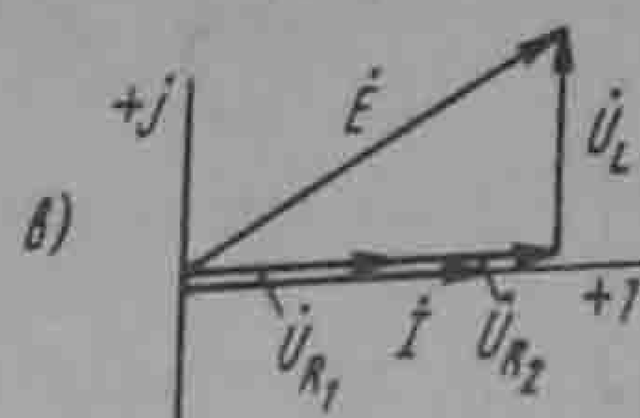




Рис. 3.13

**Пример 32.** Решить задачу примера 31 методом пропорциональных величин.

Решение. Зададимся током в цепи в 1 А и направим его на векторной диаграмме (рис. 3.13, *в*) по оси $+1$ ($\dot I = 1$). Напряжение на $R_1$ совпадает по фазе с током и численно равно $1 \cdot 3 = 3$ В. Напряжение на $R_2$ также совпадает с током и равно 2 В. Напряжение на $L$ равно 3 В и опережает ток на 90°. Из прямоугольного треугольника следует, что при токе $I = 1$ А на входе $E = \sqrt{5^2 + 3^2} = 5{,}82$ В. Так как на входе действует ЭДС в $100/5{,}82 = 17{,}2$ раза больше, то все токи и напряжения должны быть умножены на коэффициент 17,2. На рис. 13.3, *в* все векторы повернуты на 31° против часовой стрелки по сравнению с соответствующими векторами на рис. 3.13, *б*. Ясно, что взаимное расположение векторов на диаграмме при этом не изменилось.

**Пример 33.** В цепи рис. 3.14, *а* $R = 4$ Ом; $\omega = 10^5$ рад/с. Определить емкость конденсатора $C$, если $E = 10$ мВ; $I = 2$ мА.

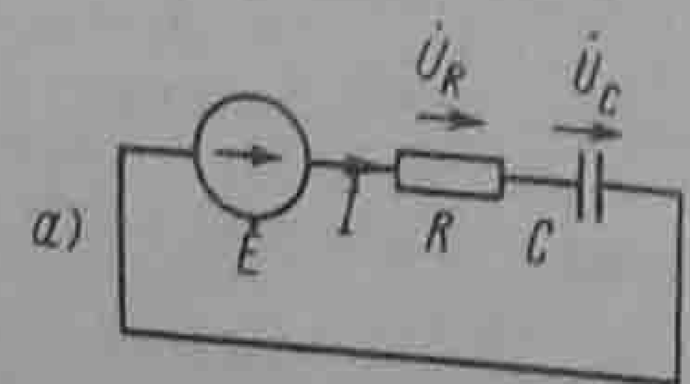
Решение. Комплексное сопротивление цепи $Z = R - j/\omega C$; его модуль $z = \sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}$.

По закону Ома $I = E/z$, отсюда $z = \dfrac{E}{I} = 10 \cdot 10^{-3}/2 \cdot 10^{-3} = 5$ Ом.

Следовательно, $X_C = 1/\omega C = \sqrt{z^2 - R^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ Ом; $C = 1/(10^5 \cdot 3) = 1/(10^5 \cdot 3) = 3{,}33$ мкФ.

Векторная диаграмма изображена на рис. 3.14, *б*.

**Пример 34.** На участке *ab* разветвленой цепи рис. 3.15, *а* параллельно включены индуктивное сопротивление $X_L = \omega L$ и активное сопротивление $R$, численно равное $X_L$. Показание амперметра $A_2 = 5$ А. Определить показание амперметра $A_3$, полагая сопротивление амперметров настолько малыми, что их можно не учитывать.



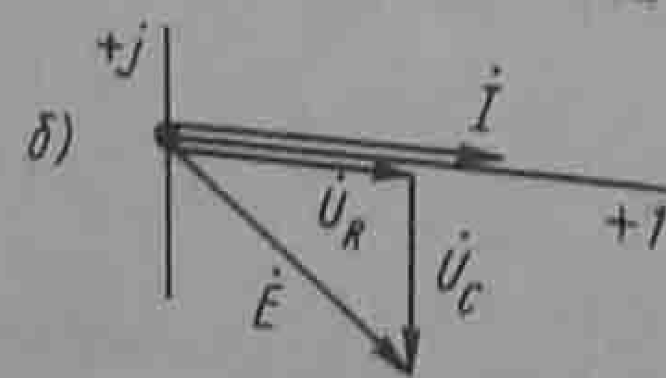
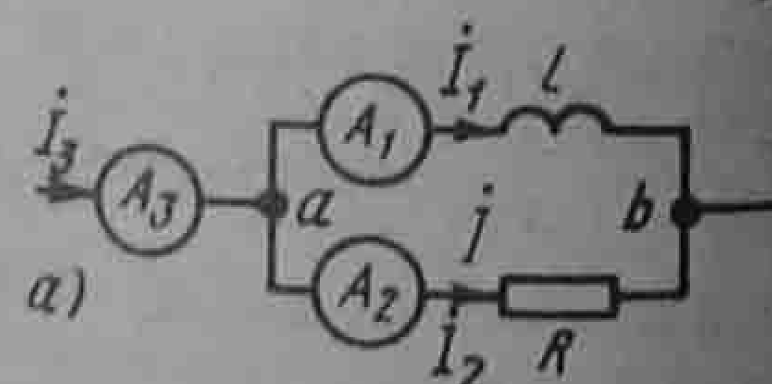




Рис. 3.14



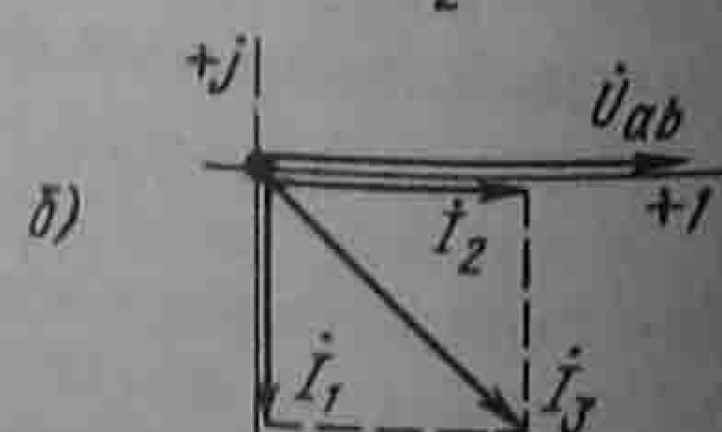
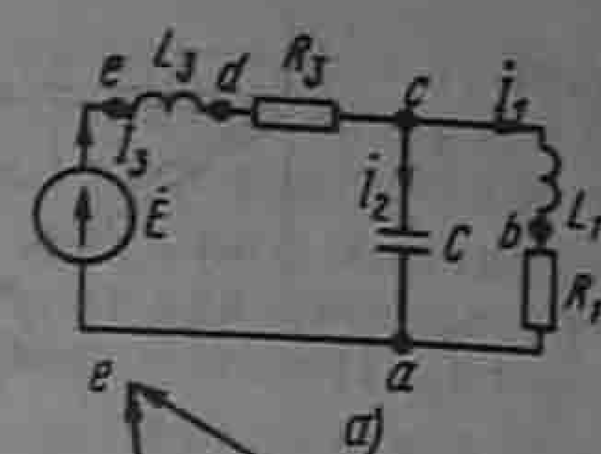




Рис. 3.15





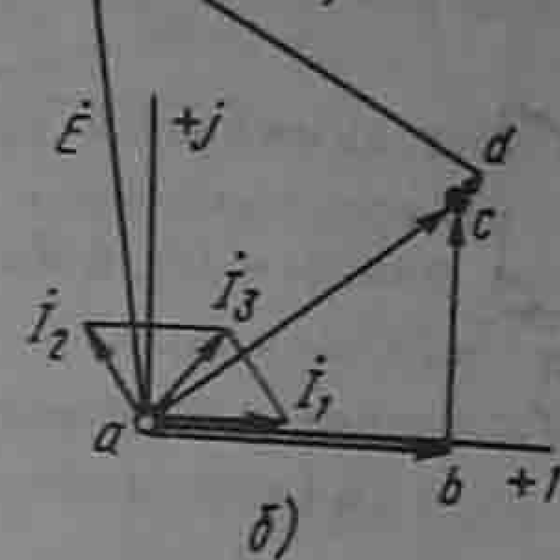




Рис. 3.16

Решение. На рис. 3.15, *б* качественно построим векторную диаграмму. Напряжение $\dot U_{ab}$ совпадает по фазе с током $\dot I_2$. Ток $\dot I_1$ отстает от тока $\dot I_2$ на 90° и равен ему по величине. Ток в неразветвленной части схемы $\dot I_3 = \dot I_1 + \dot I_2$. Модуль тока $I_3 = 5\sqrt{2} = 7{,}05$ А. Амперметр $A_3$ покажет 7,05 А.

**Пример 35.** Построить векторную диаграмму токов и напряжений для схемы рис. 3.16, *а*, если $I_1 = 1$ А, $R_1 = 10$ Ом, $\omega L_1 = 10$ Ом, $1/\omega C = 14{,}1$ Ом; $\omega L_3 = 20$ Ом, $R_2 = 2{,}5$ Ом.

Решение. Обозначим токи и примем положительные направления для них в соответствии с рис. 3.16, *а*. Выберем масштаб для токов $m_I = 0{,}5$ А/см и для напряжений $m_U = 4$ В/см. Ток $\dot I_1$ направим по оси $+1$ (рис. 3.16, *б*). Падение напряжения $U_{R1} = 10$ В и по фазе совпадает с током $\dot I_1$. Падение напряжения в индуктивном сопротивлении $\omega L$ также равно 10 В, но опережает ток $\dot I_1$ на 90°. Геометрическая сумма $\dot U_{R1} + \dot U_{L1}$ по модулю равна $10\sqrt{2} = 14{,}1$ В. Емкостный ток $\dot I_2$ опережает это напряжение на 90°. Модуль тока $I_2 = 14{,}1/14{,}1 = 1$ А.

Ток в неразветвленной части цепи равен геометрической сумме токов: $\dot I_3 = \dot I_1 + \dot I_2$. Модуль его равен $\sim 0{,}8$ А (найден графически). Падение напряжения на сопротивлении $R_3$ равно 2 В и совпадает по фазе с током $\dot I_3$. Падение напряжения на индуктивности $L_3$ опережает ток $\dot I_3$ на 90° и численно равно $0{,}8 \cdot 20 = 16$ В. Напряжение на входе схемы равно ЭДС и составляет около 18,3 В.

**Пример 36.** Решить задачу, обратную рассмотренной в примере 35. В схеме рис. 3.16, *а* опытным путем найдены значения токов $I_1$, $I_2$ и $I_3$ (в ветви схемы включили амперметры и записали их показания), $I_1 = 1$ А, $I_2 = 1$ А, $I_3 = 0{,}8$ А и определены три напряжения: напряжение на входе схемы $U = E = 18{,}3$ В, напряжение на конденсаторе $U_C = 14{,}1$ В (оно же напряжение на первой ветви) и напряжение на третьей ветви (на $R_3$ и $L_3$) $U_3 \approx 16$ В. Напряжения были определены путем подключения вольтметра поочередно к зажимам *а* и *е*, *а* и *с*, *е* и *с*.

По опытным данным (по значениям трех токов и трех напряжений) построить векторную диаграмму.

Решение. На рис. 3.16, *в* отложим вектор $U_C$, по модулю равный 14,4 В. Для сопоставления с рис. 3.16, *б* расположим его на диаграмме так же, как он расположен на рис. 3.16, *б*.

Изобразим на диаграмме ток $\dot I_2$. Он на 90° опережает напряжение $\dot U_C$ и по модулю равен 1 А. После этого построим на диаграмме токи $\dot I_1$ и $\dot I_3$, воспользовавшись тем, что три тока ($\dot I_1$, $\dot I_2$ и $\dot I_3$) образуют замкнутый треугольник (рис. 3.16, *б*).

Для построения треугольника по трем сторонам (т. е. фактически для определения третьей вершины его) из конца вектора тока (из одной вершины треугольника) подведем дугу радиусом, равным току $I_1$, а из начала вектора тока $I_2$ (т. е. из второй вершины треугольника) проводим дугу радиусом, равным току $I_3$.

Точка пересечения этих дуг дает искомую третью вершину треугольника, т. е. точку, в которой оканчиваются векторы токов $\dot I_3$ и $\dot I_1$. После того как диаграмме определено положение вектора тока $\dot I_3$, можно изобразить на ней векторы напряжения $\dot U_3$ и ЭДС $\dot E$.

Напряжения $\dot U_C$, $\dot U_3$ и ЭДС $\dot E$ также образуют замкнутый треугольник. Его построение осуществляется аналогично построению треугольников токов.

Из конца вектора $\dot U_C$ проводим дугу радиусом, равным $U_3$, а из начала вектора $\dot U_C$ — дугу радиусом, равным $E$. Дуги пересекаются в точках $e$ и $f$.

Так как напряжение $\dot U_3$ представляет собой падение напряжения от тока $\dot I_3$ на последовательно соединенных $R_3$ и $L_3$, то оно по фазе должно опережать ток $\dot I_3$, а не отставать от него.

Поэтому из точек $e$ и $f$ выбираем точку $e$ (если бы выбрали точку $f$, то в этом случае напряжение $\dot U_3$ — пунктир на рис. 3.16, *в* — отставало бы от тока $\dot I_3$, а не опережало его).

В заключение отметим, что в треугольнике токов дуги тоже пересекаются в двух точках, но вторая (лишняя) точка на рис. 3.16, *в* не показана.

**§ 3.19. Изображение разности потенциалов на комплексной плоскости.** Потенциалы цепи переменного тока являются комплексными числами. На комплексной плоскости комплексное число можно изображать либо точкой, координаты которой равны действительной и мнимой частям комплексного потенциала, либо вектором, направленным от начала координат к данной точке плоскости.

На рис. 3.17 представлены два вектора, изображающие собой комплексные потенциалы: $\dot\varphi_a = -2 + 5j$ и $\dot\varphi_b = 4 + j$.

По определению, разность потенциалов $\dot U_{ab} = \dot\varphi_a - \dot\varphi_b = -6 + 4j$; $\dot U_{ab}$ изобразится вектором, направленным от $b$ к $a$. Первый индекс у напряжения (в нашем примере индекс $a$) указывает, к какой точке следует направить стрелку вектора напряжения. Естественно, что $\dot U_{ba} = -\dot U_{ab}$.

**§ 3.20. Топографическая диаграмма.** Каждая точка электрической схемы, в которой соединяются элементы схемы, имеет свое значение комплексного потенциала.

Совокупность точек комплексной плоскости, изображающих комплексные потенциалы одноименных точек электрической схемы, называют *топографической диаграммой*.

Термин «топографическая» объясняется тем, что диаграмма напоминает топографическую карту местности, где каждой точке местности отвечает определенная точка карты. Расстояние между двумя точками на местности можно определить, измерив расстояние между одноименными точками на карте.

Аналогичные измерения можно проводить и на топографической диаграмме. Напряжение между любыми двумя точками электрической схемы, например между точками $a$ и $b$, по значению и направлению определяется вектором, проведенным на топографической диаграмме от точки $b$ к точке $a$.



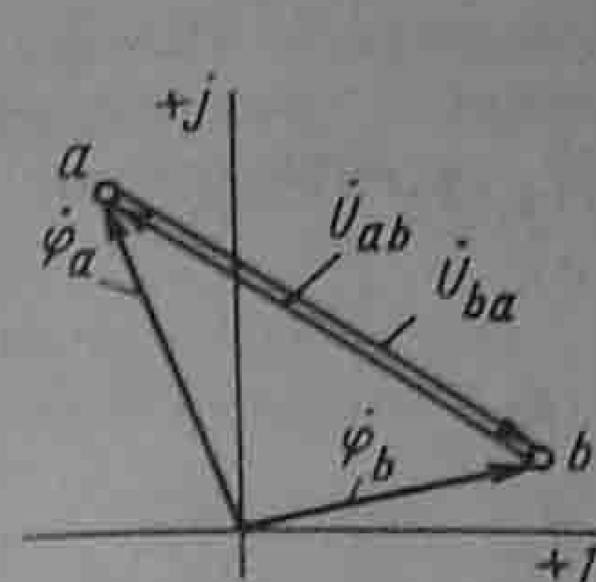


Рис. 3.17

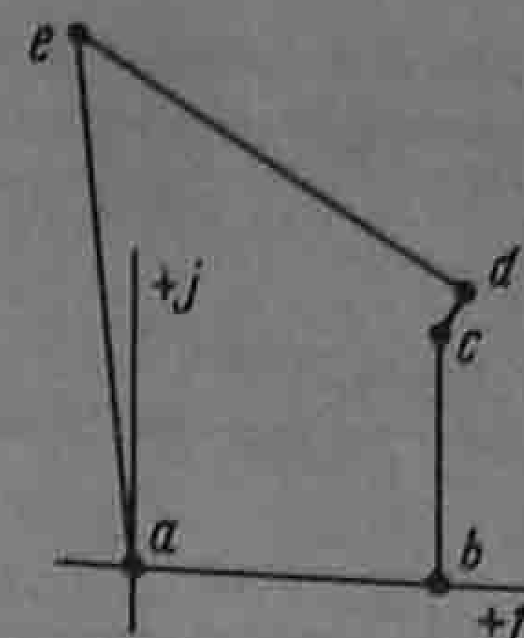


Рис. 3.18

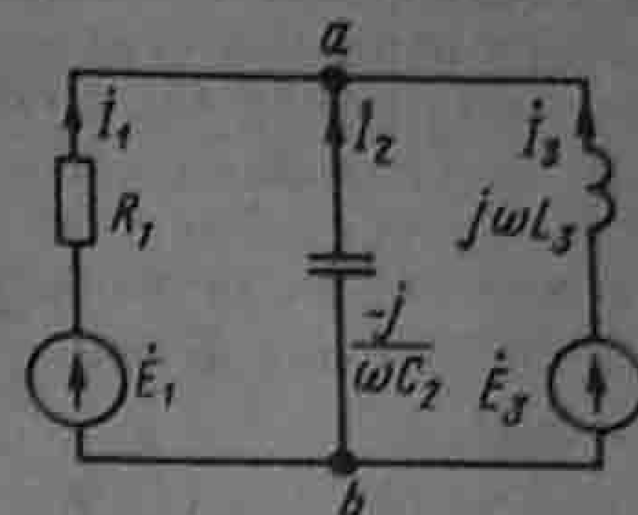


Рис. 3.19

При построении топографической диаграммы, как и потенциальной (см. § 2.10), потенциал любой точки схемы может быть принят равным нулю. На диаграмме эту точку помещают в начало координат. Тогда положение остальных точек схемы на диаграмме определяется параметрами цепи, ЭДС и токами ветвей. Рассмотрим несколько примеров.

**Пример 37.** По данным примера 35 построить топографическую диаграмму для схемы рис. 3.16, *а*.

Р е ш е н и е. Обозначим буквами $a$, $b$, $c$, ... точки схемы рис. 3.16, *а*, которые хотим отобразить на топографической диаграмме. Примем потенциал точки $a$ равным нулю: $\varphi_a = 0$.

Выразим потенциал точки $b$ через потенциал точки $a$:

$$\dot\varphi_b = \dot\varphi_a + \dot I_1 R_1 = \dot\varphi_a + 10.$$

Знак плюс перед слагаемым $\dot I_1 R_1$ обусловлен тем, что при переходе от точки $a$ к точке $b$ перемещение происходит навстречу току $\dot I_1$ (при этом потенциал увеличивается на $\dot I_1 R_1$). Точка $b$ на диаграмме имеет координату по оси абсцисс $+10$. Аналогично,

$$\dot\varphi_c = \dot\varphi_b + \dot I_1 j\omega L_1 = 10 + j10;$$

$$\dot\varphi_d = \dot\varphi_c + \dot I_3 R_3;$$

$$\dot\varphi_e = \dot\varphi_d + \dot I_3 j\omega L_3.$$

Совокупность точек $a$, $b$, $c$, $d$, $e$ на комплексной плоскости (рис. 3.18) представляет собой топографическую диаграмму схемы рис. 3.16, *а*. По ней удобно определять напряжение между любыми двумя точками схемы и сдвиг по фазе этого напряжения относительно любого другого напряжения.

**Пример 38.** Найти токи в схеме (рис. 3.19) методом узловых потенциалов. Положительные направления ЭДС указаны на схеме стрелками, $e_1 = 120\sqrt{2}\sin\omega t$ В; $e_3 = 100\sqrt{2}\cos(\omega t - 120°)$ В; $R = 2$ Ом; $1/\omega C_2 = 10$ Ом; $\omega L_3 = 5$ Ом.

Р е ш е н и е. Запишем ЭДС в комплексной форме: $\dot E_1 = 120$, $\dot E_3 = 100e^{-j30°}$.

Выберем положительные направления для токов в ветвях к узлу $a$. Определим проводимости ветвей: $Y_1 = 1/Z_1 = 1/2 = 0{,}5$ См; $Y_2 = 1/Z_2 = 1/(-10j) = 0{,}1j$ См; $Y_3 = 1/Z_3 = 1/(5j) = -0{,}2j$ См.

Заземлим точку $b$. Уравнение по методу узловых потенциалов

$$\dot\varphi_a Y_{aa} = \dot J_{aa};$$

$$\dot\varphi_a = \frac{120\cdot 0{,}5 + 100e^{-j30°}\cdot 0{,}2e^{-j90°}}{0{,}5 + 0{,}1j - 0{,}2j} = 104e^{-j8°}\ \text{В}.$$

Токи в ветвях

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{E}_1 - \varphi_a}{Z_1} = \frac{120 - 104e^{-j8^\circ}}{2} = 8{,}5 + j7{,}25 = 11{,}17e^{j40^\circ 25'}\ \text{А};$$

$$\dot{I}_2 = \frac{-\varphi_a}{Z_2} = \frac{-104e^{-j8^\circ}}{-10e^{j90^\circ}} = 10{,}4e^{-j98^\circ}\ \text{А};$$

$$\dot{I}_3 = \frac{\dot{E}_3 - \varphi_a}{Z_3} = \frac{100e^{-j30^\circ} - 104e^{-j8^\circ}}{5j} =$$

$$= \frac{100(\cos 30^\circ - j\sin 30^\circ) - 104(\cos 8^\circ - j\sin 8^\circ)}{5j} =$$

$$= \frac{-16{,}2 - 35{,}5j}{5j} = \frac{39{,}1e^{j245^\circ 30'}}{5e^{j90^\circ}} = 7{,}82e^{j155^\circ 30'}\ \text{А}.$$

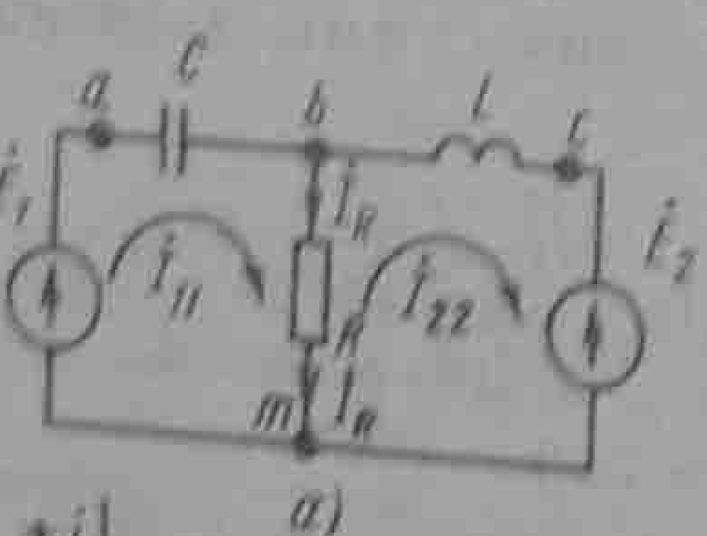
**Пример 39.** Найти токи в схеме рис. 3.20, *а* методом контурных токов и построить топографическую диаграмму, если $\dot{E}_1 = 100$ В; $\dot{E}_2 = 100e^{j90^\circ}$ В; $X_C = 1/\omega C = 2$ Ом; $R = \omega L = 5$ Ом.

Решение. Выберем направления контурных токов $\dot{I}_{11}$ и $\dot{I}_{22}$ по часовой стрелке. Запишем в общем виде уравнения для контурных токов [ср. с уравнениями (2.46)]

$$\dot{I}_{11}Z_{11} + \dot{I}_{22}Z_{12} = \dot{E}_{11};$$

$$\dot{I}_{11}Z_{21} + \dot{I}_{22}Z_{22} = \dot{E}_{22},$$

где $Z_{11}$ — собственное сопротивление первого контура; $Z_{11} = R - \frac{j}{\omega C} = 5 - 2j$; $Z_{22}$ — собственное сопротивление второго контура, $Z_{22} = R + j\omega L = 5 + 5j$; $Z_{12} = Z_{21}$ — собственное сопротивление второго контура, взятое со знаком минус, $Z_{12} = -R = -5$; $\dot{E}_{11}$ — алгебраическая сумма ЭДС первого контура, $\dot{E}_{11} = \dot{E}_1 = 100$; $\dot{E}_{22}$ — алгебраическая сумма ЭДС второго контура, $\dot{E}_{22} = -\dot{E}_2 = -100j$.



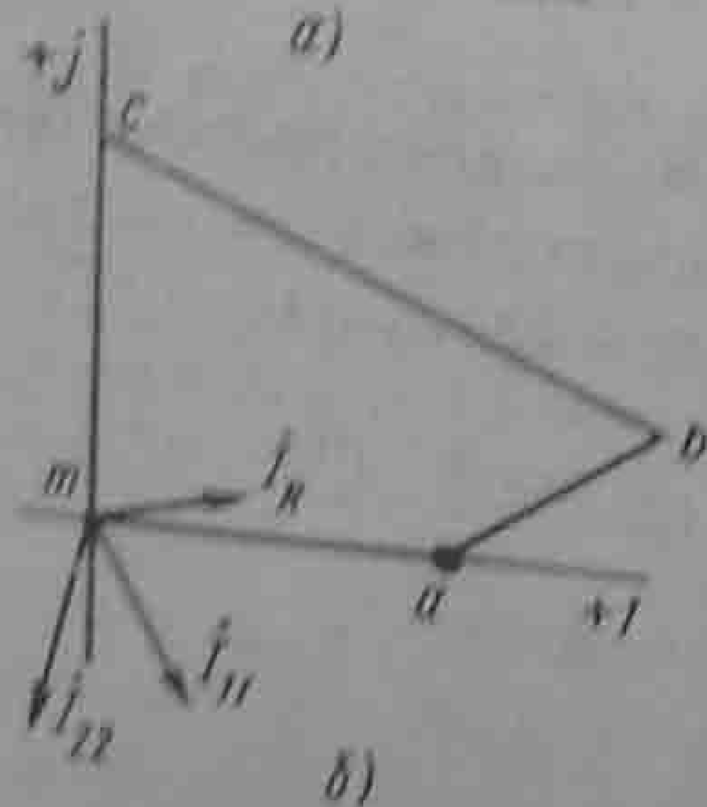




Рис. 3.20

Следовательно,

$$\dot{I}_{11}(5 - 2j) - 5\dot{I}_{22} = 100;$$
$$-5\dot{I}_{11} + \dot{I}_{22}(5 + j5) = -100j.$$

Определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} (5 - 2j) & -5 \\ -5 & (5 + 5j) \end{vmatrix} = 10 + 15j = 18e^{j56^\circ 20'};$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 100 & -5 \\ -100j & (5 + 5j) \end{vmatrix} = 500;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} (5 - 2j) & 100 \\ -5 & -100j \end{vmatrix} = 300 - 500j = 582e^{-j56^\circ 20'}.$$

Токи в схеме

$$\dot{I}_{11} = \Delta_1/\Delta = 500/18e^{j56^\circ 20'} = 27{,}8e^{-j56^\circ 20'}\ \text{А};$$
$$\dot{I}_{22} = \Delta_2/\Delta = 582e^{-j59^\circ}/18e^{j56^\circ 20'} = 32{,}3e^{-j115^\circ 20'}\ \text{А};$$
$$\dot{I}_R = \dot{I}_{11} - \dot{I}_{22} = 30e^{j11^\circ 43'}.$$

Топографическая диаграмма изображена на рис. 3.20, *б*



**§ 3.21. Активная, реактивная и полная мощности.** Под *активной мощностью* $P$ понимают среднее значение мгновенной мощности $p$ за период $T$:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T ui\,dt. \tag{3.42}$$

Если ток $i = I_m \sin\omega t$, напряжение на участке цепи $u = U_m \sin(\omega t + \varphi)$, то

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T I_m U_m \sin\omega t \sin(\omega t + \varphi)dt = \frac{U_m I_m}{2}\cos\varphi = UI\cos\varphi. \tag{3.43}$$

Активная мощность физически представляет собой энергию, которая выделяется в единицу времени[1] в виде теплоты на участке цепи в сопротивлении $R$. Действительно, произведение $U\cos\varphi = IR$. Следовательно,

$$P = U\cos\varphi I = I^2R. \tag{3.44}$$

Единица активной мощности — Вт.

Под *реактивной мощностью* $Q$ понимают произведение напряжения $U$ на участке цепи на ток $I$ по этому участку и на синус угла $\varphi$ между напряжением $U$ и током $I$:

$$Q = UI\sin\varphi. \tag{3.45}$$

Единица реактивной мощности — вольт-ампер реактивный (ВАр). Если $\sin\varphi > 0$, то $Q > 0$, если $\sin\varphi < 0$, то $Q < 0$.

Рассмотрим, что физически представляет собой реактивная мощность. С этой целью возьмем участок цепи с последовательно соединенными $R$, $L$ и $C$. Пусть по нему протекает ток $i = I_m \sin\omega t$. Запишем выражение для мгновенного значения суммы энергий магнитного и электрического полей цепи:

$$W_{мэ} = W_м + W_э = \frac{Li^2}{2} + \frac{Cu_C^2}{2} = \frac{LI_m^2}{2}\sin^2\omega t + \frac{CI_m^2}{2(\omega C)^2}\cos^2\omega t =$$
$$= \frac{LI^2}{2}(1 - \cos 2\omega t) + \frac{I^2}{2\omega^2 C}(1 + \cos 2\omega t).$$

Из полученного выражения видно, что $W_{мэ}$ имеет постоянную составляющую $W_{мэ0}$, неизменную во времени, и переменную составляющую $w_{мэ}$, изменяющуюся с двойной угловой частотой:

$$W_{мэ} = W_{мэ0} - w_{мэ},$$

где $W_{мэ0} = \frac{LI^2}{2} + \frac{I^2}{2\omega^2 C}$ и $w_{мэ} = \left(\frac{LI^2}{2} - \frac{I^2}{2\omega^2 C}\right)\cos 2\omega t$.

[1] Предполагается, что в 1 с укладывается целое число периодов $T$.

На создание постоянной составляющей $W_{мэ0}$ была затрачена энергия в процессе становления данного периодического режима. В дальнейшем при периодическом процессе энергия $W_{мэ0}$ остается неизменной и, следовательно, от источника питания не требуется энергии на ее создание.

Среднее значение энергии $w_{мэ}$, поступающей от источника за интервал времени от $-T/8$ до $+T/8$,

$$W_{мэ\,ср} = \frac{4}{T}\int_{t=-T/8}^{t=T/8} w_{мэ}\,dt = \frac{2}{\pi}\left(LI^2 - \frac{I^2}{\omega^2 C}\right) = \frac{2}{\pi\omega} I^2 (X_L - X_C) =$$

$$= \frac{2}{\pi\omega} UI\sin\varphi = \frac{2}{\pi\omega} Q. \qquad (3.46)$$

Таким образом, реактивная мощность $Q$ пропорциональна среднему за четверть периода значению энергии, которая отдается источником питания на создание переменной составляющей электрического и магнитного поля индуктивной катушки и конденсатора.

За один период переменного тока энергия $W_{мэ\,ср}$ дважды отдается генератором в цепь и дважды он получает ее обратно, т. е. реактивная мощность является энергией, которой обмениваются генератор и приемник.

*Полная мощность*

$$S = UI. \qquad (3.47)$$

Единица полной мощности — В·А.

Мощности $P$, $Q$ и $S$ связаны следующей зависимостью:

$$P^2 + Q^2 = S^2. \qquad (3.48)$$

Графически эту связь можно представить в виде прямоугольного треугольника рис. 3.21 — треугольника мощности, у которого имеются катет, равный $P$, катет, равный $Q$, и гипотенуза $S$.

На щитке любого источника электрической энергии переменного тока (генератора, трансформатора и т. д.) указывается значение $S$, характеризующее ту мощность, которую этот источник может отдавать потребителю, если последний работает при $\cos\varphi = 1$ (т. е. если потребитель представляет собой чисто активное сопротивление).

**§ 3.22. Выражение мощности в комплексной форме записи.** Пусть задан некоторый комплекс

$$\dot{A} = Ae^{j\varphi_A} = A\cos\varphi_A + jA\sin\varphi_A.$$

Под комплексом $\overset{*}{A}$, сопряженным с комплексом $\dot{A}$, будем понимать

$$\overset{*}{A} = Ae^{-j\varphi_A} = A\cos\varphi_A - jA\sin\varphi_A.$$



Рассмотрим простой прием определения активной и реактивной мощностей через комплекс напряжения и сопряжений комплекс тока. Напряжение на некотором участке цепи $\dot{U} = Ue^{j\varphi_u}$, ток по этому участку $\dot{I} = Ie^{j\varphi_i}$. Угол между напряжением и током $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$. Умножим комплекс напряжения на сопряженный комплекс тока $\overset{*}{I} = Ie^{-j\varphi_i}$ и обозначим полученный комплекс через $\tilde{S}$:

$$\tilde{S} = \dot{U}\overset{*}{I} = UIe^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = UIe^{j\varphi} = UI\cos\varphi + jUI\sin\varphi = P + jQ. \qquad (3.49)$$

Значок ≈ (тильда) над $S$ обозначает комплекс (а не сопряженный комплекс) полной мощности, составленный при участии сопряженного комплекса тока $\overset{*}{I}$.

Таким образом, активная мощность $P$ есть действительная часть (Re), а реактивная мощность $Q$ — мнимая часть (Im) произведения $\dot{U}\overset{*}{I}$:

$$P = \mathrm{Re}\,\dot{U}\overset{*}{I}; \qquad (3.50)$$
$$Q = \mathrm{Im}\,\dot{U}\overset{*}{I}.$$

Пример 40. Определить активную, реактивную и полную мощности по данным примера 31. Решение. Напряжение на входе всей схемы равно ЭДС $\dot{U} = \dot{E} = 100$ В. Ток в цепи $\dot{I} = 17{,}2e^{-j31°}$ А. Сопряженный комплекс тока $\overset{*}{I} = 17{,}2e^{j31°}$ А. Комплекс полной мощности $\tilde{S} = \dot{U}\overset{*}{I} = 100 \cdot 17{,}2e^{j31°} = 1720\cos 31° + j1720\sin 31° = 1475 + j886$; $P = 1475$; $Q = 886$.

Следовательно, активная мощность $P = 1475$ Вт, реактивная $Q = 886$ ВАр и полная $S = 1720$ В·А.

**§ 3.23. Измерение мощности ваттметром.** Измерение мощности производят обычно с помощью ваттметра электродинамической системы, в котором имеются две катушки — неподвижная и подвижная.

Подвижная катушка, выполненная из очень тонкого провода, имеет практически чисто активное сопротивление и называется *параллельной обмоткой*. Ее включают параллельно участку цепи, подобно вольтметру. Жестко скрепленная со стрелкой (указателем), она может вращаться в магнитном поле, создаваемом неподвижной катушкой.

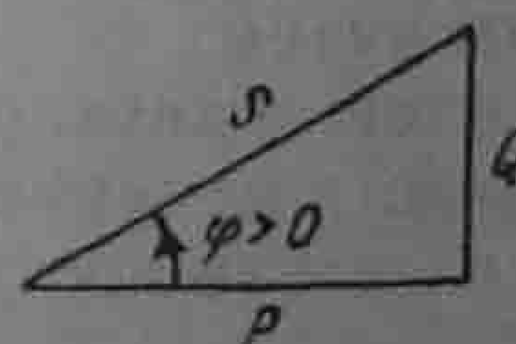


Рис. 3.21

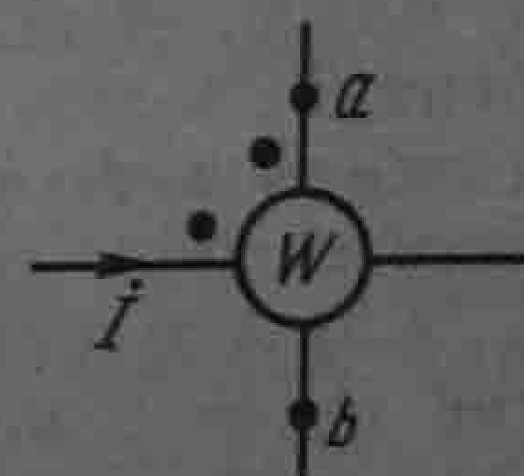


Рис. 3.22

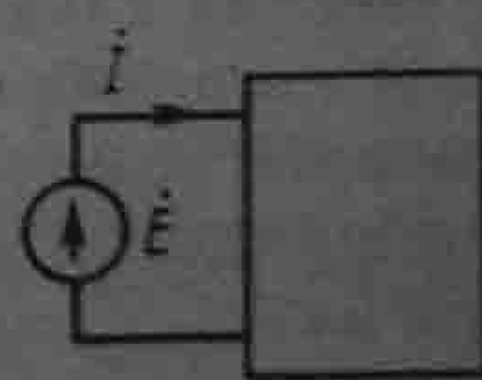


Рис. 3.23

Неподвижная катушка, выполненная из довольно толстого провода, имеет очень малое активное сопротивление и называется *последовательной обмоткой*. Ее включают в цепь последовательно, подобно амперметру.

На электрической схеме ваттметр изображают, как показано на рис. 3.22. Одна пара концов (на рисунке обычно расположена горизонтально) принадлежит последовательной обмотке, другая пара концов (на рисунке расположена вертикально) — параллельной. На концах одноименных зажимов обмоток (например, у начала обмоток) принято ставить точки.

Вращающий момент ваттметра, а следовательно, и его показания пропорциональны действительной части произведения комплексного напряжения $\dot{U}_{ab}$ на параллельной обмотке ваттметра на сопряженный комплекс тока $\overset{*}{I}$, втекающего в конец последовательной (токовой) обмотки ваттметра и снабженной точкой: $\mathrm{Re}\,\dot{U}_{ab}\overset{*}{I} = U_{ab}I\cos(\widehat{\dot{U}_{ab}\dot{I}})$.

Напряжение на параллельной обмотке берут равным разности потенциалов между ее концом, имеющим точку (точка $a$), и ее концом, не имеющим точки (точка $b$). Предполагается, что ток $\dot{I}$ втекает в конец последовательной обмотки, у которого поставлена точка.

Цена деления ваттметра определяется как частное от деления произведения номинального напряжения на номинальный ток (указывают на лицевой стороне прибора) на число делений шкалы.

**Пример 41.** Номинальное напряжение ваттметра 120 В. Номинальный ток 5 А. Шкала имеет 150 делений. Определить цену деления ваттметра.

Р е ш е н и е. Цена деления ваттметра равна $120\cdot5/150 = 4$ Вт/дел.

**§ 3.24. Двухполюсник в цепи синусоидального тока.** На схеме рис. 3.23 изображен пассивный двухполюсник, подключенный к источнику ЭДС. Входное сопротивление двухполюсника $Z_{вх} = E/I$. В общем случае

$$Z_{вх} = R_{вх} + jX_{вх} = ze^{j\varphi}.$$

При $X_{вх} > 0$ входное сопротивление имеет индуктивный характер ($\varphi > 0$), при $X_{вх} < 0$ — емкостный и при $X_{вх} = 0$ — чисто активный.

Входная проводимость $Y_{вх}$ представляет собой величину, обратную входному сопротивлению: $Y_{вх} = 1/Z_{вх}$.

Входное сопротивление можно определить расчетным путем, если известна схема внутренних соединений двухполюсника и характер и значения сопротивлений, либо опытным путем.

При опытном определении входного сопротивления двухполюсника собирают схему рис. 3.24, $a$, в которой амперметр измеряет ток $I$, вольтметр — напряжение $U_{ab} = U$ на входе двухполюсника. Ваттметр измеряет $\mathrm{Re}\{\dot{U}_{ab}\overset{*}{I}\}$, т. е. активную мощность $P = UI\cos\varphi$.



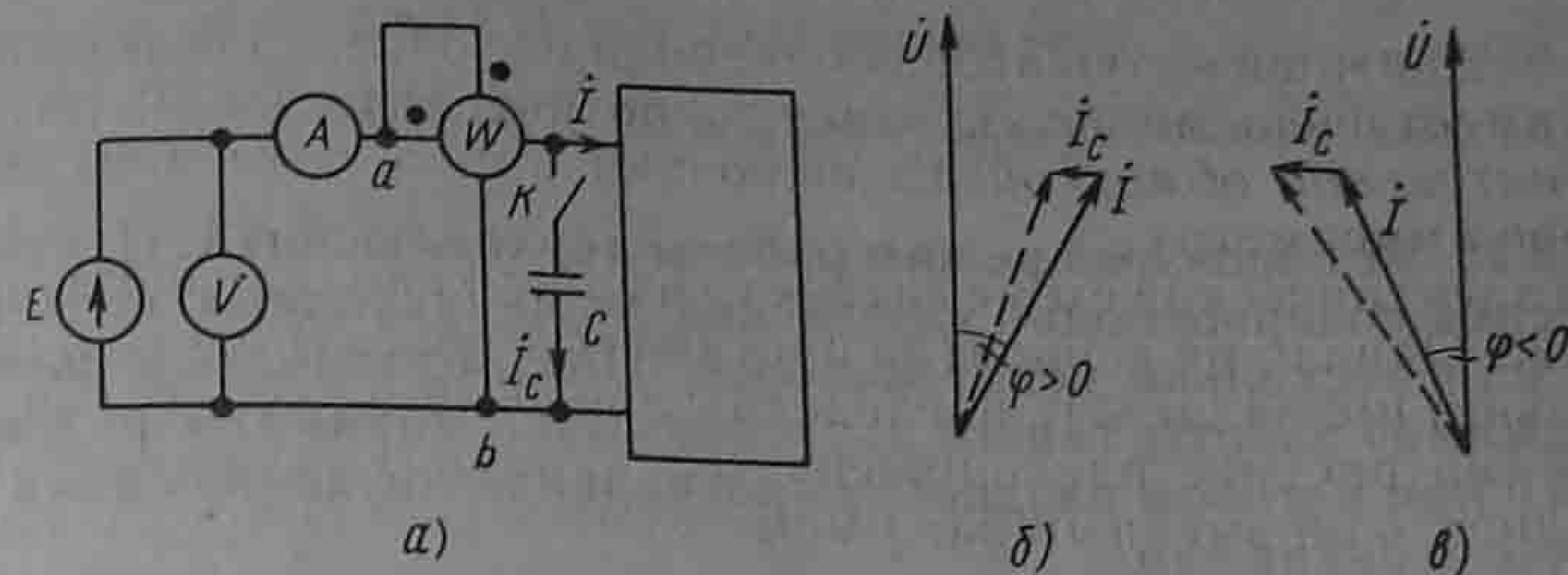



Рис. 3.24

Модуль входного сопротивления $z = U/I$. При делении $P$ на произведение $UI$ получают косинус угла между напряжением и током: $\cos\varphi = P/UI$.

По косинусу угла находят $\sin\varphi$ и затем находят $R_{вх} = z\cos\varphi$ и $X_{вх} = z\sin\varphi$.

Так как косинус есть функция четная, т. е. $\cos(-\varphi) = \cos\varphi$, то измерения необходимо дополнить еще одним опытом, который позволил бы путем сопоставлений показаний амперметра в двух опытах выявить знак угла $\varphi$. Для определения знака угла $\varphi$ можно воспользоваться специальным прибором — фазометром либо при его отсутствии, проделав следующий опыт: параллельно исследуемому двухполюснику путем замыкания ключа $K$ подключают небольшую емкость $C$ (рис. 3.24, $a$).

Если показания амперметра при замыкании ключа $K$ станут меньше, чем они были при разомкнутом ключе, то угол $\varphi$ положителен и входное сопротивление $Z = ze^{j\varphi}$ имеет индуктивный характер (рис. 3.24, $б$). Если показания амперметра при замыкании ключа станут больше, то $\varphi$ отрицательно и входное сопротивление имеет емкостный характер (рис. 3.24, $в$).

На векторных диаграммах (рис. 3.24, $б$, $в$) $\dot{I}$ — ток через двухполюсник; $\dot{I}_C$ — ток через емкость, который опережает напряжение $U$ на входе двухполюсника на 90°. Пунктиром изображен ток через амперметр при замкнутом ключе. Сопоставление пунктиром изображенного тока с током $\dot{I}$ и подтверждает приведенное заключение.

**Пример 42.** В схеме рис. 3.24, $a$ $U = 120$ В; $I = 5$ А; $P = 400$ Вт. Замыкание ключа $K$ приводит к уменьшению показаний амперметра. Определить входное сопротивление двухполюсника.

Р е ш е н и е. Модуль входного сопротивления

$$z = U/I = 24 \text{ Ом};$$

$$\cos\varphi = P/UI = 400/120\cdot5 = 0{,}666; \ \sin\varphi = 0{,}745.$$

Таким образом,

$$R_{вх} = z\cos\varphi = 24\cdot0{,}666 = 16 \text{ Ом};$$

$$X_{вх} = z \sin\varphi = 24 \cdot 0{,}745 = 17{,}9 \text{ Ом}.$$

Комплекс входного сопротивления $Z_{вх} = (16 + j17{,}9)$ Ом.

**§ 3.25. Резонансный режим работы двухполюсника.** Пусть двухполюсник содержит один или несколько индуктивных элементов и один или несколько конденсаторов. Под *резонансным режимом* (режимами) работы такого двухполюсника понимают режим (режимы), при котором входное сопротивление двухполюсника является чисто активным[1].

По отношению к внешней цепи двухполюсник в резонансном режиме ведет себя как активное сопротивление, поэтому ток и напряжение на его входе совпадают по фазе. Реактивная мощность двухполюсника при этом равна нулю.

Различают две основные разновидности резонансных режимов: резонанс токов и резонанс напряжений.

**§ 3.26. Резонанс токов.** Явление резонанса в схеме рис. 3.25, *а*, образованное двумя параллельными ветвями с разнохарактерными реактивными сопротивлениями, называют *резонансом токов*.

Пусть первая ветвь содержит активное сопротивление $R_1$ и индуктивное $\omega L$, а вторая ветвь — активное $R_2$ и емкостное $1/\omega C$.

Ток $\dot I_1$ в первой ветви отстает от напряжения $\dot U = \dot U_{ab}$ (рис. 3.25, *б*) и может быть записан как

$$\dot I_1 = \dot U Y_1 = \dot U(g_1 - jb_1).$$

Ток $\dot I_2$ во второй ветви опережает напряжение:

$$\dot I_2 = \dot U Y_2 = \dot U(g_2 - jb_2).$$

Ток в неразветвленной части цепи

$$\dot I = \dot I_1 + \dot I_2 = \dot U(g_1 + g_2) - j\dot U(b_1 + b_2).$$

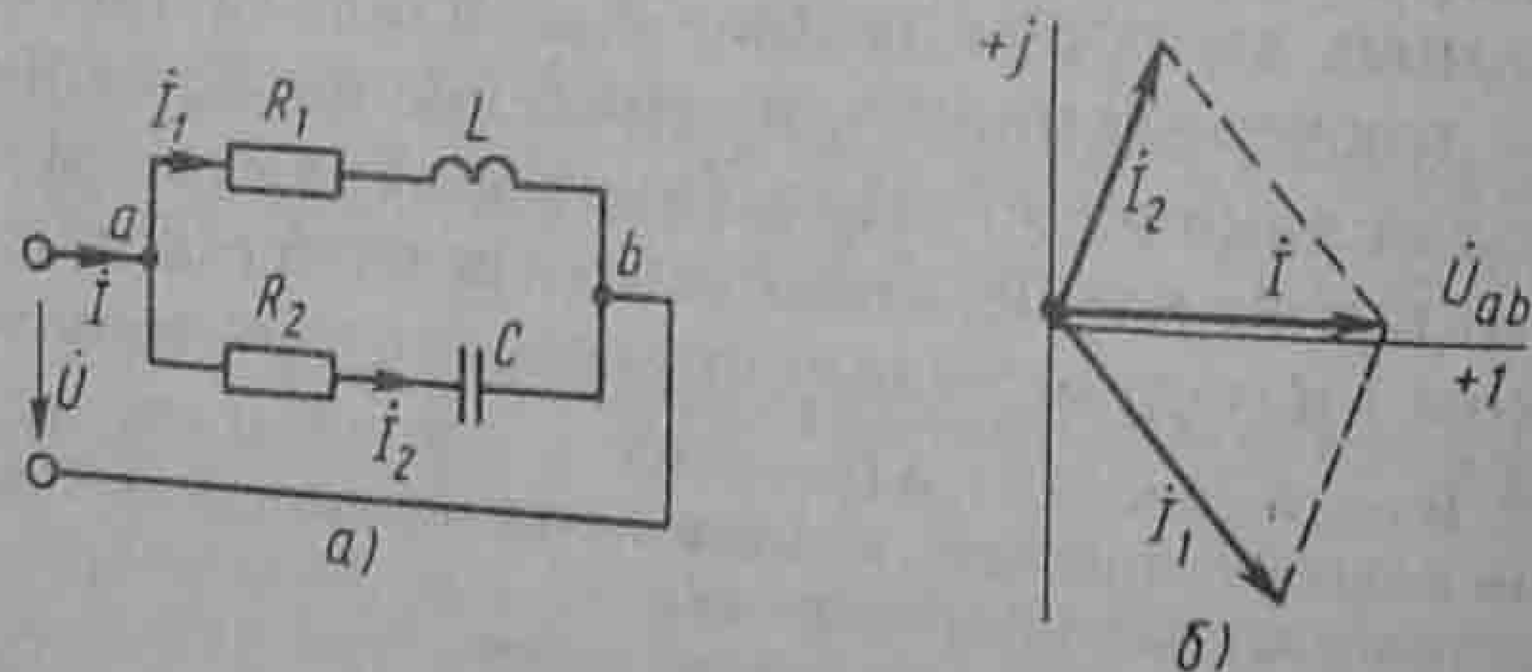



Рис. 3.25

[1] Следовательно, для определения условий наступления разонанса следует приравнять нулю мнимую часть комплекса входного сопротивления двухполюсника. Такой способ справедлив, если не пренебрегать активными сопротивлениями индуктивных катушек.



По определению разонансного режима ток $\dot I$ должен совпадать по фазе с напряжением $\dot U$. Это будет при условии, что сумма реактивных проводимостей ветвей равна нулю: $b_1 + b_2 = 0$.

В соответствии с (3.36)

$$b_1 = \frac{\omega L}{R_1^2 + \omega^2 L^2},$$

$$b_2 = -\frac{1/\omega C}{R_2^2 + 1/\omega^2 C^2}.$$

Следовательно, условие наступления режима резонанса токов в схеме рис. 3.25, *а* можно записать так:

$$\frac{\omega L}{R_1^2 + \omega^2 L^2} = \frac{1/\omega C}{R_2^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}. \qquad (3.51)$$

На рис. 3.25, *б* изображена векторная диаграмма для резонансного режима. Из (3.51) следует, что если $R_2 = 0$, то резонанс наступит при

$$\frac{\omega L}{R_2^2 + \omega^2 L^2} = \omega C. \qquad (3.51а)$$

В еще более частном случае, когда $R_2 = 0$ и $R_1 \ll \omega L$, резонанс наступит при

$$\omega^2 LC \approx 1. \qquad (3.51б)$$

Резонанса можно достичь путем изменения $\omega$, $L$, $C$ или $R_1$ и $R_2$. Числовое значение тока в неразветвленной части схемы может быть меньше токов в ветвях схемы. При $R_2 = 0$, $R_1 \approx 0$ ток $I$ может оказаться ничтожно малым по сравнению с токами $I_1$ и $I_2$.

В идеализированном, практически не выполнимом режиме работы, когда $R_1 = R_2 = 0$, ток в неразветвленной части схемы рис. 3.25, *а* равен нулю и входное сопротивление равно бесконечности.

Обратим внимание на следующее. В формулу (3.51) входит пять величин ($L$, $C$, $R_1$, $R_2$, $\omega$). Если определять из нее $L$ или $C$, то может оказаться, что для искомой величины будут получены одно или два действительных значения либо мнимое значение.

Получение двух действительных значений для $L$ и $C$ свидетельствует о том, что при неизменных четырех параметрах вследствие изменения пятого можно получить два резонансных режима. (Пояснения к возникновению двух резонансных режимов при изменении одного параметра и неизменных остальных даются в примере 54).

Получение мнимых значений $L$ и $C$ свидетельствует о том, что при данных сочетаниях параметров резонанс невозможен.

Определим ω из (3.51):

$$\omega = \omega_0 \sqrt{\frac{L/C - R_1^2}{L/C - R_2^2}}, \qquad (а)$$

где $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ — резонансная частота в контуре без потерь при $R_1 = R_2 = 0$.

Поскольку угловая частота действительна и положительна, то числитель и знаменатель формулы (а) должны быть с одинаковыми знаками. Это имеет место при

а) $L/C > R_1^2$; $L/C > R_2^2$; б) $L/C < R_1^2$; $L/C < R_2^2$.

При $R_1 = R_2$ частота $\omega = \omega_0$. При $L/C = R_1^2 = R_2^2$

$$\omega = \omega_0\sqrt{0/0}, \qquad (б)$$

т. е. ω получается величиной неопределенной. Физически это означает, что резонанс может возникать при любой частоте. Сопротивление параллельного контура равно $R_1/2 + (\omega L)^2/2R_1$.

**Пример 43.** В схеме (рис. 3.25, *а*) $R_1 = 30$ Ом; $\omega L = 40$ Ом; $R_2 = 0$; $\omega = 10^3$ рад/с. При каком значения емкости конденсатора в схеме будет резонанс токов?

Р е ш е н и е. По формуле (3.51),

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{R_1^2 + (\omega L)^2}{\omega L} = \frac{30^2 + 40^2}{40} = 62{,}5 \text{ Ом};$$

$$C = \frac{1}{\omega X_C} = \frac{1}{10^3 \cdot 62{,}5} = 16 \text{ мкФ}.$$

**§ 3.27. Компенсация сдвига фаз.** Входное сопротивление большинства потребителей электрической энергии имеет индуктивный характер. Для того чтобы уменьшить потребляемый ими ток за счет снижения его реактивной составляющей и тем снизить потери энергии в генераторе и подводящих проводах, параллельно приемнику энергии включают батарею конденсаторов.

Уменьшение сдвига фаз между напряжением на приемнике и током, потребляемым от генератора, называют *компенсацией сдвига фаз*.

Компенсация сдвига фаз существенна для энергоемких потребителей, например крупных заводов. Осуществляется она в месте ввода линии питания в распределительном устройстве. Экономически выгодно подключать конденсаторы на возможно более высокое напряжение (ток через конденсаторы $I_C = U\omega C$). Сдвиг фаз φ между напряжением и током, потребляемым от источника питания, доводят до значения, при котором $\cos\varphi \approx 0{,}9 \div 0{,}95$.

**§ 3.28. Резонанс напряжений.** Резонанс в схеме последовательного соединения R, L, C (рис. 3.26, *а*) называют *резонансом напряжений*.



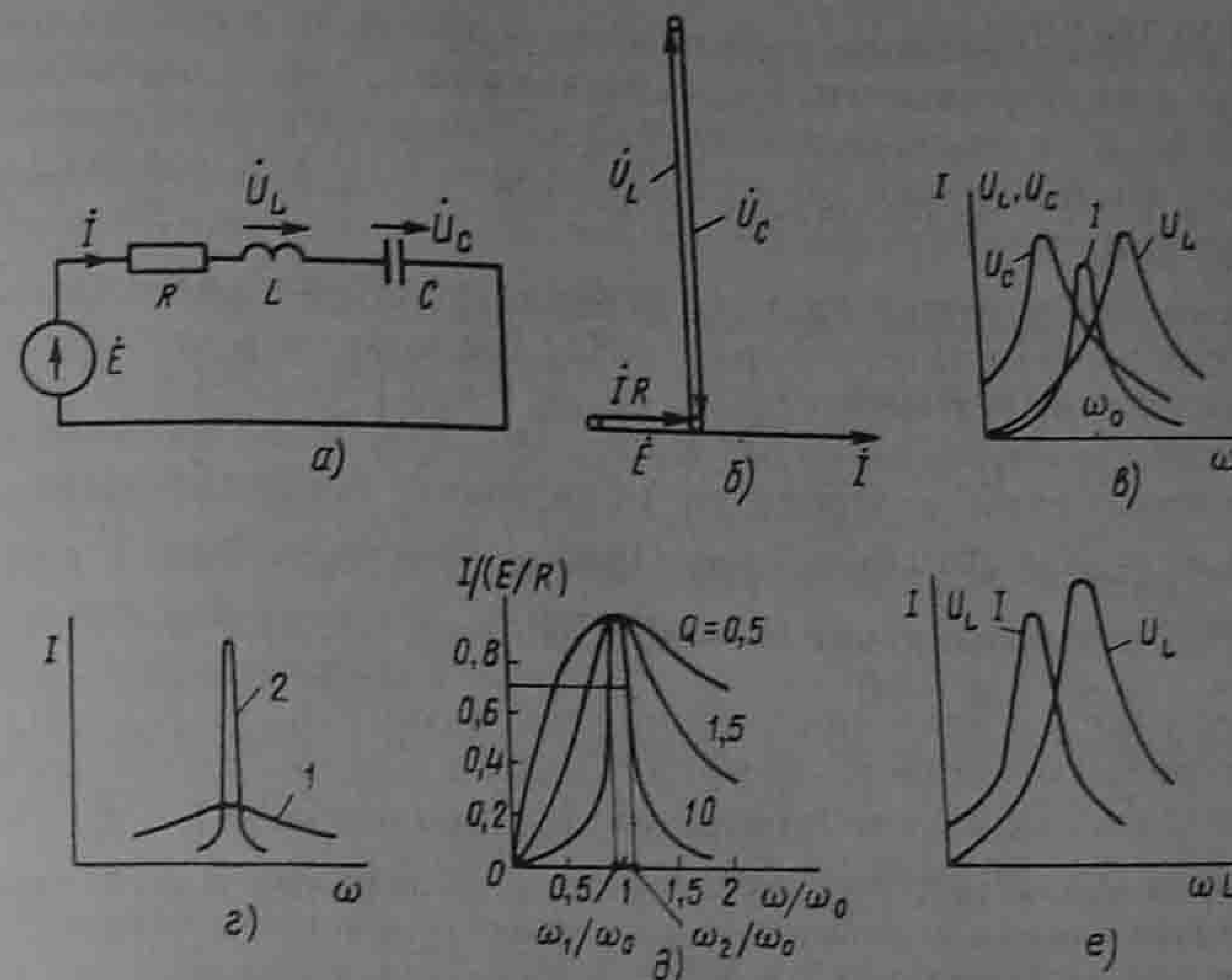


Рис. 3.26

При резонансе ток в цепи должен совпадать по фазе с ЭДС $\dot E$. Это возможно, если входное сопротивление схемы $Z = R + j(\omega L - 1/\omega C)$ будет чисто активным. Условие наступления резонанса в схеме (рис. 3.26, *а*)

$$\omega_0 L = 1/(\omega_0 C), \qquad (3.52)$$

где $\omega_0$ — резонансная частота.

При этом $\dot I = \dot E/R$. Напряжение на индуктивном элементе при резонансе равно напряжению на емкостном:

$$U_L = U_C = \omega_0 L I = \frac{\omega_0 L}{R} E.$$

Отношение

$$\frac{\omega_0 L}{R} = \frac{\sqrt{L/C}}{R} = Q \qquad (3.53)$$

называют *добротностью* резонансного контура. Добротность показывает, во сколько раз напряжение на индуктивном (емкостном) элементе превышает напряжение на входе схемы в резонансном режиме. В радиотехнических устройствах Q может доходить до 300 и более. Векторная диаграмма для режима резонанса изображена на рис. 3.26, *б*.

*Характеристическим сопротивлением* ϱ для схемы (рис. 3.26, *а*) называют отношение напряжения на L и C в режиме резонанса к току в этом режиме: $\varrho = QR = \sqrt{L/C}$.

**§ 3.29. Исследование работы схемы рис. 3.26, *а* при изменении частоты и индуктивности.** Пусть в схеме рис. 3.26, *а* параметры $R$, $L$, $C$ и ЭДС $E$ постоянны, а меняется частота $\omega$. Рассмотрим характер изменений модулей тока $I$ и напряжений $U_L$ и $U_C$ в функции от $\omega$.

Ток в цепи

$$I = \frac{E}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{E}{R}\frac{1}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}.$$

При изменении $\omega$ меняется реактивное сопротивление цепи $X = \omega L - \frac{1}{\omega C}$: при $\omega$[1] $\rightarrow 0$ сопротивление $X \rightarrow \infty$ и ток $I \rightarrow 0$; при $\omega = 1/\sqrt{LC}$ сопротивление $X = 0$, ток $I = E/R$; при $\omega \rightarrow \infty$ сопротивление $X \rightarrow \infty$, ток $I \rightarrow 0$.

Напряжение

$$U_L = \omega L I = E\frac{\frac{Q\omega}{\omega_0}}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}.$$

При $\omega \rightarrow 0$ напряжение $U_L = 0$; при $\omega \rightarrow \infty$ напряжение $U_L \rightarrow E$ (рис. 3.26, *в*). При $Q > 1/\sqrt{2}$ кривая $U_L$ (и кривая $U_C$) проходит через максимум, при $Q < 1/\sqrt{2}$ кривая $U_L$ монотонно стремится к $E$.

При $\omega \rightarrow 0$ $U_C = I\frac{1}{\omega C} \rightarrow E$, при $\omega \rightarrow \infty$ $U_C \rightarrow 0$.

Из рис. 3.26, *в* видно, что максимумы напряжений $U_L$ и $U_C$ имеют место при частотах, не равных резонансной частоте $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$: максимум $U_L$ имеет место при частоте $\omega_L > \omega_0$, а максимум $U_C$ — при частоте $\omega_C < \omega_0$

$$\left(\omega_L = \omega_0\sqrt{\frac{2}{2 - \frac{R^2 C}{L}}};\ \omega_C = \frac{\omega_0^2}{\omega_L}\right).$$

На рис. 3.26, *г* изображены две кривые, характеризующие зависимость $I = f(\omega)$ для цепи с неизменными $L$, $C$ и $E$ при двух различных значениях $R$. Для кривой 2 сопротивление $R$ меньше (а добротность $Q$ больше), чем для кривой 1.

Обычно кривые изображают в относительных единицах (рис. 3.26, *г*), откладывая ток в долях от тока при резонансе, а частоту — в долях от резонансной частоты. Графики тока в относительных единицах изображены на рис. 3.26, *д*. Они построены по формуле

$$\frac{I}{E/R} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2(\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)^2}}.$$

---

[1] Стрелка → заменяет слово «стремящийся» или соответственно «стремится».



Чем меньше активное сопротивление резонансного контура при неизменных остальных параметрах схемы, т. е. чем больше добротность контура $Q$, тем более острой (пикообразной) становится форма кривой $I = f(\omega)$.

*Полосой пропускания* резонансного контура называют полосу частот $\omega_2 - \omega_1 = \omega_0/Q$, на границах которой отношение $\frac{I}{E/R}$ составляет 0,707 (см. рис. 3.27, *д*).

Граничные частоты $\omega_{1,2} = \frac{\omega_0}{2Q}(\sqrt{1 + 4Q^2} \pm 1)$. Аргумент входного сопротивления схемы рис. 3.26, *а* $\varphi = \operatorname{arctg} Q(\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)$.

Если в схеме рис. 3.26, *а* изменять не частоту, а индуктивность $L$, то зависимости $I$, $U_L$ в функции от $X_L = \omega L (\omega = \text{const})$ будут иметь вид кривых рис. 3.26, *е*.

Так как $U_C = \frac{1}{\omega C}I$, а $1/\omega C = \text{const}$, то кривая $U_C = f(\omega L)$ качественно имеет такой же вид, что и кривая $I = f(\omega L)$.

**Пример 44.** В схеме (рис. 3.26, *а*) $R = 10$ Ом; $L = 1$ Гн; $C = 1$ мкФ. Определить резонансную частоту $\omega_0$, добротность $Q$, а также напряжение $U_C$, если на вход схемы подано напряжение 10 мВ при резонансной частоте.

Р е ш е н и е. Резонансная частота $\omega_0 = 1/\sqrt{LC} = 1/\sqrt{10^{-6}} = 10^3$ рад/с.

Добротность $Q = \omega_0 L/R = (10^3 \cdot 1)/10 = 100$. Ток в цепи $I = E/R = 0{,}01/10 = 1$ мА. Напряжение на конденсаторе $U_C = QE = 100 \cdot 0{,}01 = 1$ В.

**§ 3.30. Частотные характеристики двухполюсников.** Входное сопротивление и входная проводимость двухполюсника в общем случае являются функциями частоты $\omega$. Под *частотными характеристиками* (ЧХ) понимают следующие типы характеристик: 1) зависимость модуля входного сопротивления (проводимости) от частоты $\omega$; 2) зависимость действительной или мнимой части входного сопротивления (проводимости) от частоты $\omega$. ЧХ могут быть получены расчетным (если известна схема, характер элементов и их числовые значения) либо опытным (в этом случае схему двухполюсника и характер составляющих ее элементов можно и не знать) путем.

При снятии ЧХ опытным путем на вход двухполюсника подают напряжение, частоту которого изменяют в широких пределах, начиная с нуля, и по результатам измерений подсчитывают модуль входного сопротивления (проводимости) или действительную (мнимую) часть входного сопротивления (проводимости).

В общем случае двухполюсники содержат резистивные и реактивные элементы. В частном случае двухполюсники могут состоять только из реактивных элементов, тогда их называют *реактивными двухполюсниками*. Применительно к ним под ЧХ понимают зависимости $X = f(\omega)$ или $b = f(\omega)$. ЧХ для несложных двухполюсников, содержащих резистивные и реактивные элементы, иногда можно качественно строить на основании простых физических соображений о характере изменения сопротивления отдельных элементов

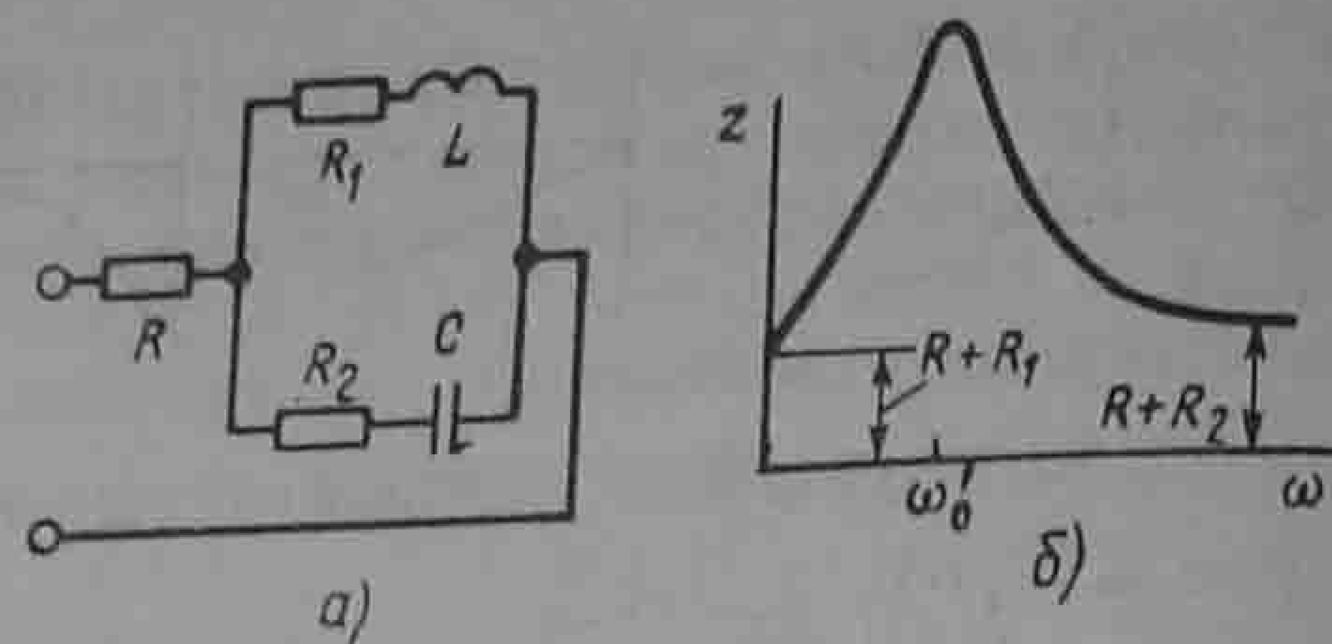



Рис. 3.27

этого двухполюсника в функции частоты. Если это сделать затруднительно, то прибегают к аналитическому расчету либо к снятию ЧХ опытным путем.

Качественно построим характеристику $z = f(\omega)$ для двухполюсника рис. 3.27, *а* (рис. 3.27, *б*). При $\omega = 0$ (конденсатор представляет собой разрыв) $z = R + R_1$. При $\omega \to \infty$ сопротивление конденсатора $1/\omega C \to 0$, а индуктивное сопротивление $\omega L \to \infty$. Поэтому при $\omega \to \infty$ $z = R + R_2$. При $\omega = \omega_0'$ имеет место режим резонанса токов и потому входное сопротивление имеет максимум. В области частот $0 - \omega_0'$ $z$ имеет индуктивный характер, в области $\omega_0' - \infty$ — емкостный.

Если $R_1 = R_2 \ll L/C$, то при

$$\omega_0' = \omega_0 \cong \frac{1}{\sqrt{LC}} \; z \approx R + \frac{L/C}{2R_1} \approx \frac{L/C}{2R_1}.$$

Рассмотрим вопрос о построении частотных характеристик реактивных двухполюсников, не содержащих резистивных сопротивлений.

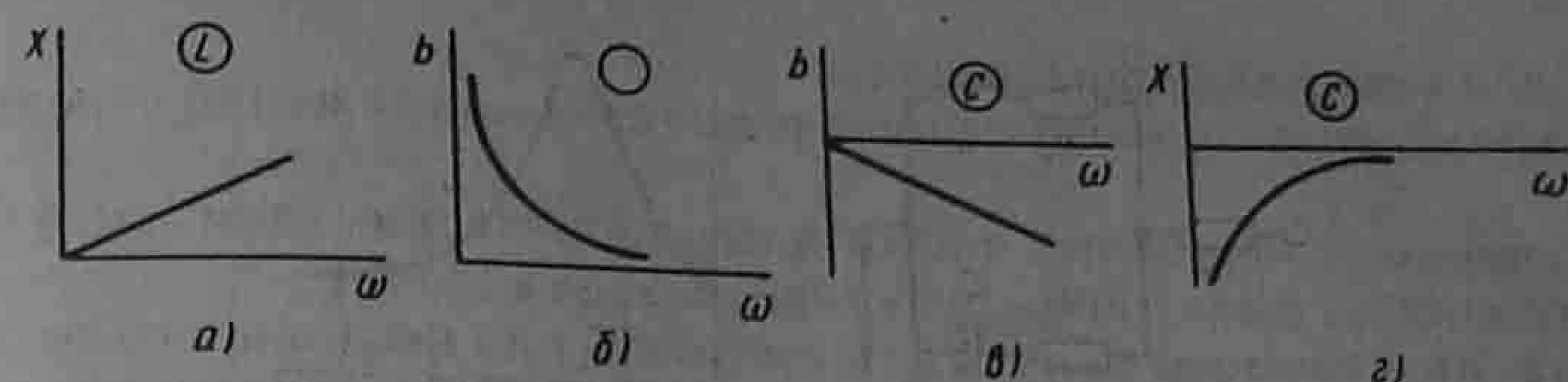
Входное сопротивление их $Z = jX$, а входная проводимость $Y = 1/Z = -j\frac{1}{X} = -jb$ $b = 1/X$. Частотная характеристика таких двухполюсников — это зависимость $X(\omega)$ или $b(\omega)$.

Эти зависимости взаимно обратны.

Для индуктивного элемента $X(\omega) = \omega L$ (рис. 3.28, *а*), а $b(\omega) = \frac{1}{\omega L}$ (рис. 3.28, *б*). Для емкостного элемента $b(\omega) = -\omega C$ (рис. 3.28, *в*), а $X(\omega) = -\frac{1}{\omega C}$ (рис. 3.28, *г*). Если учесть, что при последовательном соединении элементов сопротивления элементов складывают, то ясно, что для получения $X(\omega)$ последовательно соединенных элементов надо сложить ординаты кривых $X(\omega)$ этих элементов.

ЧХ последовательно соединенных $L_1$ и $C_1$ (рис. 3.28, *д*) построена на рис. 3.28, *е* в виде кривой *3* (прямая *1* — это ЧХ $L_1$, а кривая *2* — ЧХ $C_1$). Зависимость $b(\omega)$ для схемы рис. 3.28, *д* изображена на рис. 3.28, *ж*. При частоте $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}$ кривая $X(\omega)$ пересекает ось абсцисс,





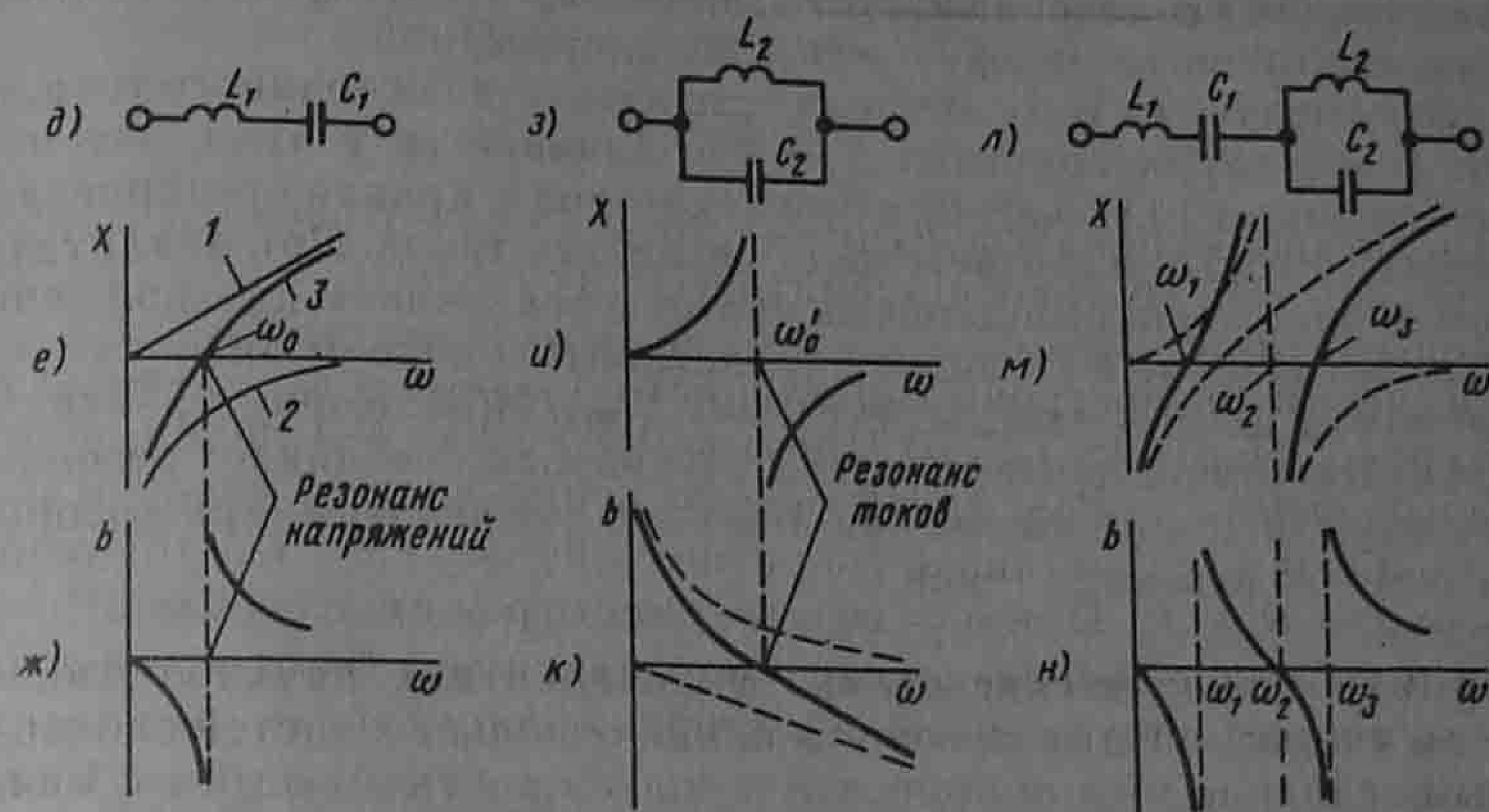




Рис. 3.28

а кривая $b(\omega)$ претерпевает разрыв от $-\infty$ до $+\infty$. При этой частоте имеет место резонанс напряжений.

Если учесть, что при параллельном соединении элементов проводимости их надо сложить, то ясно, что для получения кривой $b(\omega)$ параллельно соединенных элементов надо сложить ординаты кривых $b(\omega)$ этих элементов. Зависимость $b(\omega)$ для схемы рис. 3.28, *з* изображена на рис. 3.28, *к*, а обратная ей зависимость $X(\omega)$ — на рис. 3.28, *и*. При частоте $\omega_0' = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}$ кривая $b(\omega)$ пересекает ось абсцисс, а $X(\omega)$ претерпевает разрыв от $+\infty$ до $-\infty$. При этой частоте имеет место резонанс токов в цепи (рис. 3.28, *з*). На рис. 3.28, *л* последовательно соединены два двухэлементных ранее рассмотренных двухполюсника. Так как $X(\omega)$ каждого из этих двухполюсников построена, то результирующее $X(\omega)$ схемы рис. 3.28, *л* получим, суммируя ординаты $X(\omega)$ этих двухполюсников (т. е. кривых рис. 3.28, *е*, *и*). Зависимость $X(\omega)$ для схемы рис. 3.28, *л* см. рис. 3.28, *м*, а $b(\omega)$ — на рис. 3.28, *н*. При плавном увеличении частоты в схеме (рис. 3.28, *ж*), начиная с $\omega = 0$, сначала возникает резонанс напряжений при частоте $\omega_1$, затем резонанс токов при $\omega_2$, после этого резонанс напряжений при $\omega_3$. При дальнейшем увеличении $\omega$ резонансов возникать не будет.

Сделаем следующие выводы:

1) режимы резонанса токов и резонанса напряжений чередуются;

2) число резонансных частот для канонических схем (см. § 3.31) на единицу меньше числа реактивных элементов;

3) если в схеме есть путь для прохождения постоянного тока, то при плавном увеличении частоты, начиная с нуля, первым наступит резонанс токов, если нет — резонанс напряжений.

Это следует из того, что если есть путь для постоянного тока, то при $\omega = 0$ характеристика $X = f(\omega)$ начинается с нуля, затем $X$ увеличивается $[dX/d\omega > 0]$, а при некоторой $\omega$ кривая претерпевает разрыв, который и соответствует резонансу токов. При аналитическом определении резонансных частот в реактивном двухполюснике сопротивление его следует представить в виде отношения двух полиномов по степеням $\omega$, т. е. $X = N(\omega)/M(\omega)$. Корни уравнения $N(\omega) = 0$ соответствуют частотам, при которых возникает резонанс напряжений, корни уравнения $M(\omega) = 0$ — частотам, при которых имеет место резонанс токов.

**§ 3.31. Канонические схемы. Эквивалентные двухполюсники.** Путем эквивалентных преобразований отдельных частей сложных схем последние можно привести к более простым схемам с минимально возможным числом $R$, $L$, $C$ в них — к каноническим схемам. Так, схемы рис. 3.28 являются каноническими. Преобразования осуществляют либо путем перехода от звезды к треугольнику (или наоборот) или от параллельно-последовательного соединения (рис. 3.29, *а*) к параллельному (рис. 3.29, *б*), либо от параллельного соединения (рис. 3.29, *в*) к последовательно-параллельному (рис. 3.29, *г*) и последующего упрощения схемы. Значения коэффициентов перехода: для рис. 3.29, *а*, *б* $b = a(1 + a)$; $c = (1 + a)^2$; $d = 1 + a$; для рис. 3.29, *в*, *г* $b = a^2/(1 + a)$; $c = 1/(1 + a)^2$; $d = a/(1 + a)$.

Двухполюсники рис. 3.29, *а*, *б*, как и рис. 3.29, *в*, *г*, называют *эквивалентными*, так как они имеют равные входные сопротивления при всех частотах.

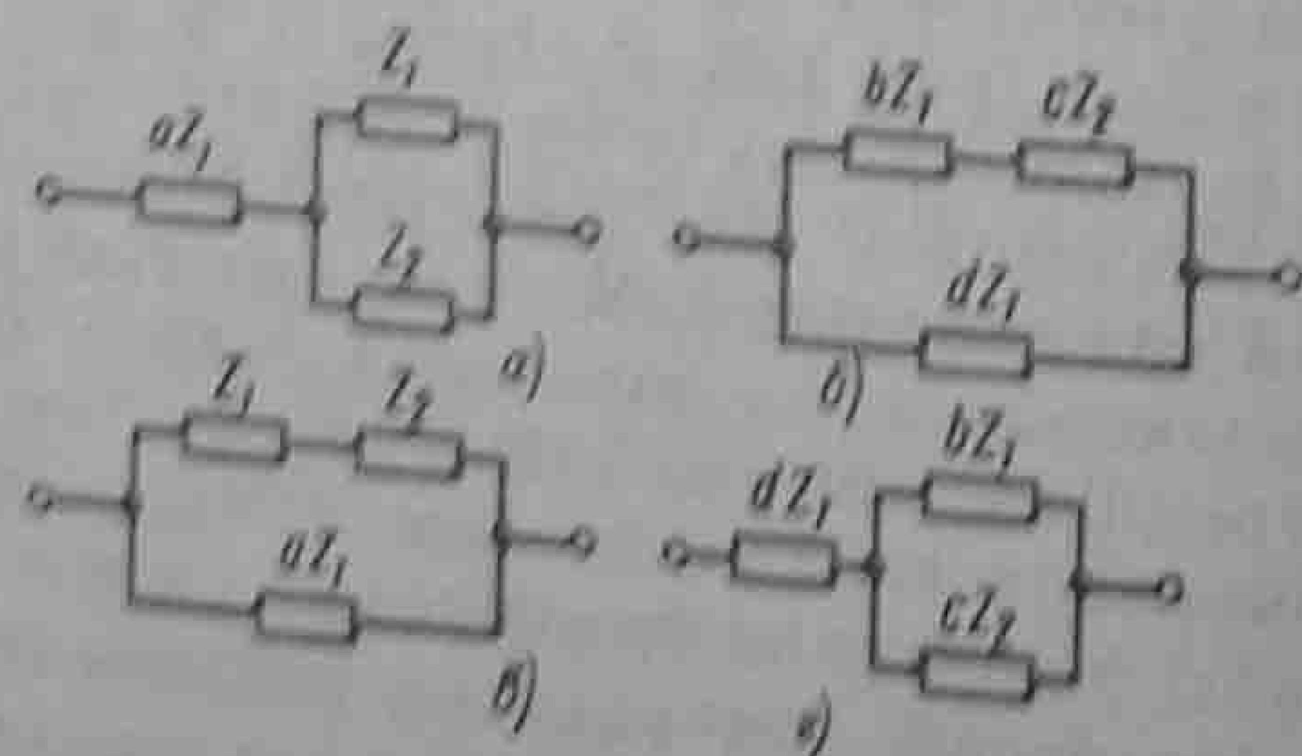



Рис. 3.29



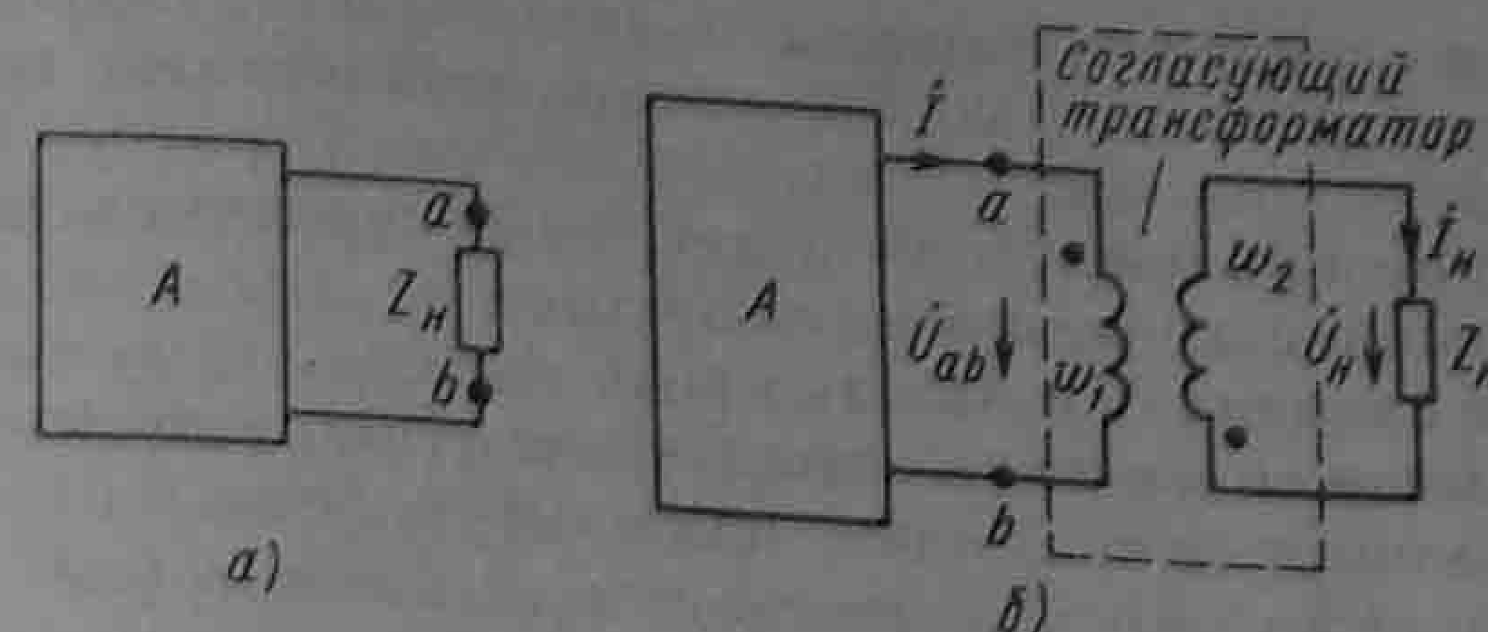



Рис. 3.30

**§ 3.32. Передача энергии от активного двухполюсника нагрузке.** К зажимам $ab$ активного двухполюсника (рис. 3.30, *а*) подключена нагрузка $Z_н = R_н + jX_н$. Требуется выяснить, при соблюдении каких условий в нагрузке выделяется максимальная активная мощность.

По методу эквивалентного генератора (см. § 1.25) ток в нагрузке

$$\dot{I} = \dot{U}_{abx}/(Z_{вх} + Z_н),$$

где $Z_{вх} = R_{вх} + jX_{вх}$ — входное сопротивление двухполюсника по отношению к зажимам $ab$, поэтому

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_{abx}}{R_{вх} + R_н + j(X_{вх} + X_н)}.$$

По условию, $R_{вх}$ и $X_{вх}$ заданы и изменять их нельзя. Изменять можно лишь $R_н$ и $X_н$. Выберем такое $X_н$, чтобы ток в цепи был максимальным; это возможно, если $X_{вх} + X_н = 0$. При этом двухполюсник работает в резонансном режиме — ток через нагрузку по фазе совпадает с напряжением $\dot{U}_{abx} : \dot{I} = \dot{U}_{abx} : (R_{вх} + R_н)$.

Как и в цепи постоянного тока (см. § 1.26), если взять $R_н = R_{вх}$, выделяющаяся в нагрузке мощность максимальна:

$P_{max} = U^2_{abx}/(4R_{вх})$.

Таким образом, чтобы выделить в нагрузке, присоединяемой к активному двухполюснику с входным сопротивлением $R_{вх} + jX_{вх}$, максимально возможную мощность, необходимо выбрать следующие сопротивления нагрузки: $X_н = -X_{вх}$, $R_н = R_{вх}$.

**§ 3.33. Согласующий трансформатор.** Нагрузкой двухполюсника может быть какое-либо уже существующее устройство, сопротивление которого $Z_н$, так же как и входное сопротивление двухполюсника $Z_{вх}$, задано и не может быть изменено. В этом случае согласование нагрузок с двухполюсником осуществляют, присоединяя нагрузку не непосредственно к зажимам двухполюсника, а

через *согласующий трансформатор* (рис. 3.30, *б*). Обозначим через $w_1$ и $w_2$ число витков первичной и вторичной обмоток трансформатора. Активные сопротивления и индуктивности рассеяния обмоток весьма малы и при расчете не учитываем. Сердечник трансформатора (на рисунке не показан) выполнен из высококачественного магнитного материала с малыми потерями, поэтому ток холостого хода трансформатора мал по сравнению с током по обмотке $w_1$ при нагрузке. Такой трансформатор по своим свойствам приближается к трансформатору, который называют *идеальным* (см. § 3.34). Для него справедливы соотношения (обозначения соответствуют рис. 3.30, *б*) $\dot I w_1 - \dot I_н w_2 \approx 0$, $\dot U_{ab}/\dot U_н = w_1/w_2$. Пояснения к этим формулам см. в § 15.67 (обозначения согласуются так: $\dot U_{ab} = \dot U_1$, $\dot I_н = \dot I_2$ и $\dot I = \dot I_1$). Входное сопротивление изображенной пунктиром части схемы по отношению к зажимам $ab$

$$Z_{вх} = \frac{\dot U_{ab}}{\dot I} = \frac{\dot U_н \frac{w_1}{w_2}}{\dot I_н \frac{w_2}{w_1}} = Z_н \frac{w_1^2}{w_2^2} = R_н\left(\frac{w_1}{w_2}\right)^2 + jX_н\left(\frac{w_1}{w_2}\right)^2.$$

В соответствии с § 3.32 это сопротивление должно быть комплексно-сопряженным с сопротивлением двухполюсника: $Z_{вх} = R_{вх} + jX_{вх}$.

Отсюда следует, что для согласования по активному сопротивлению $R_{вх} = R_н(w_1/w_2)^2$, а для согласования по реактивному сопротивлению $X_{вх} = -X_н(w_1/w_2)^2$. Отношение чисел витков $w_1/w_2$ определим из первого условия $w_1/w_2 = \sqrt{R_{вх}/R_н}$. При выборе числа витков $w_1$ и площади поперечного сечения сердечника трансформатора $S$ должно быть учтено, что в установившемся режиме работы амплитудное значение потока в сердечнике не должно достигать потока насыщения этого сердечника, иначе будет нарушено условие $\dot I_1 w_1 - \dot I_н w_2 \approx 0$. Для выполнения согласования по реактивному сопротивлению последовательно с нагрузкой включают дополнительное сопротивление соответствующего характера.

**§ 3.34. Идеальный трансформатор**. В качестве элементов схем замещения электрических цепей наряду с $R$, $L$, $C$, $M$ в литературе используют идеальный трансформатор (ИТ).

*Идеальным* называют трансформатор без потерь, у которого входные и выходные токи и напряжения связаны соотношениями $U_1 = KU_2$, $I_2 = KI_1$, где $K = w_1/w_2$ — коэффициент трансформации. Идеальный трансформатор трансформирует напряжение $\dot U_1$ в напряжении $\dot U_2$, ток $\dot I_1$ — в ток $\dot I_2$, сопротивление нагрузки $Z$ — в сопротивление $K^2Z$ (см. § 3.33).



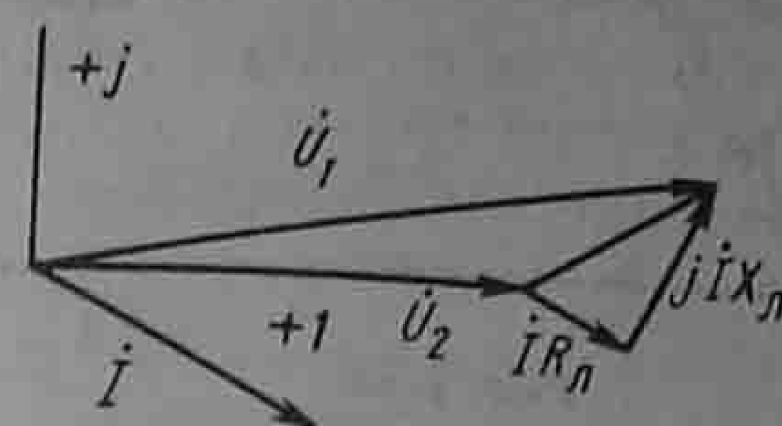


Рис. 3.31

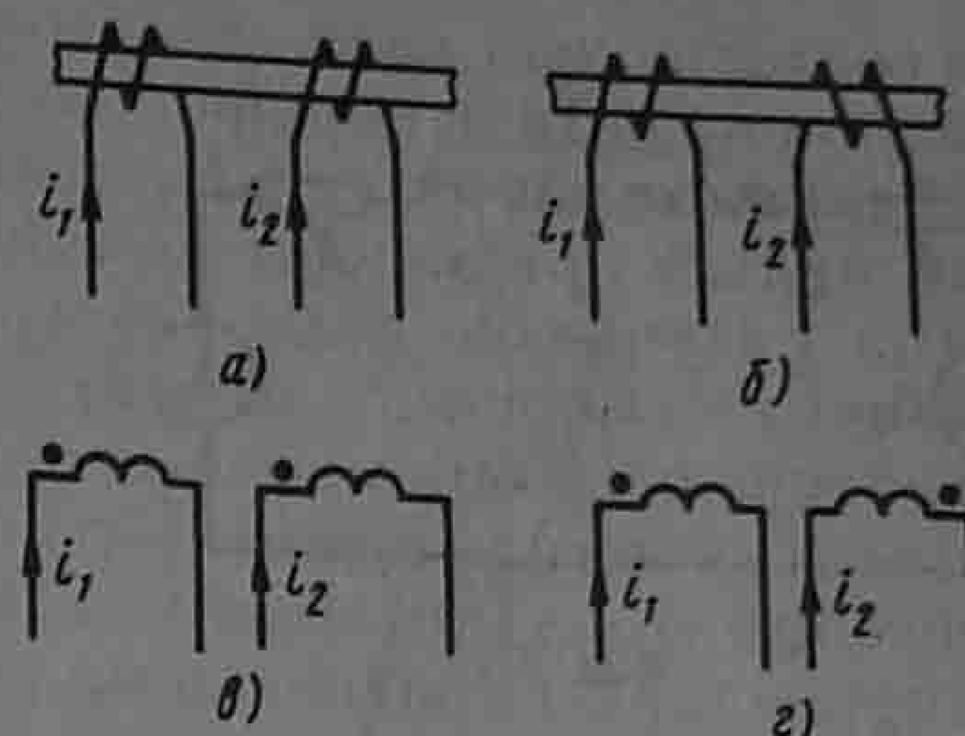


Рис. 3.32

**§ 3.35. Падение и потеря напряжения в линии передачи энергии.** Генератор соединен с приемником энергии линией передачи, которая обладает активным $R_л$ и индуктивным $X_л = \omega L_л$ сопротивлениями.

Построим векторную диаграмму для цепи, состоящей из генератора, линии передачи и приемника. Для определенности положим, что нагрузка приемника имеет индуктивный характер. Вектор напряжения в конце линии (на приемнике) направим по оси +1 (рис. 3.31); вектор тока $\dot I$ отстает от него в силу индуктивного характера нагрузки. Падение напряжения в активном сопротивлении линии $\dot I R_л$ совпадает по фазе с током, падение напряжения в индуктивном сопротивлении $\dot I jX_л$ опережает ток на 90°.

Под падением напряжения в линии передачи понимают модуль геометрической разности векторов в начале ($\dot U_1$) и конце ($\dot U_2$) линии:

$$I\sqrt{R_л^2 + (\omega L_л)^2}.$$

Потеря напряжения в линии передачи равна разности модулей напряжения в начале и конце линии, т. е. $|\dot U_1| - |\dot U_2|$. Потеря напряжения показывает, на сколько вольт напряжение в конце линии меньше, чем напряжение в ее начале.

Как правило, падение напряжения больше потери напряжения.

**§ 3.36. Расчет электрических цепей при наличии в них магнитно-связанных катушек.** В состав электрических цепей могут входить катушки, магнитно-связанные с другими катушками. Поток одной из них пронизывает другие и наводит в них ЭДС взаимоиндукции, которые должны быть учтены при расчете. При составлении уравнений для магнитно-связанных цепей необходимо знать, согласно или встречно направлены потоки самоиндукции и взаимоиндукции.

Правильное заключение об этом можно сделать, если известно направление намотки катушек на сердечнике и выбрано положительное направление токов в них.

На рис. 3.32, *а* катушки включены согласно, на рис. 3.32, *б* — встречно. Чтобы не загромождать чертеж, сердечники катушек на электрических схемах обычно не изображают, ограничиваясь тем, что одноименные зажимы (например, начала катушек) помечают одинаковыми значками, например точками.

Схема рис. 3.32, *в* эквивалентна схеме рис. 3.32, *а*, а схема рис. 3.32, *г* — схеме рис. 3.32, *б*.

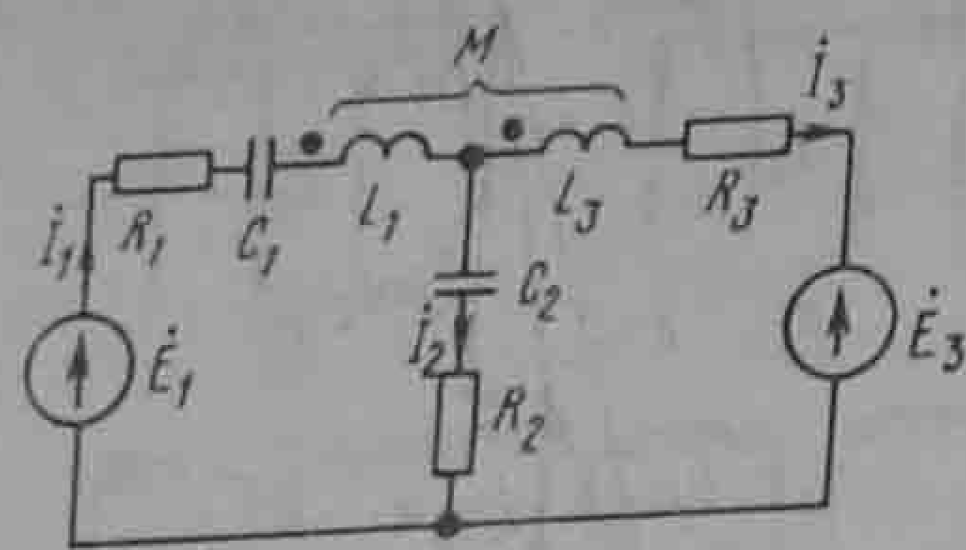



Рис. 3.33

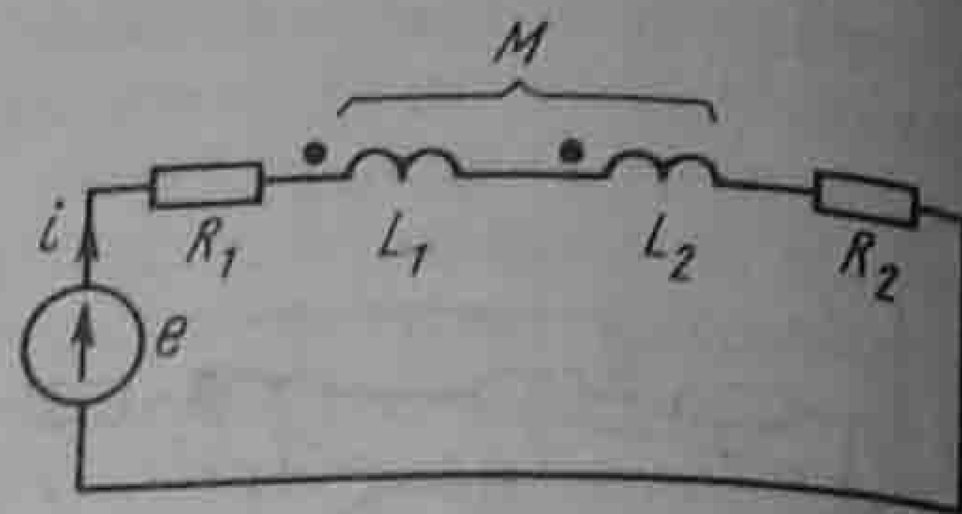



Рис. 3.34

Если на электрической схеме токи двух магнитно-связанных катушек одинаково ориентированы относительно одноименно обозначенных зажимов, например оба направлены к точкам или оба направлены от точек, то имеет место согласное включение, в противном случае — встречное.

Если магнитно связано несколько катушек, то начало и конец размечают для каждой пары катушек отдельно.

На примере рис. 3.33 рассмотрим методику составления уравнений для расчета магнитно-связанных цепей. Произвольно выберем положительные направления токов в ветвях схемы. Направления обхода контуров выберем по часовой стрелке. Составим уравнения для мгновенных значений: $i_1 = i_2 + i_3$.

Для левого контура (первая и вторая ветви)

$$i_1R_1 + \frac{1}{C_1}\int i_1 dt + L_1\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_3}{dt} + \frac{1}{C_2}\int i_2 dt + i_2R_2 = e_1. \quad (а)$$

Перед слагаемым $M\frac{di_3}{dt}$ поставлен тот же знак, что и перед $L_1\frac{di_1}{dt}$, так как токи $i_1$ и $i_2$ входят в одноименные зажимы магнитно-связанных катушек, т. е. имеет место согласное включение. Сумма слагаемых $M\frac{di_3}{dt} + L_1\frac{di_1}{dt}$ представляет собой падение напряжения на первой катушке.

Слагаемые левой части уравнения (а) взяты со знаком плюс, так как на всех участках первого контура положительные направления токов совпадают с направлением обхода контура.

Составим уравнение для правого контура (вторая и третья ветви). Направление тока $i_2$ встречно направлению обхода контура, поэтому сумма падений напряжений во второй ветви войдет в уравнение со знаком минус:

$$-\frac{1}{C_2}\int i_2 dt - i_2R_2 + L_3\frac{di_3}{dt} + M\frac{di_1}{dt} + i_3R_3 = -e_3.$$

В комплексной форме записи:

$$\dot I_1 = \dot I_2 + \dot I_3; \quad (б)$$



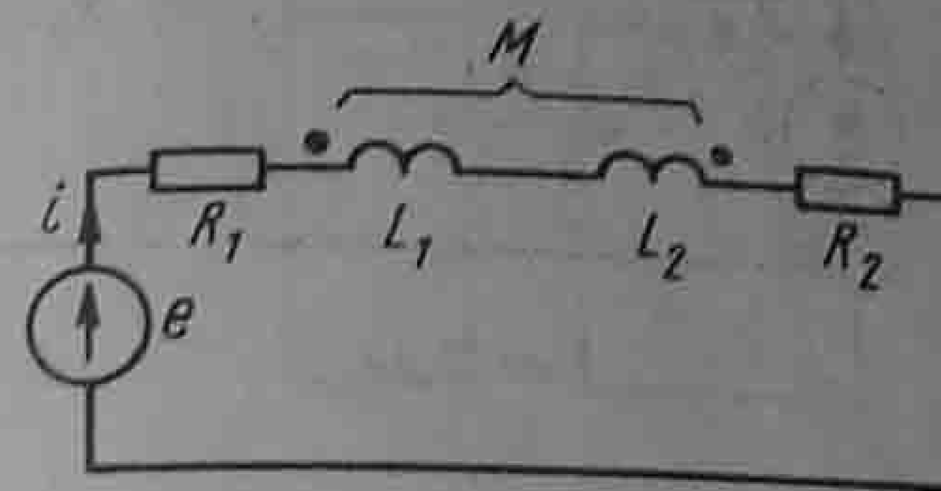



Рис. 3.35

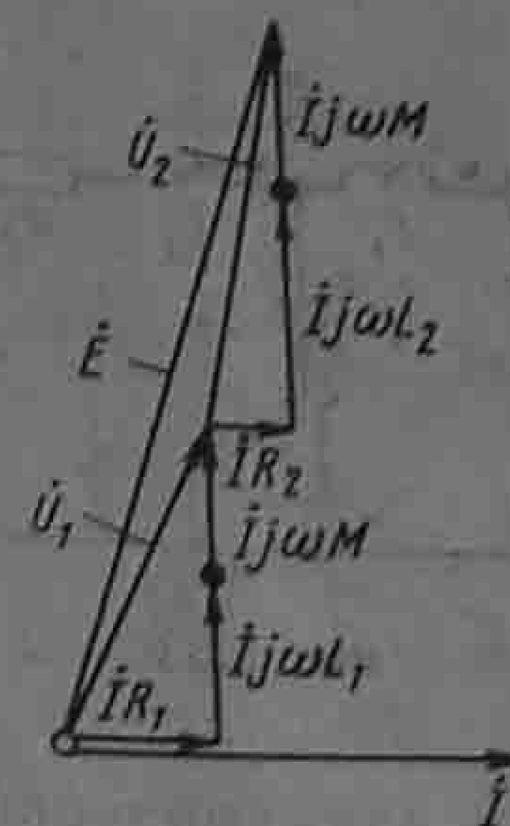



Рис. 3.36

$$\dot I_1\left(R_1 - \frac{j}{\omega C_1} + j\omega L_1\right) + \dot I_2\left(R_2 - \frac{j}{\omega C_2}\right) + \dot I_3 j\omega M = \dot E_1; \quad (в)$$

$$\dot I_1 j\omega M - \dot I_2\left(R_2 - \frac{j}{\omega C_2}\right) + \dot I_3(R_3 + j\omega L_3) = -\dot E_3. \quad (г)$$

**§ 3.37. Последовательное соединение двух магнитно-связанных катушек.** На рис. 3.34 изображена схема последовательного согласного включения двух катушек, а на рис. 3.35 — последовательного встречного включения тех же катушек.

При согласном включении

$$iR_1 + L_1\frac{di}{dt} + M\frac{di}{dt} + L_2\frac{di}{dt} + M\frac{di}{dt} + iR_2 = e.$$

В комплексной форме записи:

$$\dot I[R_1 + R_2 + j\omega(L_1 + L_2 + 2M)] = \dot E;$$

$$\dot I Z_{\text{согл}} = \dot E;$$

$$Z_{\text{согл}} = R_1 + R_2 + j\omega(L_1 + L_2 + 2M). \quad (3.54)$$

Векторная диаграмма для согласного включения изображена на рис. 3.36, где $\dot U_1$ — напряжение на первой катушке; $\dot U_2$ — на второй.

При встречном включении

$$iR_1 + L_1\frac{di}{dt} - M\frac{di}{dt} + L_2\frac{di}{dt} - M\frac{di}{dt} + iR_2 = e.$$

Отсюда

$$\dot I Z_{\text{встр}} = \dot E,$$

где

$$Z_{\text{встр}} = R_1 + R_2 + j\omega(L_1 + L_2 - 2M). \quad (3.55)$$

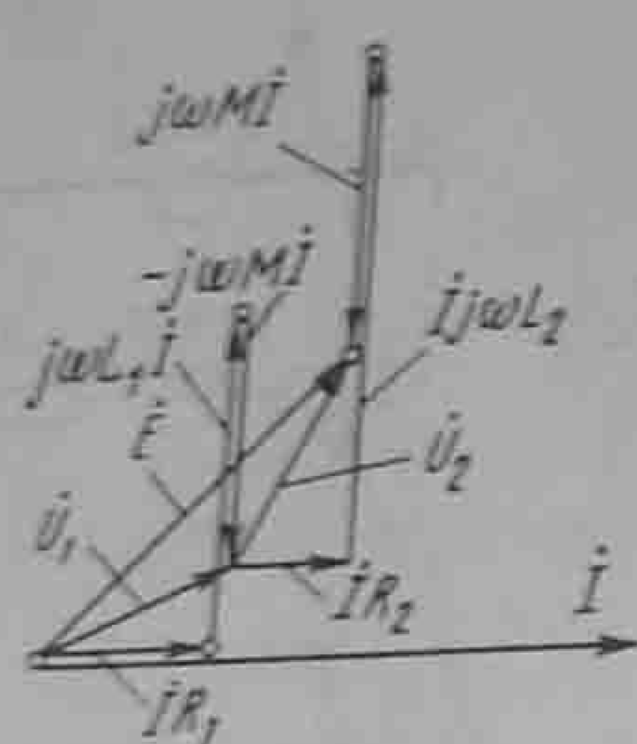



Рис. 3.37

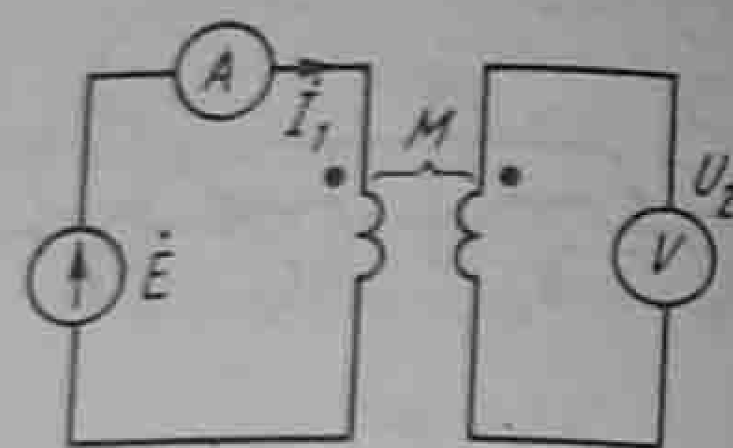



Рис. 3.38

Векторная диаграмма для встречного включения при $L_1>M$ и $L_2>M$ изображена на рис. 3.37.

**§ 3.38. Определение взаимной индуктивности опытным путем.** Обсудим два практически важных способа опытного определения взаимной индуктивности $M$ двух магнитно-связанных катушек.

*Первый способ.* Проделаем два опыта. В первый из них включим катушки последовательно и согласно. Измерим ток и напряжение на входе и активную мощность цепи. Во втором те же катушки включим последовательно и встречно и также измерим $I$, $U$, $P$. По результатам измерений найдем:

$$X_{\text{согл}} = \omega(L_1 + L_2 + 2M);$$

$$X_{\text{встр}} = \omega(L_1 + L_2 - 2M).$$

Разность $X_{\text{согл}} - X_{\text{встр}} = 4\omega M$, следовательно,

$$M = (X_{\text{согл}} - X_{\text{встр}})/(4\omega). \tag{3.56}$$

*Второй способ.* Подключим первую катушку к источнику синусоидальной ЭДС через амперметр (рис. 3.38), а к зажимам второй катушки присоединим вольтметр с большим внутренним сопротивлением. Измерим ток $I_1$ и напряжение $U_2$.

Мгновенное значение напряжения $u_2 = M\frac{di_1}{dt}$. Его действующее значение $U_2 = \omega M I_1$. Следовательно,

$$M = U_2/(\omega I_1). \tag{3.57}$$

**Пример 45.** В схеме (рис. 3.38) вольтметр показал 100 В, амперметр 10 А; $\omega$ = 314 рад/с. Определить $M$.

Решение. По формуле (3.57), $M = 100/(314 \cdot 10) = 0{,}0319$ Гн.

**§ 3.39. Трансформатор. Вносимое сопротивление.** Трансформатор представляет собой статическое (т. е. не имеющее подвижных



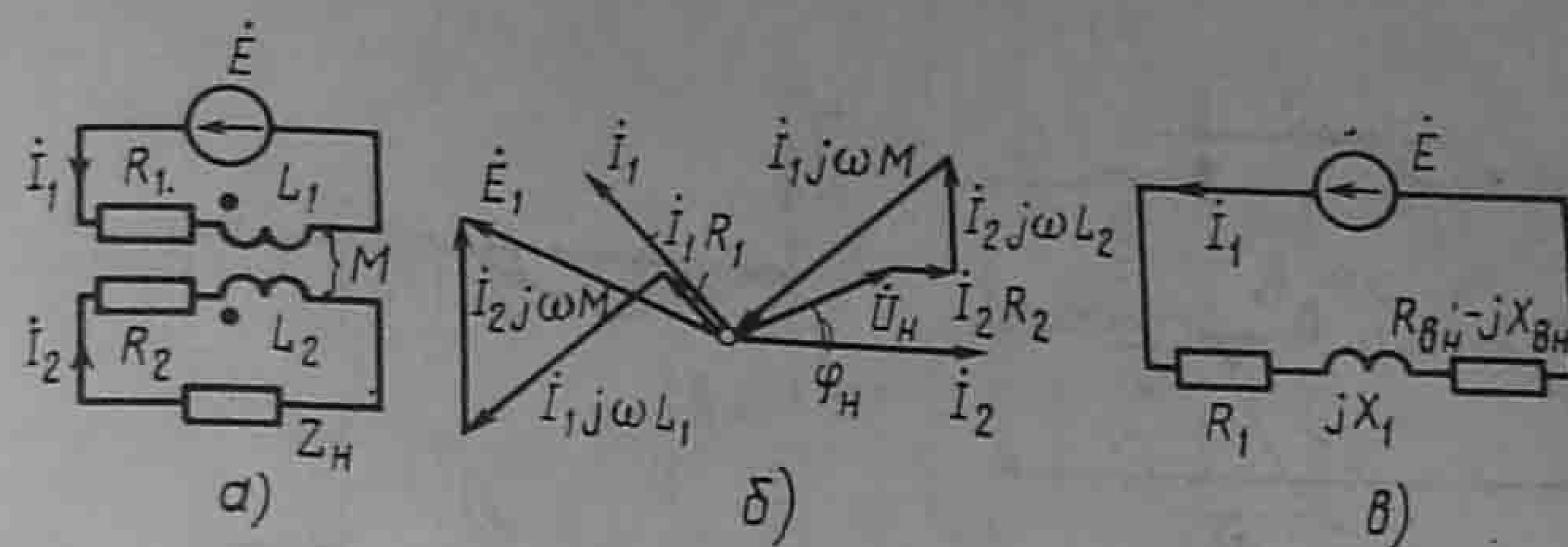



Рис. 3.39

частей) устройство, служащее для преобразования числового значения переменного во времени напряжения, а также для электрического разделения цепей и преобразования числовых значений сопротивлений. Передача энергии из одной цепи в другую производится трансформатором благодаря явлению взаимоиндукции.

Трансформатор имеет две обмотки, находящиеся на общем сердечнике. Магнитную проницаемость сердечника будем полагать постоянной. Параметры первичной обмотки $R_1$ и $L_1$, вторичной — $R_2$ и $L_2$. Взаимная индуктивность между обмотками $M$ (рис. 3.39, *а*). Сопротивление нагрузки, подключенной к зажимам вторичной обмотки, равно $Z_{\text{н}}$.

Выберем положительные направления токов $\dot I_1$ и $\dot I_2$. Обозначим напряжение на нагрузке $\dot U_{\text{н}}$. Запишем уравнения в комплексной форме:

для первичной цепи

$$\dot I_1 R_1 + \dot I_1 j\omega L_1 + \dot I_2 j\omega M = \dot E; \tag{3.58}$$

для вторичной цепи

$$\dot I_2 R_2 + \dot I_2 j\omega L_2 + \dot I_1 j\omega M + \dot U_{\text{н}} = 0. \tag{3.59}$$

На рис. 3.39, *б* качественно построим векторную диаграмму, полагая, что нагрузка $Z_{\text{н}} = z_{\text{н}} e^{j\varphi_{\text{н}}}$ имеет индуктивный характер. Ток $\dot I_2$ направим по оси +1. Напряжение на нагрузке $\dot U_{\text{н}}$ опережает ток $\dot I_2$ на угол $\varphi_{\text{н}}$. Падение напряжения $\dot I_2 R_2$ совпадает по фазе с током $\dot I_2$. Вектор $\dot I_2 j\omega L_2$ опережает вектор тока $\dot I_2$ на 90°.

В соответствии с уравнением (3.59) вектор $\dot I_1 j\omega M$ проводим так, чтобы геометрическая сумма падений напряжений во вторичной цепи равнялась нулю.

Вектор тока $\dot I_1$ отстает от вектора $\dot I_1 j\omega M$ на 90°. Вектор $\dot I_1 R_1$ совпадает с вектором тока $\dot I_1$ по фазе, а вектор $\dot I_1 j\omega L_1$ опережает вектор $\dot I_1$ на 90°.

Вектор $\dot I_2 j\omega M$ опережает вектор $\dot I_2$ на 90°. В соответствии с уравнением (3.58) геометрическая сумма $\dot I_1 R_1 + \dot I_1 j\omega L_1 + \dot I_2 j\omega M$ дает $\dot E_1$.

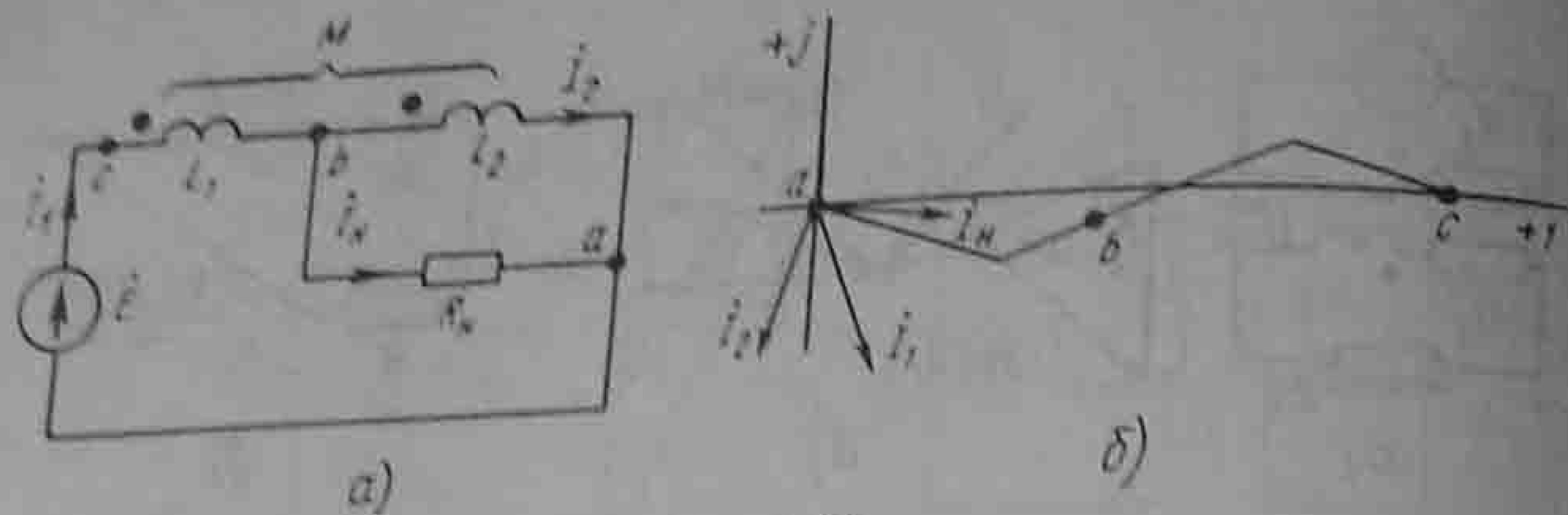



Рис. 3.40

Подставим в (3.59) $\dot U_н = \dot I_2 Z_н = \dot I_2(R_н + jX_н)$ и решим уравнения (3.58) и (3.59) относительно $\dot I_1$:

$$\dot I_1 = \frac{\dot E_1}{(R_1 + R_{вн}) + j(X_1 - X_{вн})},$$

где $R_{вн}$ и $X_{вн}$ — вносимые из вторичного контура в первичный активное и реактивное сопротивления. При этом

$$R_{вн} = \frac{\omega^2 M^2}{(R_2 + R_н)^2 + (\omega L_2 + X_н)^2}\left(R_2 + R_н\right);$$

$$X_{вн} = \frac{\omega^2 M^2}{(R_2 + R_н)^2 + (\omega L_2 + X_н)^2}\left(\omega L_2 + X_н\right).$$

*Вносимые сопротивления* представляют собой такие сопротивления, которые следовало бы "внести" в первичную цепь (включить последовательно с $R_1$ и $X_1$), чтобы учесть влияние нагрузки вторичной цепи трансформатора на ток в его первичной цепи (рис. 3.39, *в*).

**Пример 46.** Определить токи в схеме рис. 3.40, *а* и построить топографическую диаграмму, совместив ее с векторной диаграммой токов, полагая $\omega L_1 =$ Ом; $\omega L_2 = 3$ Ом; $\omega M = 1$ Ом; $R_н = 4$ Ом; $\dot E = 100$ В.

Р е ш е н и е. Составим уравнения по законам Кирхгофа. По первому закону Кирхгофа, $\dot I_1 = \dot I_2 + \dot I_н$.

При составлении уравнений по второму закону Кирхгофа обход контуров будем совершать по часовой стрелке. Тогда

$$\dot I_1 j\omega L_1 + \dot I_2 j\omega M + \dot I_н R_н = \dot E;$$

$$\dot I_1 j\omega M + \dot I_2 j\omega L_2 - \dot I_н R_н = 0.$$

В двух последних уравнениях заменим $\dot I_н$ на $\dot I_1 - \dot I_2$:

$$\dot I_1(R_н + j\omega L_1) + \dot I_2(j\omega M - R_н) = \dot E_2,$$
$$\dot I_1(j\omega M - R_н) + \dot I_2(R_н + j\omega L_2) = 0.$$

Подставим числовые значения:

$$\dot I_1(4 + 2j) + \dot I_2(j - 4) = 100;$$

$$\dot I_1(j - 4) + \dot I_2(4 + 3j) = 0.$$



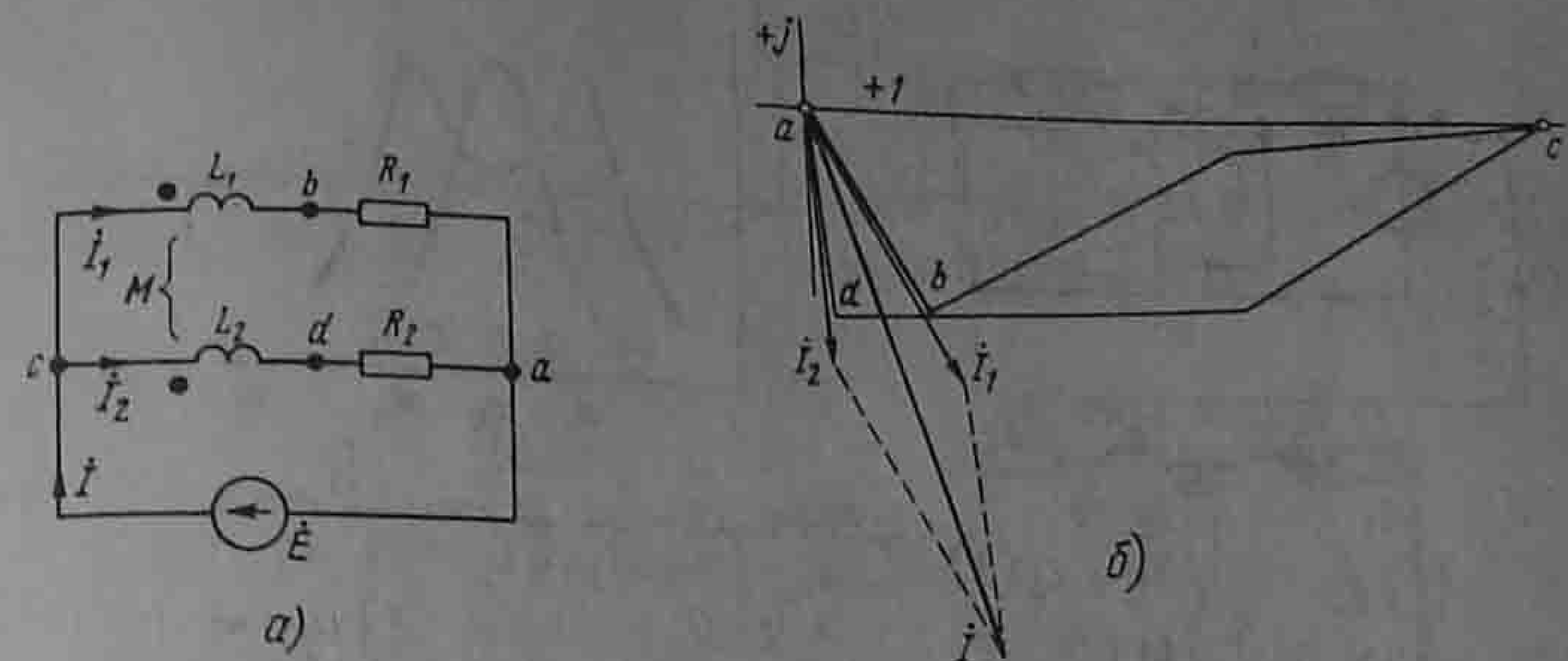



Рис. 3.41

Решение уравнений дает: $\dot I_1 = 17{,}7e^{-j63°}$ А; $\dot I_2 = 14{,}6e^{-j114°}$ А; $\dot I_н = \dot I_1 - \dot I_2 = 14{,}12e^{-j9°54'}$ А.

На рис. 3.40, *б* изображены топографическая диаграмма и совмещенная с ней векторная диаграмма токов.

**Пример 47.** Построить топографическую диаграмму для схемы (рис. 3.41, *а*), совместив ее с векторной диаграммой токов. Две ветви схемы связаны магнитно. Значения параметров: $\omega L_1 = 3$ Ом; $\omega L_2 = 4$ Ом; $\omega M = 3$ Ом; $R_1 = R_2 = 2$ Ом; $\dot E = 100$ В.

Р е ш е н и е. Обозначим токи в ветвях через $\dot I_1$ и $\dot I_2$ и ток в неразветвленной части схемы — через $\dot I$. Составим уравнения по второму закону Кирхгофа для согласного включения катушек:

$$\dot I_1(R_1 + j\omega L_1) + \dot I_2 j\omega M = \dot E;$$
$$\dot I_1 j\omega M + \dot I_2(R_2 + j\omega L_2) = \dot E.$$

Совместное решение их дает: $\dot I_1 = 16e^{-j60°}$ А; $\dot I_2 = 14{,}27e^{-j86°30'}$ А.

Топографическая диаграмма, совмещенная с векторной диаграммой токов, изображена на рис. 3.41, *б*.

*Рассмотрим вопрос о переносе мощности из одной ветви в другую вследствие магнитной связи.* Если ветвь $k$ с током $\dot I_k$ и ветвь $q$ с током $\dot I_q$ связаны магнитно и взаимная индуктивность между ветвями $M$, то магнитный поток из ветви $k$ в ветвь $q$ переносит комплексную мощность, равную произведению ЭДС взаимоиндукции в $q$-ветви $\mp j\omega M\dot I_k$ на сопряженный комплекс тока $q$-ветви, т. е. $\overset{*}{I}_q$:

$$\tilde S = (\mp j\omega M\dot I_k)\overset{*}{I}_q.$$

Знак минус соответствует согласному, плюс — встречному соединению.

**§ 3.40. Резонанс в магнитно-связанных колебательных контурах.** В § 3.23 — 3.27 были описаны резонансные явления в параллельном, последовательном и последовательно-параллельном резонансных контурах. Рассмотрим резонанс в магнитно-связанных контурах, например в схеме рис. 3.42, *а*, часто применяемой в радиотехнике. Для упрощения выкладок положим $L_1 = L_2 = L$, $C_1 = C_2 = C$; $R_1 = R_2 = R$, что дает возможность относительно легко выявить основные закономерности резонанса в этой схеме.

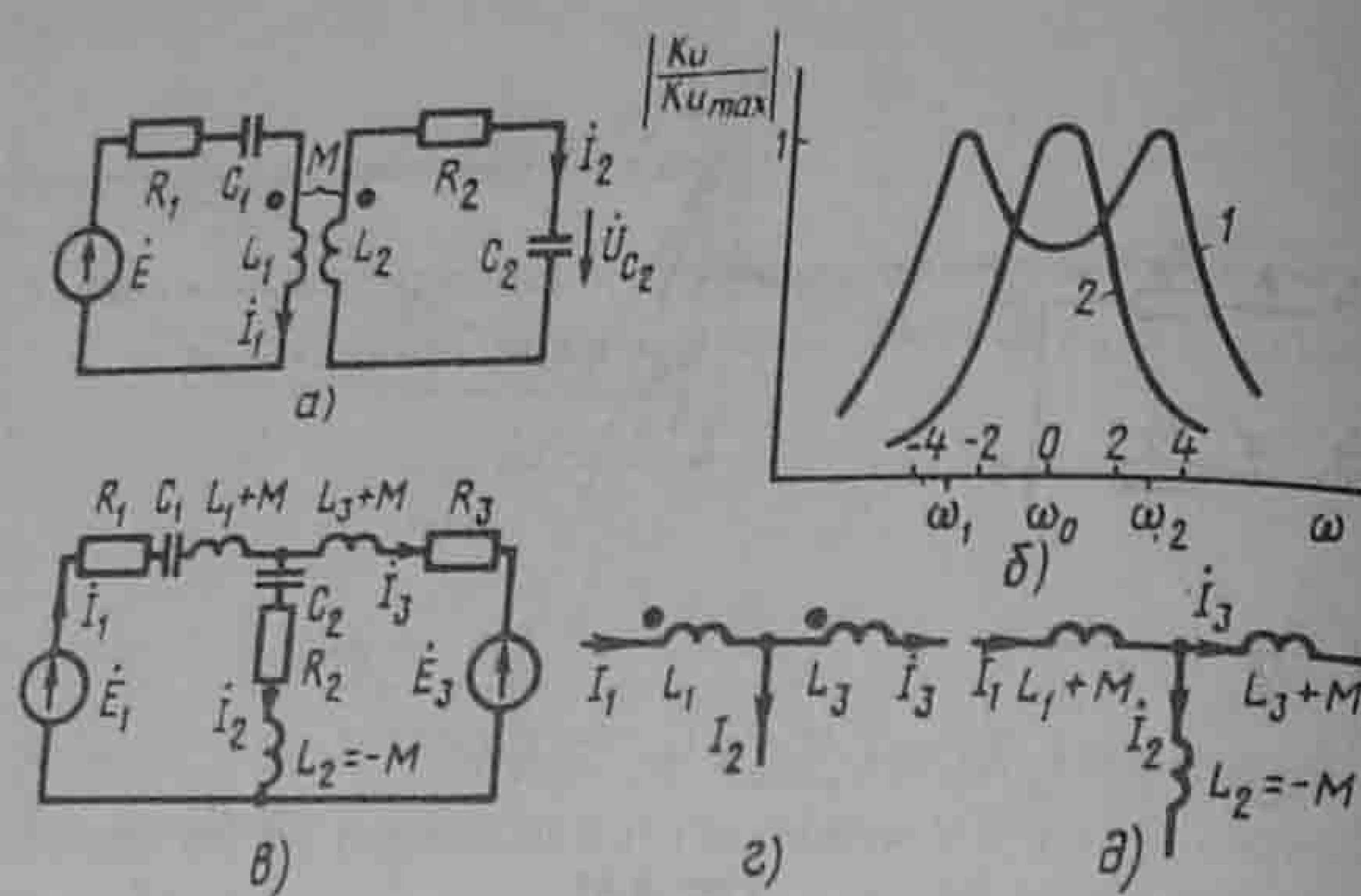



Рис. 3.42

Составим уравнения по второму закону Кирхгофа:

$$\dot I_1\left(R + j\omega L - \frac{j}{\omega C}\right) - \dot I_2 j\omega M = \dot E;$$

$$-\dot I_1 j\omega M + \dot I_2\left(R + j\omega L - \frac{j}{\omega C}\right) = 0.$$

Ток

$$\dot I_2 = \frac{j\omega M \dot E}{\left(R + j\omega L - \frac{j}{\omega C}\right) + \omega^2 M^2}.$$

Напряжение на конденсаторе второго контура

$$\dot U_{C2} = \dot I_2\frac{1}{j\omega C} = \dot E\frac{M}{C}\frac{1}{\left(R + j\omega L - \frac{j}{\omega C}\right)^2 + \omega^2 M^2}.$$

Пусть $\dot U_{C2}/\dot E = k_U$, тогда

$$k_U = \frac{1}{R^2 - \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 + j2R\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) + \omega^2 M^2}. \qquad (а)$$

Обозначим

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}; \quad \frac{R}{\omega_0 L} = \frac{R}{\sqrt{L/C}} = d; \quad k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} = \frac{M}{L}; \quad \varepsilon = 1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}.$$

С помощью параметра $\varepsilon$ учитывается отклонение текущей частоты $\omega$ от резонансной $\omega_0$. Рассмотрим работу схемы при относительно малых отклонениях $\omega$ от $\omega_0$. Положим $\omega = \omega_0 - \Delta\omega$. Тогда

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega_0^2} = \frac{(\omega_0 - \omega)(\omega_0 + \omega)}{\omega_0^2} \approx \frac{2\Delta\omega}{\omega_0}.$$



В свою очередь,

$$1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \approx -\frac{2\Delta\omega}{\omega_0} = -\varepsilon.$$

При малых отклонениях $\omega$ от $\omega_0$, вынеся в знаменателе выражения (а) за скобку $\omega^2 L^2 = \omega_0^2 L^2$ и использовав указанные обозначения, получим

$$k_U = \frac{k}{k^2 + d^2 - \varepsilon^2 - j2\varepsilon d}.$$

Модуль

$$|k_U| = \frac{k}{\sqrt{(k^2 + d^2 - \varepsilon^2)^2 + 4\varepsilon^2 d^2}}. \qquad (б)$$

При фиксированных $k$ и $d$ можно исследовать $|k_U|$ на экстремум в функции $\varepsilon$ для двух случаев: $k > d$ и $k < d$.

При $k > d$ имеются три экстремума: минимум при $\varepsilon = 0$, т. е. при $\omega = \omega_0$, и два максимума при $\varepsilon_{1,2} = \pm\sqrt{k^2 - d^2}$, которым соответствуют частоты $\omega_{1,2} = \omega_0\sqrt{1 - \varepsilon_{1,2}}$.

Резонансная кривая при этом имеет два "горба" (кривая *1* на рис. 3.42, *б* построена при $k = 3d$). С увеличением $k$ "горбы" кривой раздвигаются.

При $k \leqslant d$ имеется только один экстремум: максимум при $\varepsilon = 0$ (кривая *2* на рис. 3.42, *б*). По оси абсцисс на этом рисунке отложено $\varepsilon/d$, по оси ординат $|k_U|/|k_{U\max}|$, где $|k_{U\max}| = 1/(2d) = \sqrt{\frac{L}{C}}\,/\,2R$.

Ток первичного контура в функции от $\varepsilon/d$ при $k > 0{,}49d$ имеет двугорбую форму.

## § 3.41. «Развязывание» магнитно-связанных цепей.

Иногда в литературе можно встретить расчетный метод, который называют развязыванием магнитно-связанных цепей (катушек). Метод состоит в том, что исходную схему с магнитно-связанными индуктивностями путем введения дополнительных индуктивностей и изменения имевшихся преобразуют так, что магнитная связь между всеми индуктивностями в преобразованной схеме отсутствует.

Так как преобразования осуществляют на основе составленных по законам Кирхгофа уравнений для исходной схемы, то вновь полученная и исходная схемы в расчетном смысле полностью эквивалентны, а расчет схемы после развязывания упрощается за счет возможности применения метода узловых потенциалов.

Составим, например, схему, эквивалентную схеме рис. 3.33. С этой целью в уравнении (в) заменим $\dot I_3$ на $\dot I_1 - \dot I_2$ и в уравнении (г) — $\dot I_1$ на $\dot I_1 + \dot I_3$ (см. § 3.36). Замену одних токов другими производим так, чтобы в каждое из получающихся после замены уравнений входили только те токи, которые текут в ветвях рассматриваемого контура.

В результате получим:

$$\dot I_1\left[R_1 - \frac{j}{\omega C_1} + j\omega(L_1 + M)\right] + \dot I_2\left(R_2 - \frac{j}{\omega C_2} + j\omega M\right) = \dot E_1; \qquad (в)$$

$$-\dot I_2\left(R_2 - \frac{j}{\omega C_2} - j\omega M\right) + \dot I_3(R_2 + j\omega L_3 + j\omega M) = -\dot E_3. \qquad (г)$$

Уравнениям (в) и (г) соответствует схема рис. 3.42, *в*. Сопоставляя схемы рис. 3.33 и рис. 3.42, *в*, замечаем, что $L_1$ заменена на $(L_1 + M)$, $L_3$ — на $(L_3 + M)$, а во вторую ветвь введена отрицательная индуктивность $L_2 = -M$ (физически осуществить полученную расчетным путем отрицательную индуктивность в цепи только с линейными элементами невозможно). Таким образом, участок цепи, изображенный на рис. 3.42, *г*, в расчетном смысле может быть заменен участком, показанным на рис. 3.42, *д*. Если катушки будут включены встречно, то на рис. 3.42, *д* следует изменить знак перед *М*. Покажем, как можно осуществлять развязывание, не составляя полных уравнений по второму закону Кирхгофа. В основу положим неизменность потокосцепления каждого контура до и после развязывания. Пусть в схеме рис. 3.33 после развязывания $x$ — индуктивность первой ветви, $y$ — второй, $z$ — третьей. Условие неизменности потокосцепления левого контура: $i_1L_1 + i_3M = i_1L_1 + (i_1 - i_2)M = i_1x + i_2y$, откуда $x = L_1 + M$ и $y = -M$.

Условие неизменности потокосцепления правого контура $i_1M + i_3L_3 = (i_2 + i_3)M + i_3L_3 = i_3z - i_2y$, откуда $y = -M$ и $z = M + L_3$. Знак минус поставлен потому, что при обходе контура по часовой стрелке перемещаемся встречно току $i_2$.

**§ 3.42. Теорема о балансе активных и реактивных мощностей (теорема Лонжевена).** В любой линейной электрической цепи сумма активных мощностей источников ЭДС равна сумме активных мощностей приемников, а сумма реактивных мощностей источников ЭДС — сумме реактивных мощностей приемников энергии.

Пусть схема содержит $f$ узлов, $b$ ветвей и все ветви или часть их связаны друг с другом магнитно. По первому закону Кирхгофа сумма токов в любом узле равна нулю. Например, для $k$-узла, в котором сходится $n$-ветвей, $\sum_{p=1}^{n} \dot{I}_{kp} = 0$ или $\sum_{p=1}^{n} \overset{*}{I}_{kp} = 0$.

Умножим каждое слагаемое этой суммы на потенциал $k$-узла $\dot{\varphi}_k$

$$\dot{\varphi}_k \sum_{p=1}^{n} \overset{*}{I}_{kp} = 0.$$

Просуммируем аналогичные выражения для всех $f$-узлов схемы:

$$\sum_{k=1}^{f} \dot{\varphi}_k \sum_{p=1}^{n} \overset{*}{I}_{kp} = 0.$$

В двойную сумму любой ток схемы, например ток $\dot{I}_{mq}$, входит дважды и притом
с разными знаками. Действительно, при $k = m$ и $p = q$ слагаемое равно $\dot{\varphi}_m \overset{*}{I}_{mq}$, а при
$k = q$ и $p = m$ равно $\dot{\varphi}_q \overset{*}{I}_{qm}$. Так как $\overset{*}{I}_{qm} = -\overset{*}{I}_{mq}$, то эти слагаемые можно объеди-
нить и получить $\overset{*}{I}_{mq}(\dot{\varphi}_m - \dot{\varphi}_q)$. Положим, что какая-то ветвь схемы, например ветвь
$kq$, магнитно связана с ветвью $sr$ так, что сопротивление взаимоиндукции между
ними $X_{M_{kq/sr}}$ (рис. 3.43).

В соответствии с рис. 3.43
для ветви $qk$

$$\dot{\varphi}_q - \dot{\varphi}_k = \dot{E}_{kq} - \dot{I}_{kq}Z_{kq} - \dot{I}_{sr}jX_{M_{kq/sr}};$$



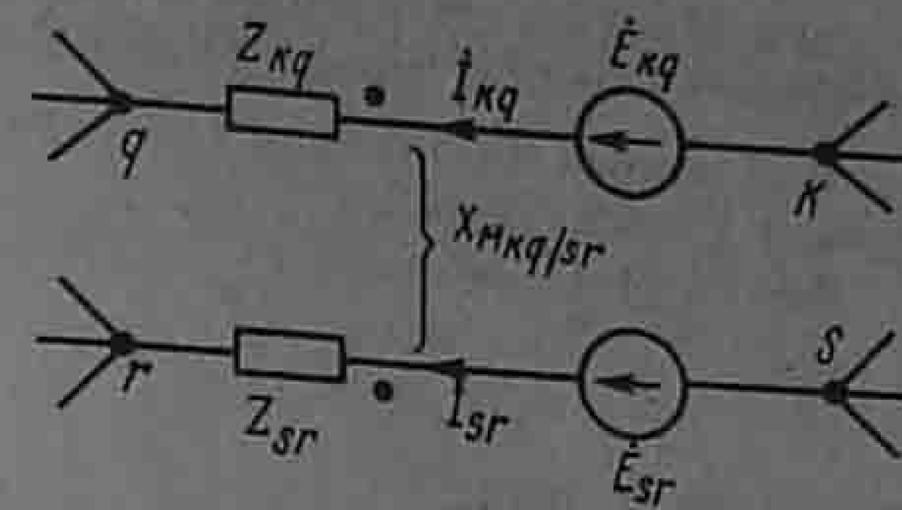



Рис. 3.43

для ветви $sr$

$$\dot{\varphi}_r - \dot{\varphi}_s = \dot{E}_{sr} - \dot{I}_{sr}Z_{sr} - \dot{I}_{kq}jX_{M_{kq/sr}}.$$

Если принять $\dot{I}_{kq} = I_{kq}e^{j\varphi_{kq}}$; $\dot{I}_{sr} = I_{sr}e^{j\varphi_{sr}}$; и учесть $\overset{*}{I}_{kq} = I_{kq}e^{-j\varphi_{kq}}$ и $\overset{*}{I}_{sr} = I_{sr}e^{-j\varphi_{sr}}$, то сумма двух слагаемых

$$\overset{*}{I}_{kq}\dot{I}_{sr}jX_{M_{kq/sr}} + \dot{I}_{kq}\overset{*}{I}_{sr}jX_{M_{kq/sr}} = I_{kq}I_{sr}jX_{M_{kq/sr}} \times$$

$$\times [e^{j(\varphi_{kq} - \varphi_{sr})} + e^{-j(\varphi_{kq} - \varphi_{sr})}] = j2X_{M_{kq/sr}}I_{kq}I_{sr}\cos(\varphi_{kq} - \varphi_{sr}).$$

Таким образом, попарное рассмотрение слагаемых двойной суммы позволяет переписать ее в виде

$$\dot{E}_{kp}\overset{*}{I}_{kp} = \sum I_{kp}^2 Z_{kp} + j2\sum I_{kp}I_{sr}X_{M_{kq/sr}}\cos(\varphi_{kq} - \varphi_{sr}), \quad (3.60)$$

где $I_{kp}^2$ — квадрат модуля тока ветви $kp$; $Z_{kp} = R_{kp} + jX_{kp}$.

Левая и правая части формулы (3.60) представляют собой комплексы. Равенство действительных частей комплексов

$$\mathrm{Re}\sum \dot{E}_{kp}\overset{*}{I}_{kp} = \sum I_{kp}^2 R_{kp}, \quad (3.61)$$

равенство мнимых частей

$$\mathrm{Im}\sum \dot{E}_{kp}\overset{*}{I}_{kp} = \sum I_{kp}^2 X_{kp} + 2\sum I_{kp}I_{sr}X_{M_{kq/sr}}\cos(\varphi_{kq} - \varphi_{sr}). \quad (3.62)$$

В этом выражении $X_{M_{kq/sr}}$ принято положительным при согласном направлении потоков взаимоиндукции и самоиндукции ветвей $kq$ и $sr$ и отрицательным при встречном их направлении. Формулы (3.61) и (3.62) являются математической записью сформулированной теоремы.

**Пример 48.** По данным примера 46 убедиться в справедливости теоремы о балансе мощности применительно к схеме рис. 3.40, *а*.

Р е ш е н и е. Активная мощность, доставляемая источником ЭДС,

$$\mathrm{Re}\dot{E}\overset{*}{I} = \mathrm{Re}\,100 \cdot 17{,}7e^{j63°} = 1770\cos 63° = 800 \text{ Вт}.$$

Активная мощность, потребляемая приемниками, $I_н^2 R_н = 14{,}12^2 \cdot 4 = 800$ Вт. Следо-
вательно, равенство активных мощностей действительно выполнено. Реактивная
мощность источника ЭДС $\mathrm{Im}\dot{E}\overset{*}{I} = 1770 \sin 63° = 1582$ ВАр. Реактивная мощность
приемников энергии с учетом согласного включения катушек

$$I_1^2\omega L_1 + I_2^2\omega L_2 + 2I_1I_2\omega M\cos(\varphi_{i1} - \varphi_{i2}) =$$

$$= 17{,}7^2 \cdot 2 + 14{,}6^2 \cdot 3 + 2 \cdot 17{,}7 \cdot 14{,}6\cos(63° - 144°) = 1582 \text{ ВАр}.$$

Таким образом, баланс реактивных мощностей тоже удовлетворяется.



5 Зак. 683

**§ 3.43. Теорема Теллегена.** Пусть в некоторой схеме имеется $n$ ветвей и узлов, матрица ее $[A]$. Матрицу-столбец комплексно-сопряженных токов ветвей обозначим $[\overset{*}{I}_B]$, а матрицу-столбец комплексных напряжений на ветвях (включая ЭДС ветвей и падение напряжения на них) обозначим $[\dot{U}_B]$.

В соответствии с законом сохранения энергии

$$\dot{U}_1\overset{*}{I}_1 + \dot{U}_2\overset{*}{I}_2 + \ldots + \dot{U}_n\overset{*}{I}_n = 0. \tag{а}$$

Соотношение (а) можно записать так

$$[\dot{U}_1\dot{U}_2 \ldots \dot{U}_n]\begin{bmatrix}\overset{*}{I}_1\\ \cdot\\ \cdot\\ \overset{*}{I}_n\end{bmatrix} = [\dot{U}_B]^{\mathrm{T}}[\overset{*}{I}_B] = 0. \tag{б}$$

Но в соответствии с § 2.35 $[\dot{U}_B] = [A]^{\mathrm{T}}[\dot{\varphi}]$, где $[\dot{\varphi}]$ — матрица-столбец потенциалов незаземленных узлов.

В свою очередь,

$$[\dot{U}_B]^{\mathrm{T}} = [\dot{\varphi}]^{\mathrm{T}}[A]. \tag{в}$$

Подставим (в) в (б):

$$[\dot{\varphi}]^{\mathrm{T}}[A][\overset{*}{I}_B] = 0. \tag{г}$$

В формуле (г) произведение $[A][\overset{*}{I}_B] = 0$ физически выражает собой систему уравнений по первому закону Кирхгофа для незаземленных узлов схемы, составленную для комплексно-сопряженных токов ветвей.

Из (г) следует, что если в одной и той же схеме с неизменной $[A]$-матрицей создать два режима, отличающихся сопротивлениями, и ЭДС ветвей и все величины, относящиеся к первому режиму, снабдить одним штрихом, а ко второму — двумя, то

$$[\dot{U}'_B]^{\mathrm{T}}[\overset{*}{I}{}''_B] = [\dot{U}''_B]^{\mathrm{T}}[\overset{*}{I}{}'_B]. \tag{д}$$

Соотношение (д), получившее название теоремы Теллегена, справедливо и по отношению к режимам в двух разных схемах, лишь бы у них были одинаковые узловые $[A]$-матрицы.

**§ 3.44. Определение дуальной цепи.** Две электрические цепи называют *дуальными*, если закон изменения контурных токов в одной из них подобен закону изменения узловых потенциалов в другой. В качестве простейшего примера на рис. 3.44 изображены две дуальные цепи.

Схема рис. 3.44, *а* состоит из источника ЭДС $\dot{E}$ и последовательно с ним включенных активного, индуктивного и емкостного элементов ($R$, $L$, $C$). Схема рис. 3.44, *б* состоит из источника тока $\dot{J}_э$ и трех параллельных ветвей. Первая ветвь содержит активную проводимость $g_э$, вторая — емкость $C_э$, третья — индуктивность $L_э$.

Для того чтобы показать, какого рода соответствие имеет место в дуальных цепях, составим для схемы рис. 3.44, *а* уравнение по методу контурных токов:

$$\dot{I}\left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right) = \dot{E}, \tag{3.63}$$



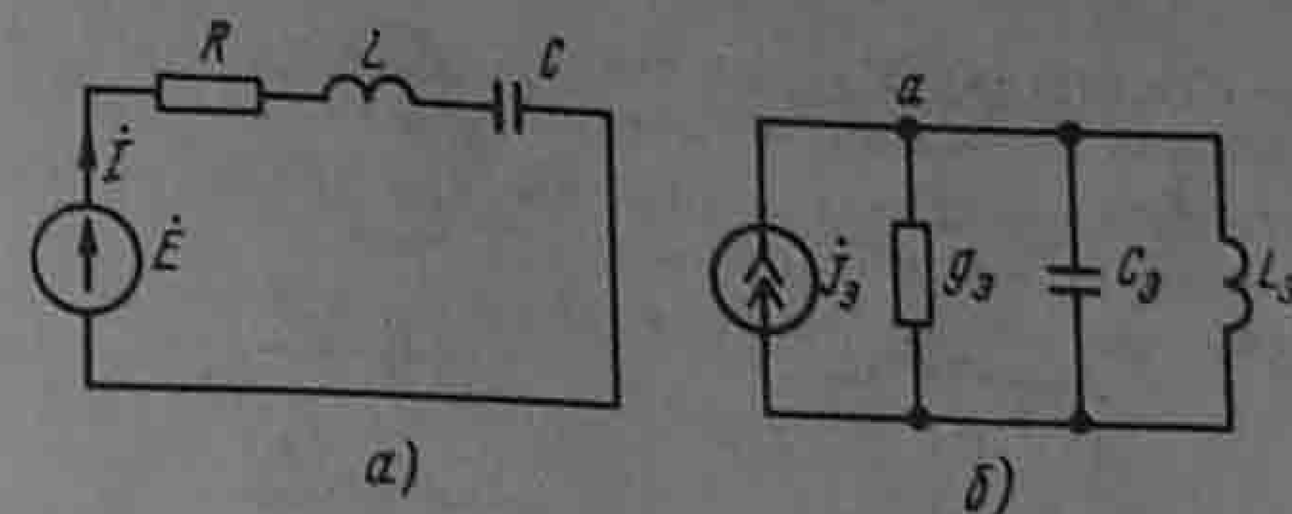



Рис. 3.44

а для схемы рис. 3.44, *б* — по методу узловых потенциалов, обозначив потенциал точки *a* через $\dot{\varphi}_a$, положив равным нулю потенциал второго узла:

$$\dot{\varphi}_a\left(g_э + \frac{1}{j\omega L_э} + j\omega C_э\right) = \dot{J}_э. \tag{3.64}$$

Если параметры схемы рис. 3.44, *б* $g_э$, $L_э$, $C_э$ согласовать с параметрами схемы рис. 3.44, *а* $R$, $L$, $C$ таким образом, что

$$R/g_э = L/C_э = L_э/C = k, \tag{3.65}$$

где $k$ — некоторое произвольное число (масштабный множитель преобразования), Ом$^2$, то

$$g_э + \frac{1}{j\omega L_э} + j\omega C_э = \frac{1}{k}\left(R + \frac{1}{j\omega C} + j\omega L\right). \tag{3.66}$$

С учетом равенства (3.66) перепишем уравнение (3.64) следующим образом:

$$\dot{\varphi}_a\left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right) = k\dot{J}_э. \tag{3.67}$$

Из сопоставления уравнений (3.63) и (3.67) следует, что если ток $\dot{J}_э$ источника тока в схеме рис. 3.44, *б* изменяется с той же угловой частотой, что и ЭДС $\dot{E}$ в схеме рис. 3.44, *а*, и численно равен $\dot{E}$, а параметры обеих схем согласованы в соответствии с уравнением (3.65), то при $k = 1$ Ом$^2$ закон изменения во времени потенциала $\dot{\varphi}_a$ в схеме рис. 3.44, *б* совпадает с законом изменения во времени тока $\dot{I}$ в схеме рис. 3.44, *а*.

Если свойства какой-либо из схем изучены, то они полностью могут быть перенесены на дуальную ей схему.

Между входным сопротивлением $Z_{исх}$ исходного двухполюсника и входной проводимостью $Y_{дуал}$ дуального ему двухполюсника существует соотношение $Z_{исх} = kY_{дуал}$.

Из (3.66) получаем соотношение между частотной характеристикой чисто реактивного исходного двухполюсника $X_{исх}(\omega)$ и частотной характеристикой дуального ему тоже чисто реактивного двухполюсника $b_{дуал}(\omega)$. Действительно, так как $Z_{исх} = jX_{исх}(\omega)$, а

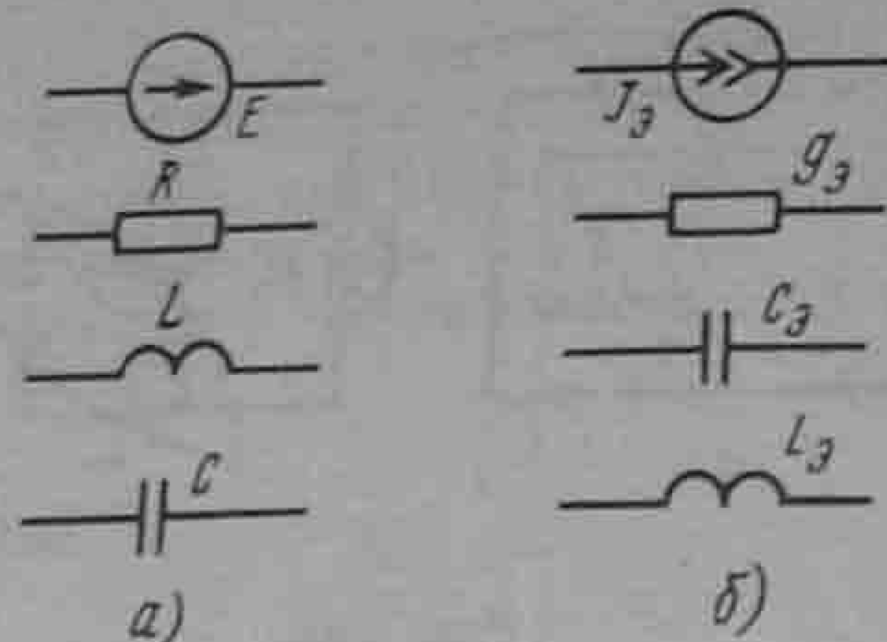



Рис. 3.45

$Y_{дуал} = -jb_{дуал}(\omega)$, то $X_{исх}(\omega) = -kb_{дуал}(\omega)$, т. е. частотная характеристика дуального двухполюсника получается из исходной частотной характеристики путем опрокидывания ее относительно оси $\omega$ и деления на масштабный множитель $k$.

Каждому элементу исходной схемы (схемы с источниками ЭДС $E$ и параметрами $R$, $L$, $C$) отвечает свой элемент эквивалентной дуальной схемы (схемы с источниками тока $\dot{J}_э$ и параметрами $g_э$, $C_э$, $L_э$).

**§ 3.45. Преобразование исходной схемы в дуальную.** Каждому независимому контуру исходной схемы, а также области, являющейся внешней по отношению к схеме, соответствует свой узел дуальной схемы.

Если в какой-либо ветви исходной схемы, являющейся смежной между двумя контурами, имеется $n$ последовательно включенных элементов, то этой ветви соответствует $n$ параллельных ветвей, соединяющих узлы дуальной схемы, которые отвечают этим контурам.

Так, источнику ЭДС $\dot{E}$ исходной схемы рис. 3.45, *а* отвечает в дуальной схеме источник тока $\dot{J}_э$ рис. 3.45, *б*, а источнику тока $\dot{J}_э$ — источник ЭДС $\dot{E}$; активному сопротивлению $R$ — проводимость $g_э$; индуктивности $L$ — емкость $C_э$; емкости $C$ — индуктивность $L_э$. Для преобразования исходной схемы в дуальную поступают следующим образом. Внутри каждого независимого контура (и во внешней области) ставят точки и называют их. Эти точки являются узлами эквивалентной дуальной схемы.

В схеме рис. 3.46, *а* три независимых контура, поэтому внутри них ставим точки *1*, *2*, *3* (точка *1* соответствует первому контуру, точка *2* — второму, точка *3* — третьему). Будем считать, что все контурные токи направлены по часовой стрелке.

Во внешней относительно схемы области ставим точку *4*. Между полученными четырьмя узлами проводим пунктирные линии — ветви дуальной схемы. Эти линии проходят через элементы исходной схемы ($R$, $L$, $C$, $E$) и в дуальной схеме рис. 3.45, *б* включаем в них соответствующие эквиваленты.



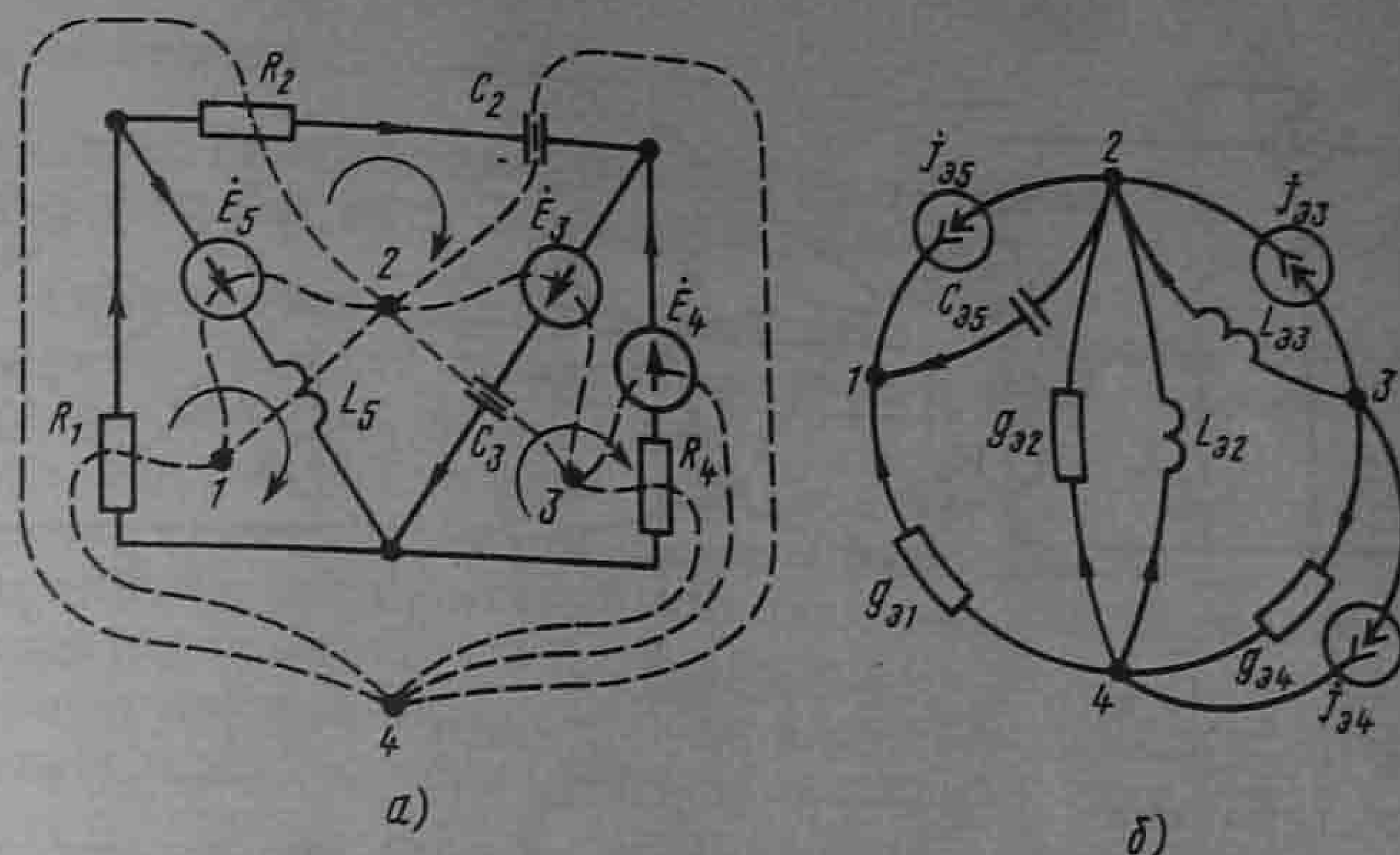



Рис. 3.46

Узел *1* на схеме рис 3.46, *а* соединен с узлом *4* одной пунктирной линией, так как в ветви, являющейся смежной между первым контуром и внешней областью, включено лишь одно сопротивление (активное сопротивление $R_1$). На схеме рис. 3.46, *б* между узлом *1* и узлом *4* включена активная проводимость $g_{э1} = R_1/k$.

Узлы *1* и *2* на схеме рис 3.46, *а* соединены двумя пунктирными линиями (одна из них проходит через источник ЭДС $\dot{E}_5$, другая — через индуктивность $L_5$), поскольку в ветви, являющейся смежной между контурами *1* и *2*, последовательно соединены два элемента схемы ($\dot{E}_5$ и $L_5$). Узлы *1* и *2* на схеме рис. 3.46, *б* соединены двумя ветвями. В одну из них включен источник тока $\dot{J}_{э5}$, а в другую — конденсатор емкостью $C_{э5} = L_5/k$ (элементы дуальные $\dot{E}_5$ и $L_5$).

Положительные направления токов источников тока в дуальной схеме должны быть согласованы с положительными направлениями ЭДС источников ЭДС в исходной схеме. Если при обходе $k$-контура по часовой стрелке направление какой-то ЭДС этого контура совпадает с направлением обхода контура, то ток эквивалентного ей источника тока должен быть направлен к $k$-узлу. Если ток по некоторой ветви исходной схемы совпадает по направлению с направлением обхода $k$-контура, то в дуальной схеме стрелку на соответствующей ветви направляют к $k$-узлу. Последнее замечание следует иметь в виду при составлении $[A]$ и $[K_г]$-матриц взаимно дуальных схем (см. § 2.31). При этом полагаем, что в каждой ветви исходной схемы имеется по одному пассивному элементу.

Исходную и дуальную ей схемы называют *взаимно обратными*.

**Вопросы для самопроверки**

1. Какими тремя величинами характеризуют синусоидально изменяющуюся функцию? 2. Каков смысл стрелки, указывающей положительное направление для тока ветви и напряжения на элементе цепи? 3. Почему среднее значение синусоидального тока определяют за полпериода, а не за период? 4. Что понимают под действующим значением тока (напряжения)? 5. Поясните процесс прохождения

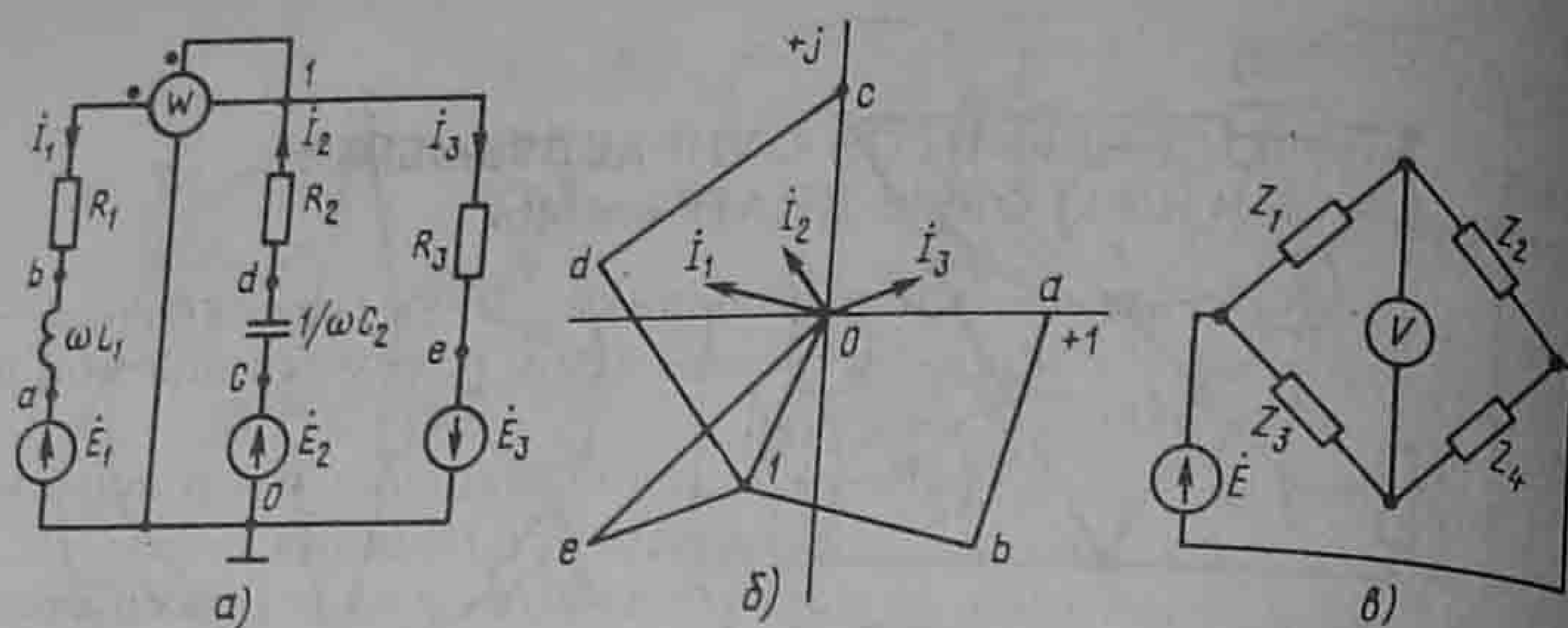



Рис. 3.47

синусоидального тока через индуктивную катушку. **6.** Поясните процесс прохождения синусоидального тока через конденсатор. **7.** Изложите основы символического метода расчета. На каком основании все методы расчета цепей постоянного тока применимы к цепям синусоидального тока? **8.** Дайте определение векторной и топографической диаграммам. **9.** Какому моменту времени соответствует положение векторов токов и напряжений на векторной диаграмме? **10.** Как определить напряжение между двумя точками схемы по топографической диаграмме? **11.** Физически интерпретируйте $P$, $Q$, $S$. **12.** Выразите комплексную мощность $\tilde S$ через комплексы напряжения и тока. **13.** Запишите условие резонансного режима двухполюсника. Постройте резонансные кривые для рис. 3.26, *а* при изменении $X_C$ и неизменных $E$, $R$, $L$, $\omega$. **14.** Что понимают под добротностью индуктивной катушки, конденсатора и резонансного контура? Что физически характеризует каждая из них? **15.** Дайте определение режиму резонанса токов и режиму резонанса напряжений. **16.** Какие двухполюсники называют реактивными? **17.** Как по виду частотной характеристики $X(\omega)$ реактивного двухполюсника можно определить, какие и в каком количестве будут возникать в нем резонансные режимы при изменении $\omega$? **18.** Какой должна быть взята нагрузка, присоединяемая к активному двухполюснику, чтобы в ней выделялась максимальная мощность? **19.** Дайте определение согласующего и идеального трансформаторов. **20.** Как в расчете учитывают наличие магнитной связи между индуктивными катушками? **21.** Какой смысл имеют вносимые сопротивления в трансформаторе? **22.** Что понимают под развязыванием магнитно-связанных цепей? С какой целью его осуществляют? **23.** Покажите на примере, как практически осуществить развязывание цепей, положив в основу принцип неизменности потокосцепления каждого контура до и после развязывания. **24.** Запишите выражение для комплексной мощности, переносимой магнитным путем из одной ветви в другую, с ней магнитно-связанную. **25.** Сформулируйте теорему о балансе активных и реактивных мощностей. **26.** Сформулируйте алгоритм преобразования исходной схемы в дуальную. **27.** Даны параметры схемы рис. 3.47, *а*: $\dot E_1 = 1$ В; $\dot E_2 = j$ В; $\dot E_3 = (1+j)$ В; $R_1 = \omega L_1 = 1$ Ом; $R_2 = 1/\omega C_2 = 2$ Ом; $R_3 = 1$ Ом. Определите комплексные значения токов в ветвях и показание ваттметра. Постройте топографическую диаграмму (считая заземленной точку О), совместив ее с векторной диаграммой токов. (Ответ: $\dot I_1 = 1{,}08e^{j165^\circ}$ А; $\dot I_2 = 0{,}632e^{j121^\circ 40'}$ А; $\dot I_3 = 0{,}715e^{j19^\circ 20'}$ А; $\dot\varphi_1 = 0{,}83e^{-j112^\circ 40'}$ В. Показание ваттметра $0{,}83 \cdot 1{,}08\cos(-97^\circ 40') = -0{,}155$ Вт. Топографическая диаграмма изображена на рис. 3.47, *б*). **28.** Выведите соотношения между модулями и аргументами комплексных сопротивлений $Z_1 = z_1e^{j\varphi_1}$, $Z_2 = z_2e^{j\varphi_2}$, $Z_3 = z_3e^{j\varphi_3}$, $Z_4 = z_4e^{j\varphi_4}$ мостовой схемы рис. 3.47, *в*, служащей для измерения одного из сопротивлений по трем известным. Равновесие моста фиксируется по нулевому показанию вольтметра. (Ответ: $z_1/z_2 = z_3/z_4$ и $\varphi_1 - \varphi_2 = \varphi_3 - \varphi_4$). **29.** Решите задачи 5.1, 5.5, 5.9. 5.11, 5.14, 5.22, 5.34, 5.38, 5.44, 5.54.



## Глава четвертая

# ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКИ. ЦЕПИ С УПРАВЛЯЕМЫМИ ИСТОЧНИКАМИ. КРУГОВЫЕ ДИАГРАММЫ

**§ 4.1. Определение четырехполюсника.** *Четырехполюсник* — это обобщенное понятие электрической цепи, рассматриваемой по отношению к четырем ее зажимам.

Трансформатор, линию передачи энергии, мостовую схему и т. п. можно рассматривать как четырехполюсники.

Принято изображать четырехполюсник в виде прямоугольника с выходящими из него концами (полюсами) $mn$ и $pq$ (рис. 4.1, *а*). Если четырехполюсник содержит источники электрической энергии, то в прямоугольнике ставят букву $A$ (активный); если буква $A$ отсутствует, то это значит, что четырехполюсник пассивный.

В общем, практически мало распространенном случае, рабочими парами зажимов четырехполюсника могут быть три пары зажимов. Применительно к рис. 4.1, *а* — это, например, пары $mn$, $pm$ и $pq$. А этом случае режим работы четырехполюсника определялся бы тремя независимыми уравнениями, в которые входили бы три независимых напряжения (что следует из второго закона Кирхгофа) между упомянутыми парами зажимов и тремя независимыми токами (что следует из первого закона Кирхгофа). На практике четырехполюсник обычно работает в режиме, когда одна пара зажимов, например $mn$, является входной, а другая пара, например $pq$, — выходной. Четырехполюсник, у которого рабочими являются две пары зажимов, называют *проходным*. В данной главе рассматривается теория проходного четырехполюсника. (Термин "проходной" далее упоминаться не будет.)

Входной ток обозначают $\dot I_1$, входное напряжение — $\dot U_1$; ток и напряжение на выходе — $\dot I_2$ и $\dot U_2$.

Четырехполюсник является передаточным звеном между источником питания и нагрузкой. К входным зажимам $mn$, как правило, присоединяют источник питания, к выходным зажимам $pq$ — нагрузку.

Предполагается, что нагрузка четырехполюсника и напряжение на входе при работе четырехполюсника в качестве связующего звена могут изменяться, но схема внутренних соединений четырехполюсника и сопротивления в ней остаются неизменными.

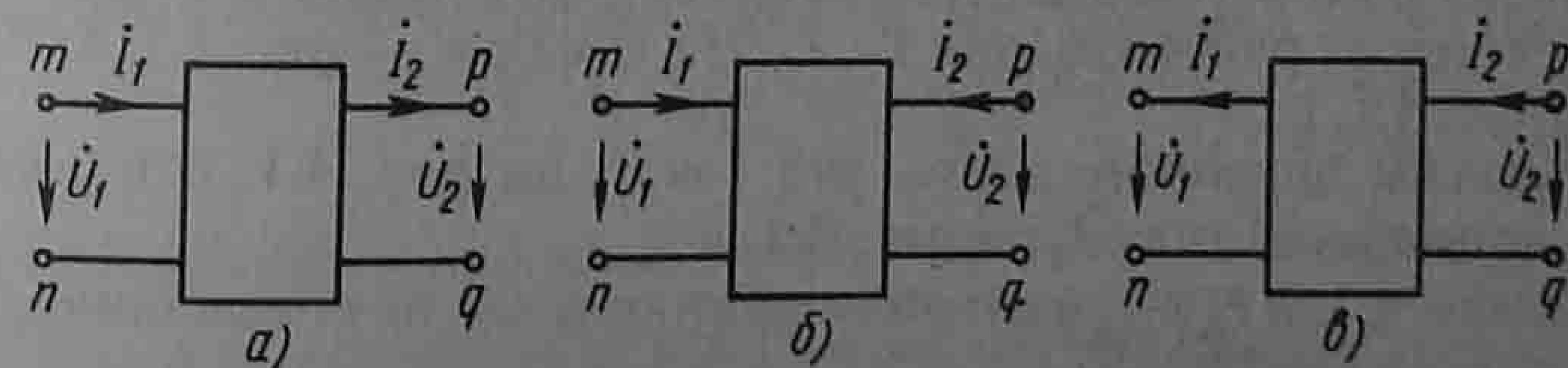



Рис. 4.1

§ 4.2. **Шесть форм записи уравнений четырехполюсника.** Четырехполюсник характеризуется двумя напряжениями $\dot{U}_1$ и $\dot{U}_2$ и двумя токами $\dot{I}_1$ и $\dot{I}_2$. Любые две величины из четырех можно определить через остальные. Так как число сочетаний из четырех по два равно шести, то возможны следующие шесть форм записи уравнений пассивного четырехполюсника:

*A*-форма

$$\dot{U}_1 = A\dot{U}_2 + B\dot{I}_2; \tag{4.1}$$

$$\dot{I}_1 = C\dot{U}_2 + D\dot{I}_2; \tag{4.2}$$

*Y*-форма

$$\dot{I}_1 = Y_{11}\dot{U}_1 + Y_{12}\dot{U}_2; \tag{4.3}$$

$$\dot{I}_2 = Y_{21}\dot{U}_1 + Y_{22}\dot{U}_2; \tag{4.4}$$

*Z*-форма

$$\dot{U}_1 = Z_{11}\dot{I}_1 + Z_{12}\dot{I}_2; \tag{4.5}$$

$$\dot{U}_2 = Z_{21}\dot{I}_1 + Z_{22}\dot{I}_2; \tag{4.6}$$

*H*-форма

$$\dot{U}_1 = H_{11}\dot{I}_{11} + H_{12}\dot{U}_2; \tag{4.7}$$

$$\dot{I}_2 = H_{21}\dot{I}_1 + H_{22}\dot{U}_2; \tag{4.8}$$

*G*-форма

$$\dot{I}_1 = G_{11}\dot{U}_1 + G_{12}\dot{I}_2; \tag{4.9}$$

$$\dot{U}_2 = G_{21}\dot{U}_1 + G_{22}\dot{I}_2; \tag{4.10}$$

*B*-форма

$$\dot{U}_2 = B_{11}\dot{U}_1 + B_{12}\dot{I}_1; \tag{4.11}$$

$$\dot{I}_2 = B_{21}\dot{U}_1 + B_{22}\dot{I}_1. \tag{4.12}$$

Обратим внимание на попарную инверсию *Y*- и *Z*-форм, *A*- и *B*-форм, *H*- и *G*-форм.

Исторически сложилось так, что для *A*-формы (ее будем считать основной) положительные направления для токов и напряжений соответствуют рис. 4.1, *а*; для *Y*-, *Z*-, *H*-, *G*-форм — рис. 4.1, *б*, *B*-форме — рис. 4.1, *в*.

Обратим внимание на то, что ток $\dot{I}_2$ на рис. 4.1, *б* направлен противоположно току $\dot{I}_2$ на рис. 4.1, *а*.

На рис. 4.1, *в* $\dot{I}_1$ и $\dot{I}_2$ изменили направление по сравнению с токами $\dot{I}_1$ и $\dot{I}_2$ на рис. 4.1, *а*.

Рассмотрение уравнений начнем с *A*-формы.



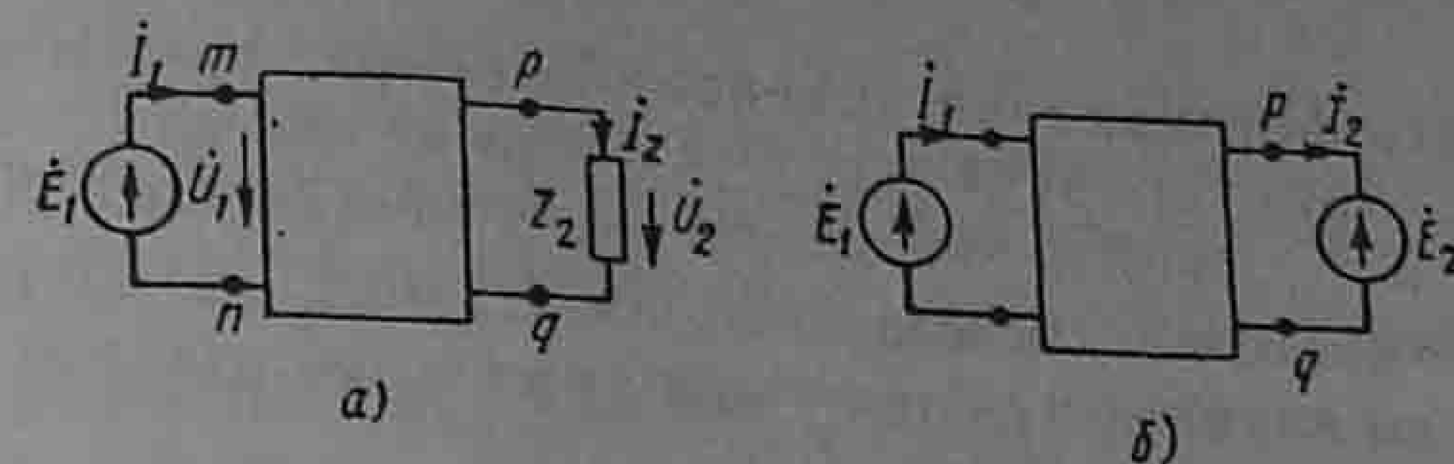



Рис. 4.2

§ 4.3. **Вывод уравнений в *A*-форме.** Комплексные коэффициенты *A*, *B*, *C*, *D* в уравнениях (4.1) и (4.2) зависят от схемы внутренних соединений четырехполюсника, значений сопротивлений схемы и частоты. Для каждого четырехполюсника их можно определить расчетным или опытным путем. Для четырехполюсников, удовлетворяющих условию взаимности, коэффициенты связаны соотношением

$$AD - BC = 1. \tag{4.13}$$

Выведем уравнения (4.1) и (4.2). С этой целью к зажимам *mn* подключим источник ЭДС $E = U_{mn} = U_1$, а к зажимам *pq* — нагрузку $Z_2$ (рис. 4.2, *а*).

Напряжение на нагрузке $\dot{U}_2 = \dot{I}_2 Z_2 = \dot{U}_{pq}$. Согласно теореме компенсации (см. § 1.17), заменим нагрузку $Z_2$ источником ЭДС с ЭДС $E_2 = U_2$ и направленной встречно току $I_2$ (рис. 4.2, *б*). Запишем выражения для токов $\dot{I}_1$ и $\dot{I}_2$, выразив их через ЭДС $\dot{E}_1$, $\dot{E}_2$ и входные, и взаимные проводимости ветвей $y_{11}$, $y_{12}$, $y_{21}$, $y_{22}$:

$$\dot{I}_1 = \dot{E}_1 y_{11} - \dot{E}_2 y_{12}; \tag{а}$$

$$\dot{I}_2 = \dot{E}_1 y_{21} - \dot{E}_2 y_{22}. \tag{б}$$

Если токи $\dot{I}_1$ и $\dot{I}_2$ рассматривать как контурные, то ЭДС контуров, совпадающие с направлением контурных токов, войдут в уравнения, подобные уравнению (1.7), со знаком плюс, а ЭДС, не совпадающие с направлением соответствующих контуров токов, — со знаком минус.

ЭДС $E_1$ направлена согласно с $\dot{I}_1$, поэтому она вошла в уравнение (а) и (б) со знаком плюс; ЭДС $\dot{E}_2$ направлена встречно $\dot{I}_2$, поэтому она вошла в эти уравнения со знаком минус.

Для линейных четырехполюсников, не содержащих нелинейных элементов (для взаимных четырехполюсников), согласно принципу взаимности (см. § 2.16), $y_{12} = y_{21}$. Из (б) найдем

$$\dot{E}_1 = \dot{E}_2 \frac{y_{22}}{y_{21}} + \dot{I}_2 \frac{1}{y_{21}}. \tag{в}$$

Подставив (в) в (а), получим

$$\dot{I}_1 = \dot{E}_2 \frac{y_{11} y_{22} - y_{12} y_{21}}{y_{21}} + \dot{I}_2 \frac{y_{11}}{y_{21}}. \tag{г}$$

Обозначим:

$$A = y_{22}/y_{21},\ B = 1/y_{21},\ C = (y_{11}y_{22} - y_{12}y_{21})/y_{21},\ D = y_{11}/y_{21}. \quad (д)$$

В уравнениях (в) и (г) заменим $\dot{E}_1$ на $\dot{U}_1$ и $\dot{E}_2$ на $\dot{U}_2$ и, воспользовавшись обозначением (д), получим уравнения в $A$-форме

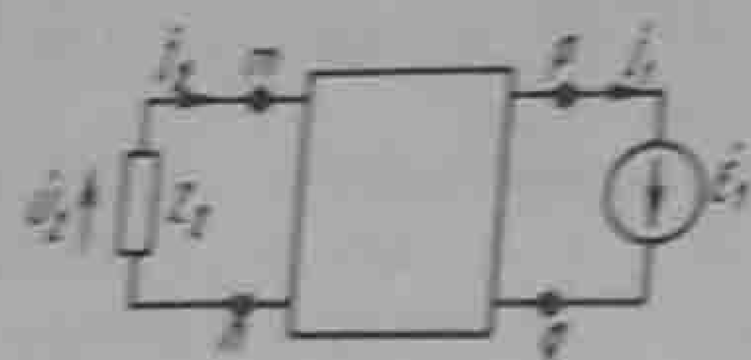


Рис. 4.3

$$\dot{U}_1 = A\dot{U}_2 + B\dot{I}_2;$$
$$\dot{I}_1 = C\dot{U}_2 + D\dot{I}_2.$$

Проверим выполнение соотношения (4.13) для взаимного четырехполюсника:

$$AD - BC = \frac{y_{11}y_{22}}{y_{21}^2} - \frac{y_{11}y_{22} - y_{12}y_{21}}{y_{21}^2} = 1.$$

Для невзаимного четырехполюсника $y_{12} \neq y_{21}$ и $AD - BC = y_{12}/y_{21} \neq 1$.

Рассмотрим соотношения, которые имеют место между $\dot{U}_1$ и $\dot{I}_1$ и $\dot{U}_2$ и $\dot{I}_2$, если источник ЭДС $\dot{E}_1$ присоединен к зажимам $pq$, а нагрузка — к зажимам $mn$ (рис. 4.3).

Как и в предыдущем выводе, заменим нагрузку $Z_2$ на источник ЭДС с ЭДС $\dot{E}_2$, направленный встречно току $\dot{I}_2$, и запишем выражения для токов $\dot{I}_1$ и $\dot{I}_2$:

$$\dot{I}_2 = -\dot{E}_2 y_{11} + \dot{E}_1 y_{12}; \quad (е)$$

$$\dot{I}_1 = -\dot{E}_2 y_{21} + \dot{E}_1 y_{22}. \quad (ж)$$

Из (е) найдем

$$\dot{E}_1 = \dot{E}_2 \frac{y_{11}}{y_{12}} + \dot{I}_2 \frac{1}{y_{12}}. \quad (з)$$

Подставим (з) в (ж):

$$\dot{I}_1 = \dot{E}_2 \frac{y_{11}y_{22} - y_{12}y_{21}}{y_{12}} + \dot{I}_2 \frac{y_{22}}{y_{12}}.$$

Заменив $\dot{E}$ на $\dot{U}_1$ и $\dot{E}_2$ на $\dot{U}_2$ и воспользовавшись обозначениями (д), перепишем две последние строчки следующим образом:

$$\dot{U}_1 = D\dot{U}_2 + B\dot{I}_2; \quad (4.14)$$

$$\dot{I}_1 = C\dot{U}_2 + A\dot{I}_2. \quad (4.14а)$$



Таким образом, уравнения (4.1) и (4.2) характеризуют работу четырехполюсника при питании со стороны зажимов $mn$ и присоединении нагрузки к зажимам $pq$, а уравнения (4.14) и (4.14а) — при его питании со стороны зажимов $pq$ и присоединении нагрузки к зажимам $mn$.

Четырехполюсник называют *симметричным*, если при перемене местами источника питания и нагрузки токи в источнике питания и нагрузке не изменяются. В симметричном четырехполюснике $A = D$.

Уравнения (4.1) и (4.2) иногда записывают так:

$$\dot{U}_1 = A_{11}\dot{U}_2 + A_{12}\dot{I}_2; \quad (4.1а)$$

$$\dot{I}_1 = A_{21}\dot{U}_2 + A_{22}\dot{I}_2, \quad (4.1б)$$

где $A_{11} = A$; $A_{12} = B$; $A_{21} = C$; $A_{22} = D$.

**§ 4.4. Определение коэффициентов $A$-формы записи уравнений четырехполюсника.** Комплексные коэффициенты $A$, $B$, $C$, $D$, входящие в уравнения (4.1) и (4.2), можно определить по формулам (д), если схема внутренних соединений четырехполюсника и ее параметры известны, либо используя входные сопротивления четырехполюсника, полученные опытным или расчетным путем.

Комплексные входные сопротивления находят опытным путем с помощью ваттметра, амперметра и вольтметра по схеме, подобной схеме рис. 3.24, *а*, с тем отличием, что вместо двухполюсника зажимами $mn$ и $pq$ (в зависимости от определяемого входного сопротивления) подключают испытуемый четырехполюсник.

Определим комплексное входное сопротивление четырехполюсника при трех различных режимах его работы.

1. При питании со стороны зажимов $mn$ и разомкнутой ветви $pq$ ($\dot{I}_2 = 0$, индекс х).

$$Z_{1х} = \frac{\dot{U}_{1х}}{\dot{I}_{1х}} = z_{1х}e^{j\varphi_{1х}} = A/C. \quad (и)$$

2. При питании со стороны зажимов $mn$ и коротком замыкании ветви $pq$ ($\dot{U}_2 = 0$, индекс к).

$$Z_{1к} = \dot{U}_{1к}/\dot{I}_{1к} = z_{1к}e^{j\varphi_{1к}} = B/D. \quad (к)$$

3. При питании со стороны зажимов $pq$ и коротком замыкании зажимов $mn$ ($U_2 = 0$)

$$Z_{2к} = z_{2к}e^{j\varphi_{2к}} = B/A. \quad (л)$$

Таким образом, для определения четырех неизвестных коэффициентов $A$, $B$, $C$, $D$ взаимного четырехполюсника располагаем четырьмя уравнениями: $AD - BC = 1$, $Z_{1х} = A/C$; $Z_{1к} = B/D$; $Z_{2к} = B/A$. Составим разность

$$1-\frac{Z_{1\text{к}}}{Z_{1\text{х}}}=1-\frac{BC}{AD}=\frac{1}{AD}\ \text{или}\ \frac{Z_{1\text{х}}-Z_{1\text{к}}}{Z_{1\text{х}}}=\frac{1}{AD}. \qquad (\text{м})$$

Имеем

$$Z_{2\text{к}}/Z_{1\text{к}}=D/A. \qquad (\text{н})$$

Умножим (м) на (н):

$$\frac{(Z_{1\text{х}}-Z_{1\text{к}})Z_{2\text{к}}}{Z_{1\text{х}}Z_{1\text{к}}}=\frac{1}{A^2}.$$

Отсюда

$$A=\sqrt{\frac{Z_{1\text{х}}Z_{1\text{к}}}{Z_{2\text{к}}(Z_{1\text{х}}-Z_{1\text{к}})}}. \qquad (4.15)$$

Формула (4.15)[1] позволяет через $Z_{1\text{х}}$, $Z_{1\text{к}}$ и $Z_{2\text{к}}$ определить коэффициент $A$; после этого коэффициент $C$ находят из (и), $B$ — из (л) и $D$ — из (к).

Коэффициенты $A$ и $D$ имеют нулевую размерность, коэффициент $B$ имеет размерность Ом, коэффициент $C$ — См.

Заметим, что вместо формулы (4.15) коэффициент $A$ может быть определен по формуле (4.15а):

$$A=\sqrt{\frac{Z_{1\text{х}}}{Z_{2\text{х}}-X_{2\text{к}}}}. \qquad (4.15\text{а})$$

**Пример 49.** Опытным путем было найдено, что $Z_{1\text{х}}=7{,}815e^{j51°12'}$ Ом; $Z_{1\text{к}}=12{,}5e^{j66°23'}$ Ом; $Z_{2\text{к}}=3{,}33e^{j27°33'}$ Ом. Определить коэффициенты $A$, $B$, $C$, $D$ четырехполюсника.

Решение. Найдем $Z_{1\text{х}}-Z_{1\text{к}}=5-6j-12j-5=-18j$.

По формуле (4.15) подсчитаем:

$$A=\sqrt{\frac{7{,}815e^{-j51°12'}\cdot 12{,}5e^{j66°23'}}{3{,}33e^{j27°33'}\cdot 18e^{-j90°}}}=1{,}28e^{j39°40'};$$

$$C=A/Z_{1\text{х}}=1{,}28e^{j39°40'}/7{,}815e^{-j51°21'}\approx 0{,}166e^{j90°}\ \text{См};$$

$$B=AZ_{2\text{к}}=4{,}26e^{j57°}\ \text{Ом};\ D=B/Z_{1\text{к}}=0{,}34.$$

**Пример 50.** К зажимам $pq$ (см. рис. 4.1) четырехполюсника примера 49 подсоединена нагрузка $Z_2=6+j6$ Ом; к зажимам $mn$ — источник ЭДС. Найти $\dot U_1$ и $\dot I_1$, если $\dot I_2=1$ А.

Решение. По формуле (4.1), $\dot U_1=A\dot U_2+B\dot I_2=\dot I_2(AZ_2+B)=1\times(1{,}28e^{j39°40'}\cdot 6\sqrt{2}e^{j45°}+4{,}26e^{j57°})=14{,}85e^{j79°45'}$ В.

По формуле (4.2),

$$\dot I_1=C\dot U_2+D\dot I_2=\dot I_2(CZ_2+D)=1{,}165e^{j123°}\ \text{А}.$$

---

[1] В формулах (4.15) и (4.15а) перед корнем взят знак плюс. Этому знаку соответствует отсчет $\dot U_2$ и $\dot I_2$ по рис. 4.2, а. Знак минус перед корнем отброшен, так как он соответствует отсчету $\dot U_2$ и $\dot I_2$ в противоположном направлении.



## § 4.5. Т- и П-схемы замещения пассивного четырехполюсника.

Фукции пассивного взаимного четырехполюсника как передаточного звена между источником питания и нагрузкой может выполнять Т-схема (схема звезды рис. 4.4, *а*) или эквивалентная ей П-схема треугольника (рис. 4.4, *б*).

Предполагается, что частота ω фиксирована. Три сопротивления Т- или П-схемы подсчитывают с учетом того, что схема замещения должна обладать теми же коэффициентами $A$, $B$, $C$, $D$, что и заменяемый ею четырехполюсник.

Задача эта однозначна, так как схема замещения содержит три элемента, и четырехполюсник характеризуется тоже тремя параметрами (одна связь между $A, B, C, D$ задана уравнением $AD-BC=1$)[1].

Выразим напряжение $\dot U_1$ и ток $\dot I_1$ Т-схемы (рис. 4.4, *а*) через напряжение $\dot U_2$ и ток $\dot I_2$:

$$\dot I_1=\dot I_2+\frac{\dot U_2+\dot I_2Z_2}{Z_3}=\dot U_2\frac{1}{Z_3}+\dot I_2\left(1+\frac{Z_2}{Z_3}\right); \qquad (4.16)$$

$$\dot U_1=\dot U_2+\dot I_2Z_2+\dot I_1Z_1=\dot U_2\left(1+\frac{Z_1}{Z_3}\right)+\dot I_2\left(Z_1+Z_2+\frac{Z_1Z_2}{Z_3}\right). \qquad (4.17)$$

Сопоставим (4.16) с (4.1) и (4.17) с (4.2). При сопоставлении найдем

$$A=1+(Z_1/Z_3);\ B=Z_1+Z_2+Z_1Z_2/Z_3;\ C=1/Z_3,\ D=1+Z_2/Z_3. \qquad (4.18)$$

Следовательно,

$$\left.\begin{aligned} Z_3&=1/C;\\ Z_1&=(A-1)/C;\\ Z_2&=(D-1)/C.\end{aligned}\right\} \qquad (4.19)$$

Формулы (4.18) и (4.19) позволяют определить сопротивления $Z_1$, $Z_2$ и $Z_3$ (рис. 4.4, *а*) по коэффициентам четырехполюсника

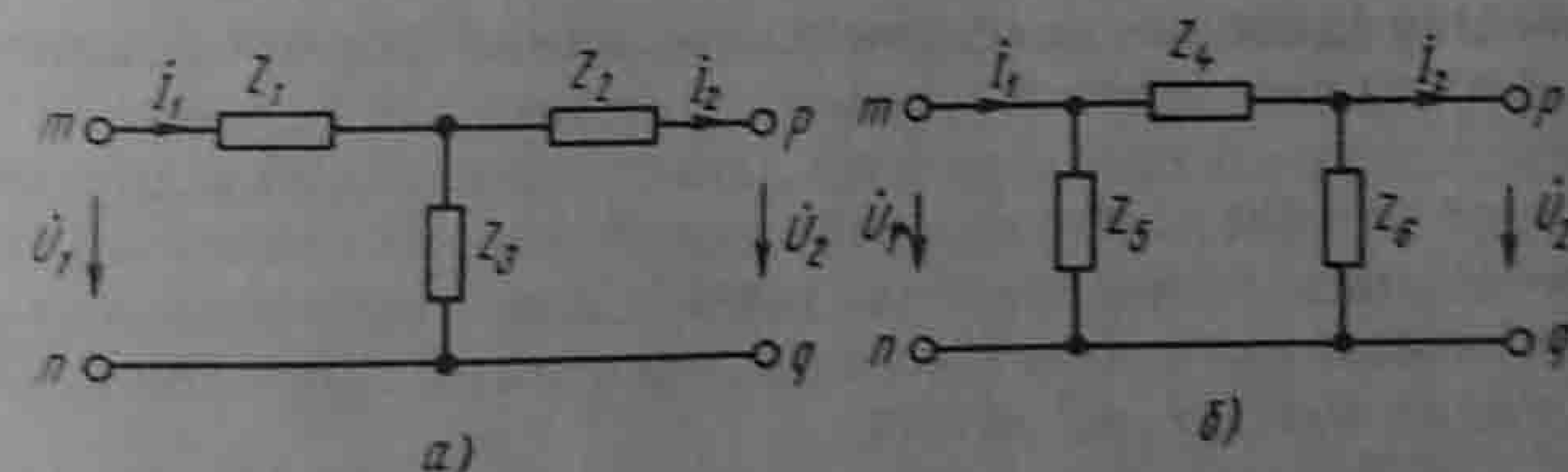



Рис. 4.4

---

[1] У невзаимного четырехполюсника $y_{12}\neq y_{21}$, поэтому для него схема замещения образована не тремя, а четырьмя элементами (см., например, схему замещения транзистора в § 15.35).

$A, C, D$. Аналогичные выкладки для П-схемы (рис. 4.4, *б*) дают:

$$A = 1 + \frac{Z_4}{Z_5};\ B = Z_4;\ C = \frac{Z_4 + Z_5 + Z_6}{Z_5 Z_6};\ D = \frac{Z_4}{Z_5} + 1; \tag{4.20}$$

$$Z_4 = B; \tag{4.21}$$

$$Z_5 = B/(D - 1); \tag{4.22}$$

$$Z_6 = B/(A - 1). \tag{4.23}$$

Если четырехполюсник симметричный, то $A = D$ и в Т-схеме замещения $Z_1 = Z_2$, а в П-схеме $Z_5 = Z_6$.

**§ 4.6. Определение коэффициентов $Y$-, $Z$-, $G$- и $H$-форм записи уравнений четырехполюсника.** Комплексные коэффициенты $Y_{11}, Y_{12}, Y_{21}, Y_{22}$ в уравнениях (4.3) и (4.4) найдем следующим образом: $Y_{11} = \dot I_1/\dot U_1$ при $\dot U_2 = 0$; $Y_{12} = \dot I_1/\dot U_2$ при $\dot U_1 = 0$; $Y_{22} = \dot I_2/\dot U_2$ при $\dot U_1 = 0$. Обозначим $Y_{11} = y_{11}$, $Y_{22} = y_{22}$, но $Y_{12} = -y_{12}$ и $Y_{21} = -y_{21}$.

Коэффициенты $Z_{11}, Z_{12}, Z_{21}, Z_{22}$ в уравнениях (4.5) и (4.6) определим так: $Z_{11} = \dot U_1/\dot I_1$ при $\dot I_2 = 0$; $Z_{12} = \dot U_2/\dot I_1$ при $\dot I_2 = 0$; $Z_{22} = \dot U_2/\dot I_2$ при $\dot I_1 = 0$.

Аналогичным образом определим коэффициенты и других форм записи, например $H$-формы: $H_{11} = \dot U_1/\dot I_1$ при $\dot U_2 = 0$; $H_{22} = \dot I_2/\dot U_2$ при $\dot I_1 = 0$; $H_{21} = \dot I_2/\dot I_1$ при $\dot U_2 = 0$. Обратим внимание на то, что для взаимного четырехполюсника $Y_{12} = Y_{21}$, $Z_{12} = Z_{21}$, но $H_{12} = -H_{21}$, $G_{12} = -G_{21}$, а $B_{12}$ не равно $B_{21}$ даже по модулю.

**Пример 51.** Вывести формулы $Z$-параметров для Т-схемы замещения четырехполюсника рис. 4.4, *а*.

Решение. Для Т-схемы замещения

$$Z_{11} = \dot U_1/\dot I_{1\,\text{при}\,\dot I_2 = 0} = Z_2 + Z_3;\quad Z_{12} = Z_{21} = \dot U_2/\dot I_{1\,\text{при}\,\dot I_2 = 0} = Z_3;$$

$$Z_{22} = \dot U_2/\dot I_{2\,\text{при}\,\dot I_1 = 0} = Z_2 + Z_3.$$

**§ 4.7. Определение коэффициентов одной формы уравнений через коэффициенты другой формы.** На практике возникает потребность в переходе от одной формы записи уравнений к другой.

Для того чтобы коэффициенты одной формы записи найти через коэффициенты другой формы, необходимо выразить какие-либо две одинаковые величины в этих двух формах и сопоставить их, учтя направления токов $\dot I_1$ и $\dot I_2$ в них.

Для $A$-формы

$$\dot U_1 = \dot I_1 \frac{A}{C} - \dot I_2 \frac{1}{C}, \tag{о}$$

$$\dot U_2 = \dot I_1 \frac{1}{C} - \dot I_2 \frac{D}{C}; \tag{п}$$



для $Z$-формы

$$\dot U_1 = \dot I_1 Z_{11} + \dot I_2 Z_{12}, \tag{р}$$

$$\dot U_2 = \dot I_1 Z_{21} + \dot I_2 Z_{22}. \tag{с}$$

Сопоставляя правые части (о) и (р) и учитывая, что ток $\dot I_2$ в выражении (р) равен току $-\dot I_2$ в выражении (о), получим

$$Z_{11} = A/C,\ Z_{12} = 1/C.$$

Из (п) и (с)

$$Z_{21} = 1/C,\ Z_{22} = D/C.$$

При переходе от коэффициентов $A$-формы к коэффициентам других форм найдем:

$$Y_{11} = D/B,\ Y_{12} = Y_{21} = -1/B,\ Y_{22} = A/B;$$

$$H_{11} = B/D,\ H_{12} = -H_{21} = 1/D,\ H_{22} = C/D;$$

$$G_{11} = C/A,\ G_{12} = -G_{21} = -1/A,\ G_{22} = B/A;$$

$$B_{11} = D,\ B_{12} = B,\ B_{21} = C,\ B_{22} = A.$$

**Пример 52.** Определить $Y$-параметры четырехполюсника через $Z$-параметры.

Решение. Решим уравнения (4.5) и (4.6) относительно $\dot I_1$ и $\dot I_2$, сопоставим полученные уравнения с уравнениями (4.3) и (4.4). В результате получим

$$Y_{11} = Z_{22}/\Delta_Z;\ Y_{22} = Z_{11}/\Delta_Z;\ Y_{12} = Y_{21} = -Z_{12}/\Delta_Z;\ \Delta_Z = Z_{11}Z_{22} - Z_{12}^2.$$

Для Т-схемы (рис. 4.4, *а*)

$$\Delta_Z = (Z_1 + Z_3)(Z_2 + Z_3) - Z_3^2 = Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3;$$

$$Y_{11} = (Z_2 + Z_3)/\Delta_Z;\ Y_{22} = (Z_1 + Z_3)/\Delta_Z;\ Y_{12} = -Z_3/\Delta_Z.$$

В табл. 4.1 даны соотношения для перехода от одной формы уравнений к любой другой.

**Таблица 4.1**

| К матрице | От матрицы | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $[Z]$ | $[Y]$ | $[H]$ | $[G]$ | $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ |
| $[Z]$ | | $\dfrac{Y_{22}}{\Delta_Y}$ $\dfrac{-Y_{12}}{\Delta_Y}$<br>$\dfrac{-Y_{21}}{\Delta_Y}$ $\dfrac{Y_{11}}{\Delta_Y}$ | $\dfrac{\Delta_H}{H_{22}}$ $\dfrac{H_{12}}{H_{22}}$<br>$\dfrac{-H_{21}}{H_{22}}$ $\dfrac{1}{H_{22}}$ | $\dfrac{1}{G_{11}}$ $\dfrac{-G_{12}}{G_{11}}$<br>$\dfrac{G_{21}}{G_{11}}$ $\dfrac{\Delta_G}{G_{11}}$ | $\dfrac{A}{C}$ $\dfrac{\Delta}{C}$<br>$\dfrac{1}{C}$ $\dfrac{D}{C}$ |

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $[Y]$ | $\frac{Z_{22}}{\Delta_Z}$ | $\frac{-Z_{12}}{\Delta_Z}$ | | | $\frac{1}{H_{11}}$ | $\frac{-H_{12}}{H_{11}}$ | $\frac{\Delta_G}{G_{22}}$ | $\frac{G_{12}}{G_{22}}$ | $\frac{D}{B}$ | $\frac{-\Delta}{B}$ |
| | $\frac{-Z_{21}}{\Delta_Z}$ | $\frac{Z_{11}}{\Delta_Z}$ | | | $\frac{H_{21}}{H_{11}}$ | $\frac{\Delta_H}{H_{11}}$ | $\frac{-G_{21}}{G_{22}}$ | $\frac{1}{G_{22}}$ | $\frac{-1}{B}$ | $\frac{A}{B}$ |
| $[H]$ | $\frac{\Delta_Z}{Z_{22}}$ | $\frac{Z_{12}}{Z_{22}}$ | $\frac{1}{Y_{11}}$ | $\frac{-Y_{12}}{Y_{11}}$ | | | $\frac{G_{22}}{\Delta_G}$ | $\frac{-G_{12}}{\Delta_G}$ | $\frac{B}{D}$ | $\frac{\Delta}{D}$ |
| | $\frac{-Z_{21}}{Z_{22}}$ | $\frac{1}{Z_{22}}$ | $\frac{Y_{21}}{Y_{11}}$ | $\frac{\Delta_Y}{Y_{11}}$ | | | $\frac{-G_{21}}{\Delta_G}$ | $\frac{G_{11}}{\Delta_G}$ | $-\frac{1}{D}$ | $\frac{C}{D}$ |
| $[G]$ | $\frac{1}{Z_{11}}$ | $\frac{-Z_{12}}{Z_{11}}$ | $\frac{\Delta_Y}{Y_{22}}$ | $\frac{Y_{12}}{Y_{22}}$ | $\frac{H_{22}}{\Delta_H}$ | $\frac{-H_{12}}{\Delta_H}$ | | | $\frac{C}{A}$ | $-\frac{\Delta}{A}$ |
| | $\frac{Z_{21}}{Z_{11}}$ | $\frac{\Delta_Z}{Z_{11}}$ | $\frac{-Y_{21}}{Y_{22}}$ | $\frac{1}{Y_{22}}$ | $\frac{-H_{21}}{\Delta_H}$ | $\frac{H_{11}}{\Delta_H}$ | | | $\frac{\Delta}{A}$ | $\frac{B}{A}$ |
| $\begin{bmatrix} AB \\ CD \end{bmatrix}$ | $\frac{Z_{11}}{Z_{21}}$ | $\frac{\Delta_Z}{Z_{21}}$ | $\frac{-Y_{22}}{Y_{21}}$ | $\frac{-1}{Y_{21}}$ | $\frac{-\Delta_H}{H_{21}}$ | $\frac{H_{11}}{H_{21}}$ | $\frac{1}{G_{21}}$ | $\frac{G_{22}}{G_{21}}$ | | |
| | $\frac{1}{Z_{21}}$ | $\frac{Z_{22}}{Z_{21}}$ | $\frac{-\Delta_Y}{Y_{21}}$ | $\frac{-Y_{11}}{Y_{21}}$ | $\frac{-H_{22}}{H_{21}}$ | $\frac{-1}{H_{21}}$ | $\frac{G_{11}}{G_{21}}$ | $\frac{\Delta_G}{G_{21}}$ | | |

**§ 4.8. Применение различных форм записи уравнений четырехполюсника. Соединения четырехполюсников. Условия регулярности.** Ту или иную форму записи уравнений применяют, исходя из соображений удобства. Так, в теории синтеза цепей (см. § 10.5 — 10.8) используют обычно $Y$- или $Z$-форму записи. Параметры транзисторов для малых переменных составляющих (см. § 15.35) дают в $Y$-, или $H$-, или $Z$-форме, так как в этих формах их удобнее определить опытным путем.

При нахождении связи между входными и выходными величинами различным образом соединенных четырехполюсников (при определении коэффициентов эквивалентного четырехполюсника) используют $Z$-, $H$-, $G$-, $Y$- и $A$-формы.

При последовательно-последовательном соединении четырехполюсников $a$ и $b$ (рис. 4.5, $a$) применяют $Z$-форму, при параллельно-параллельном соединении (рис. 4.5, $б$) — $Y$-форму, при последовательно-параллельном (рис. 4.5, $в$) — $H$-форму, при параллельно-последовательном (рис. 4.5, $г$) — $G$-форму, при каскадном (рис. 4.5, $д$) — $A$-форму.

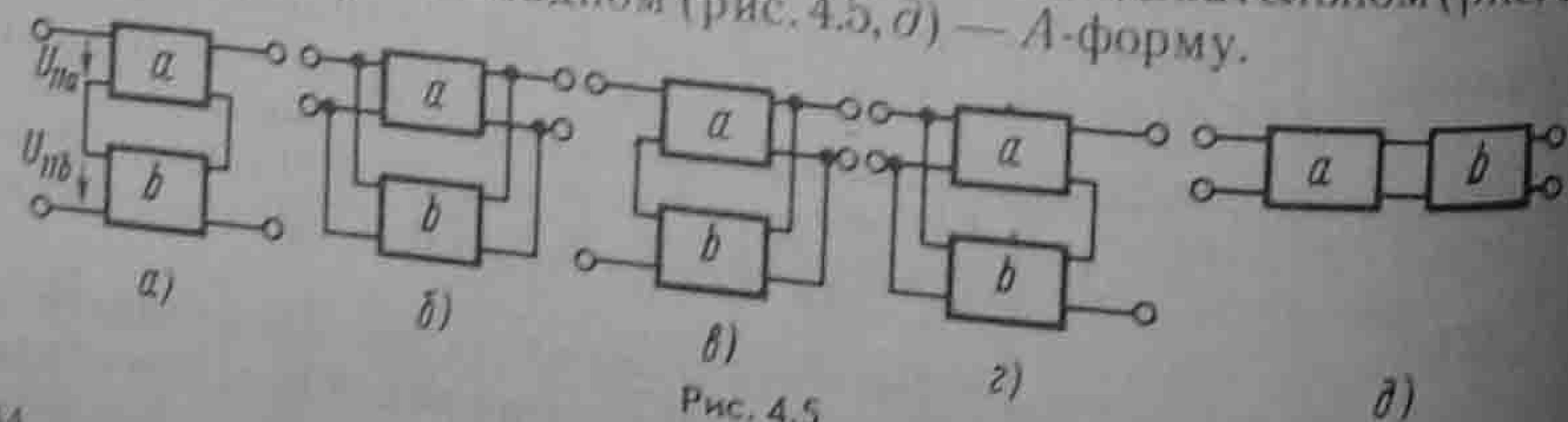



Рис. 4.5



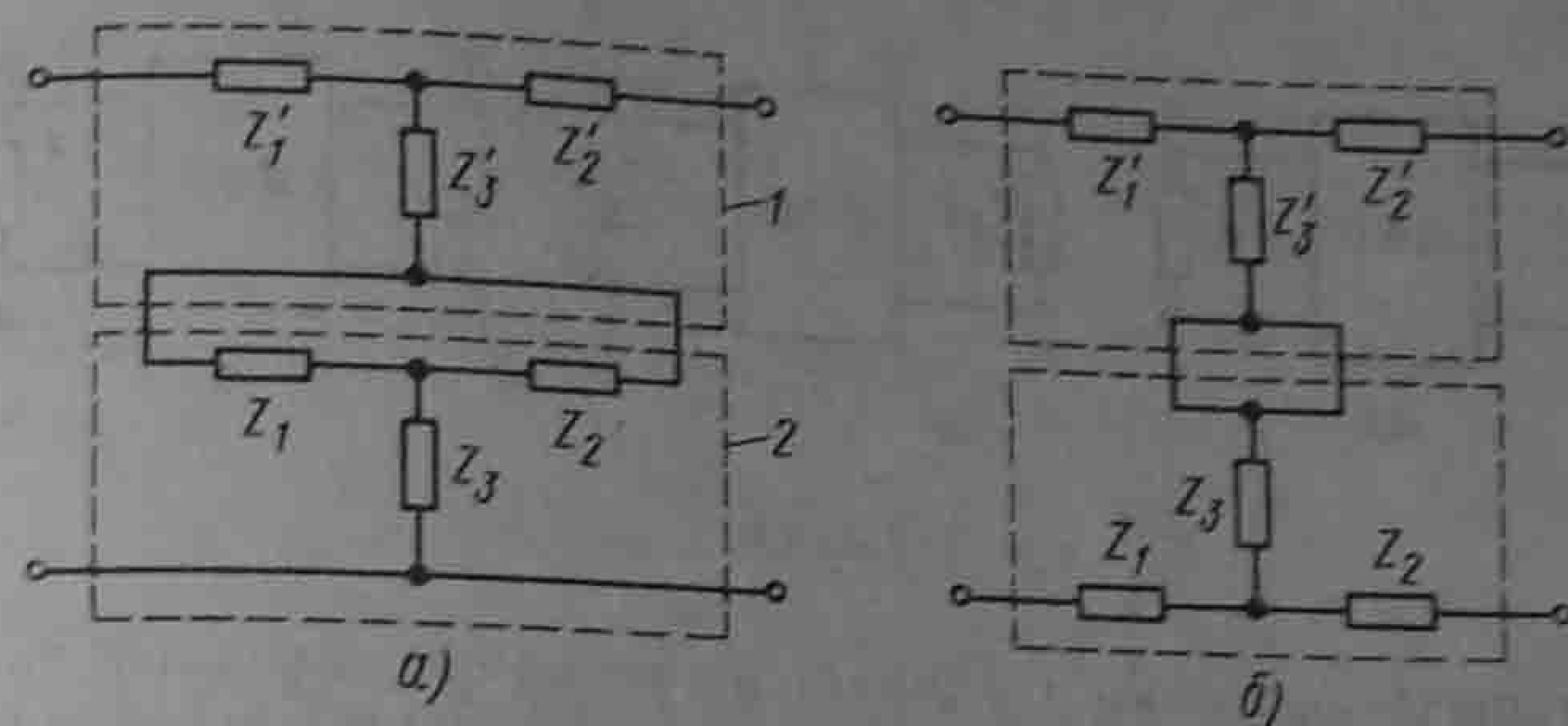



Рис. 4.6

Форму записи уравнений выбирают, исходя из удобств получения матрицы составного четырехполюсника. Так, $Z$-матрица последовательно-последовательно соединенных четырехполюсников равна сумме $Z$-матриц этих четырехполюсников, так как напряжение на входе (выходе) эквивалентного четырехполюсника равно сумме напряжений на входе (выходе) составляющих его четырехполюсников, а токи соответственно на входе (выходе) у последовательно-последовательно соединенных четырехполюсников одинаковы. $Y$-матрица параллельно-параллельно соединенных четырехполюсников равна сумме их $Y$-матриц, так как ток на входе (выходе) эквивалентного четырехполюсника равен сумме токов на входе (выходе) параллельно-параллельно соединенных четырехполюсников, а напряжения на входе (выходе) у них одинаковы. Аналогично и в отношении $H$-матрицы при последовательно-параллельном и $G$-матрицы при параллельно-последовательном соединениях четырехполюсников. При каскадном соединении ток и напряжение на входе первого четырехполюсника равны входным току и напряжению второго четырехполюсника, поэтому $A$-матрица двух каскадно соединенных четырехполюсников $a$ и $b$ равна произведению $A$-матриц этих четырехполюсников:

$$\begin{bmatrix} A_a & B_a \\ C_a & D_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_b & B_b \\ C_b & D_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_aA_b + B_aC_b & A_aB_b + B_aD_b \\ C_aA_b + D_aC_b & C_aB_b + D_aD_b \end{bmatrix}$$

При параллельно-параллельном, последовательно-последовательном, параллельно-последовательном и последовательно-параллельном соединениях необходимо соблюдать *условие регулярности соединения четырехполюсников* — через оба первичных зажима каждого четырехполюсника должны течь равные по значению и противоположные по направлению токи; то же и по отношению к вторичным зажимам каждого четырехполюсника.

При *регулярном соединении* матрица каждого четырехполюсника должна оставаться такой же, какой она была до соединения четырехполюсников.

Пример нарушения условия регулярности при последовательно-последовательном соединении показан на рис. 4.6, $a$. Так соеди-

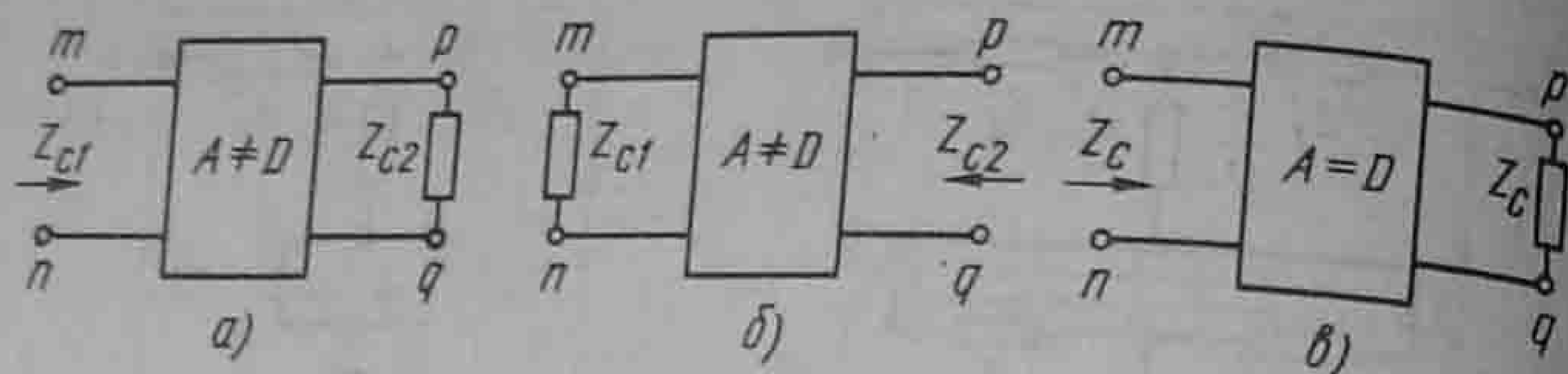



Рис. 4.7

нять четырехполюсники 1 и 2 нельзя, поскольку входные зажимы второго четырехполюсника оказались накоротко соединенными с его выходными зажимами.

Регулярное соединение тех же четырехполюсников показано на рис. 4.6, б — перекрещены обе пары концов второго четырехполюсника (при перекрещивании обеих пар концов все элементы любой матрицы остаются неизменными).

**§ 4.9. Характеристические и повторные сопротивления четырехполюсников.** В случае несимметричного четырехполюсника ($A \neq D$) рассматривают два характеристических сопротивления $Z_{c1}$ и $Z_{c2}$, где $Z_{c1}$ — входное сопротивление со стороны зажимов $mn$, когда нагрузка подключена к зажимам $pq$ и равна $Z_{c2}$ (рис. 4.7, а):

$$Z_{c1} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{A\dot{U}_2 + B\dot{I}_2}{C\dot{U}_2 + D\dot{I}_2} = \frac{AZ_{c2} + B}{CZ_{c2} + D}. \quad (4.24)$$

$Z_{c2}$ — входное сопротивление со стороны зажимов $pq$, когда нагрузка $Z_{c1}$ подключена к зажимам $mn$ (рис. 4.7, б); при этом коэффициенты $A$ и $D$ меняются местами:

$$Z_{c2} = \frac{D\dot{U}_2 + B\dot{I}_2}{C\dot{U}_2 + A\dot{I}_2} = \frac{DZ_{c1} + B}{CZ_{c1} + A}. \quad (4.25)$$

Совместно решая (4.24) и (4.25), найдем

$$Z_{c1} = \sqrt{AB/CD}; \quad Z_{c2} = \sqrt{DB/CA}. \quad (4.26)$$

Учитывая, что $A/C = Z_{1x}$, $B/D = Z_{1к}$, $B/A = Z_{2к}$, $D/C = Z_{2x}$, получим

$$Z_{c1} = \sqrt{Z_{1x}Z_{1к}}; \quad Z_{c2} = \sqrt{Z_{2x}Z_{2к}}. \quad (4.27)$$

Если четырехполюсник симметричен ($A = D$), то $Z_{1c} = Z_{c2} = Z_c = \sqrt{B/C}$, где $Z_c$ равно входному сопротивлению четырехполюсника, когда он нагружен на $Z_c$ (рис. 4.7, в).

В теории цепей иногда пользуются понятием *повторного сопротивления четырехполюсника* $Z_{пов}$. Под ним понимают входное сопротивление со стороны зажимов $mn$, если к выходным зажимам $pq$ присоединено $Z_{пов}$. Из формулы (4.24), заменив в ней $Z_{c1}$ и $Z_{c2}$ на $Z_{пов}$, получим

$$Z_{пов} = \frac{AZ_{пов} + B}{CZ_{пов} + D}. \quad (4.24а)$$

Решив (4.24а) относительно $Z_{пов}$, найдем

$$Z_{пов} = \frac{A - D}{2C} + \sqrt{\left(\frac{A - D}{2C}\right)^2 + \frac{B}{C}}.$$

Если четырехполюсник симметричный ($A = D$), то $Z_{пов} = \sqrt{B/C}$, т. е. оно совпадает с характеристическим сопротивлением $Z_c$. Сопротивление $Z_{пов}$ называют повторным потому, что оно повторяет сопротивление нагрузки на выходе четырехполюсника.

**§ 4.10. Постоянная передача и единицы измерения затухания.** Для симметричного четырехполюсника, нагруженного на $Z_c$,

$$\dot{U}_1 = A\dot{U}_2 + B\dot{I}_2 = \dot{U}_2(A + \sqrt{BC}); \; \dot{I}_1 = \dot{I}_2(A + \sqrt{BC}).$$

Комплексное число $A + \sqrt{BC}$ полагают равным $e^g$, где $g = a + jb = \ln(A + \sqrt{BC})$ — *постоянная передачи*.

Из формул $\dot{U}_1 = \dot{U}_2 e^a e^{jb}$; $\dot{I}_1 = \dot{I}_2 e^a e^{jb}$ следует, что модуль $\dot{U}_1$ в $e^a$ раз больше модуля $\dot{U}_2$, а модуль $\dot{I}_1$ в $e^a$ раз больше модуля $\dot{I}_2$. По фазе $\dot{U}_1$ опережает $\dot{U}_2$ на угол $b$, ток $\dot{I}_1$ опережает $\dot{I}_2$ также на угол $b$.

Величина $a$ характеризует затухание четырехполюсника. Единицами затухания являются неперы (Нп) и белы (Б). Неперы определены на основе натуральных логарифмов, а белы — на основе десятичных. Затухание в неперах

$$a_{Нп} = \frac{1}{2}\ln\frac{\tilde{S}_1}{\tilde{S}_2} = \frac{1}{2}\ln\frac{\dot{U}_1\overset{*}{I}_1}{\dot{U}_2\overset{*}{I}_2}.$$

При согласованной нагрузке

$$\frac{\dot{U}_1\overset{*}{I}_1}{\dot{U}_2\overset{*}{I}_2} = \frac{\dot{U}_1\dfrac{\overset{*}{U}_1}{Z_c}}{\dot{U}_2\dfrac{\overset{*}{U}_2}{Z_c}} = \left(\frac{U_1}{U_2}\right)^2 \text{ и } a_{Нп} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{U_1}{U_2}\right)^2 = \ln\frac{U_1}{U_2}.$$

Если $U_1/U_2 = e$, то затухание равно 1 Нп. Затухание в белах

$$a_Б = \lg(\tilde{S}_1/\tilde{S}_2) = \lg(U_1/U_2)^2 = 2\lg|U_1/U_2|,$$

а в децибелах $a_{дБ} = 20\lg(U_1/U_2)$.

Если $U_1$ больше $U_2$ в 10 раз, то затухание равно 20 дБ, если $U_1/U_2 = 100$, то $a = 40$ дБ.

Выразим неперы через белы. Если $|S_1/S_2| = 10$, то $a_{Нп} = 0{,}5\ln 10 = 1{,}15$; $a_Б = \lg 10 = 1$. Таким образом, 1Б = 1,15 Нп, а 1Нп = 0,868 Б = 8,68 дБ.

**§ 4.11. Уравнения четырехполюсника, записанные через гиперболические функции.** Для симметричного четырехполюсника $A$-форму уравнений (4.1) и (4.2) записывают иногда через гиперболические функции от аргумента $g$, полагая $A = D = \text{ch}g$, $B = Z_c \text{sh}g$, $C = \text{sh}g/Z_c$. При этом $AD - BC = \text{ch}^2 g - \text{sh}^2 g = 1$ и

$$\left.\begin{aligned} \dot U_1 &= \text{ch}g \dot U_2 + Z_c \text{sh}g \dot I_2; \\ \dot I_1 &= \frac{\text{sh}g}{Z_c} \dot U_2 + \text{ch}g \dot I_2. \end{aligned}\right\} \quad (4.28)$$

Убедимся в справедливости замены $A$ на ch$g$:

$$e^{g} = A + \sqrt{BC},\ e^{-g} = \frac{1}{A + \sqrt{BC}};\ \text{ch}g = \frac{1}{2}(e^{g} + e^{-g}) = A.$$

Форму записи через гиперболические функции используют, например, в теории фильтров (см. гл. 5).

Для несимметричного четырехполюсника уравнения через гиперболические функции запишем следующим образом:

$$\dot U_1 = \sqrt{Z_{c1}/Z_{c2}}\,\text{ch}\Gamma \dot U_2 + \sqrt{Z_{c1} Z_{c2}}\,\text{sh}\Gamma \dot I_2;$$

$$\dot I_1 = \frac{1}{\sqrt{Z_{c1} Z_{c2}}}\text{sh}\Gamma \dot U_2 + \sqrt{Z_{c2}/Z_{c1}}\,\text{ch}\Gamma \dot I_2,$$

где $\Gamma$ — мера передачи; $\text{ch}\Gamma = \sqrt{AD}$; $\text{sh}\Gamma = \sqrt{BC}$.

Если несимметричный взаимный четырехполюсник нагружен на $Z_{c2}$, то $\dot U_2 = \dot I_2 Z_{c2}$; $\dot U_1 = \dot U_2 \sqrt{Z_{c1}/Z_{c2}}(\text{ch}\Gamma + \text{sh}\Gamma)$, и $\dot I_1 = \dot I_2 \sqrt{Z_{c2}/Z_{c1}}\,(\text{ch}\Gamma + \text{sh}\Gamma)$. Имея в виду, что $e^{\Gamma} = \text{ch}\Gamma + \text{sh}\Gamma$, получим

$$\dot U_1 = \dot U_2 \sqrt{Z_{c1}/Z_{c2}}\,e^{\Gamma};\ \dot I_1 = \dot I_2 \sqrt{Z_{c2}/Z_{c1}}\,e^{\Gamma}.$$

Мера передачи $\Gamma = a' + jb' = \ln(\sqrt{AD} + \sqrt{BC})$. Если четырехполюсник симметричный, то $Z_{c1} = Z_{c2}$, $D = A$, $\Gamma = g$. Так как $\sqrt{Z_{c1}/Z_{c2}} = \sqrt{A/D}$, то передача по напряжению для несимметричного взаимного четырехполюсника, нагруженного на $Z_{c2}$, составляет $\ln\frac{\dot U_1}{\dot U_2} = \ln\frac{A}{D} + (\sqrt{AD} + \sqrt{BC})$ и передача по току $\ln\frac{\dot I_1}{\dot I_2} = \ln\frac{D}{A} + \ln(\sqrt{AD} + \sqrt{BC})$.

**§ 4.12. Конвертор и инвертор сопротивления.** Если у невзаимного четырехполюсника $B = C = 0$ и он нагружен на зажимах $pq$ на сопротивление $Z_н$, то входное сопротивление со стороны зажимов $mn$

$$Z_{вх} = \frac{AZ_н + B}{CZ_н + D} = Z_н/k_1,$$

где $k_1 = D/A$, т. е. четырехполюсник преобразует (конвертирует) сопротивление $Z_н$ в сопротивление $Z_н/k$. Коэффициент $k_1$ называют *коэффициентом конвертирования*. Если $A$ и $D$ имеют одинаковые знаки, то $Z_{вх}$ имеет тот же знак, что и $Z_н$ (конвертор положительного сопротивления), если разные, то знак $Z_{вх}$ противоположен знаку $Z_н$ (конвертор отрицательного сопротивления).



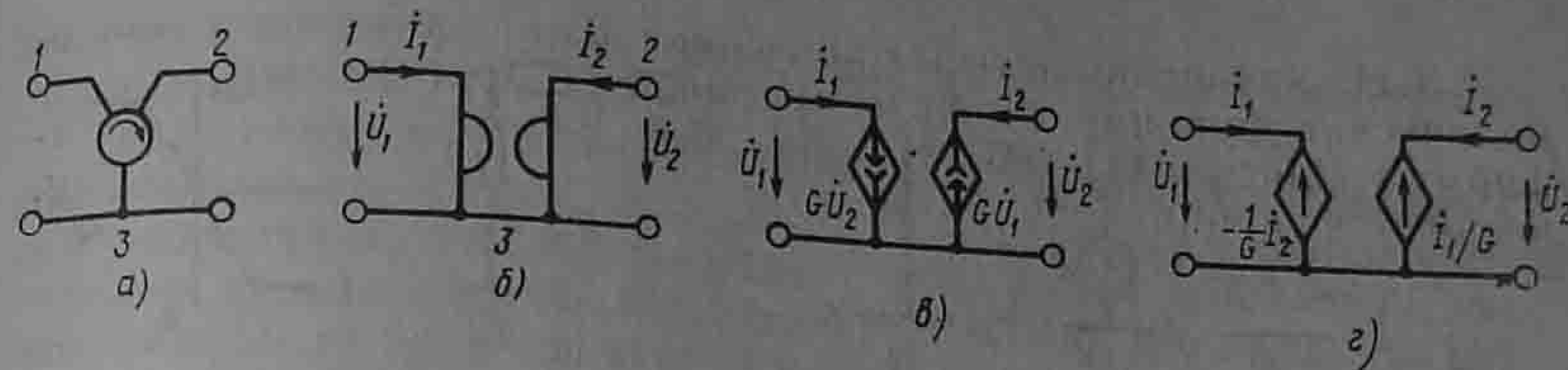



Рис. 4.8

Если у конвертора $A = 1$, то $k_1 = D$; $\dot U_1 = \dot U_2$; $\dot I_1 = k_1 \dot I_2$. В этом случае конвертор называют *идеальным конвертором с преобразованием тока* (при неизменном напряжении).

Если у конвертора $D = 1$, то $k_1 = 1/A$; $\dot U_1 = \dot U_2/k_1$; $\dot I_1 = \dot I_2$. Такой конвертор называют *идеальным конвертором с преобразованием напряжения*.

У конвертора есть $H$- и $G$-матрицы, но отсутствуют $Z$- и $Y$-матрицы.

Если у невзаимного четырехполюсника $A = D = 0$, то $Z_{вх} = (B/C)/(Z_н)$ и четырехполюсник называют *инвертором сопротивления*, а $B/C = k_2$ — *коэффициентом инвертирования*.

Если $B$ и $C$ имеют одинаковые знаки, то $Z_{вх} \equiv 1/Z_н$ (инвертор положительного сопротивления), если знаки у $B$ и $C$ разные, то $Z_{вх} \equiv -1/Z_н$ (инвертор отрицательного сопротивления).

У идеального инвертора входное сопротивление не зависит от того, к каким зажимам ($pq$ или $mn$) подключена нагрузка.

У инвертора есть $Y$- и $Z$-матрицы, но отсутствуют $H$- и $G$-матрицы.

**§ 4.13. Гиратор.** *Гиратором* называют инвертор положительного сопротивления, имеющий следующую $Y$-матрицу:

$$[Y] = \begin{bmatrix} 0 & \pm G \\ \pm G & 0 \end{bmatrix},$$

где $G$ — проводимость гиратора. Для идеального гиратора $G$ — вещественное число. Для гиратора $\dot I_1 = G\dot U_2$; $\dot I_2 = -G\dot U_1$.

Гиратор не поглощает энергию. Он преобразует напряжение в ток. Если на выходе гиратора включено сопротивление $Z_н$, то его входное сопротивление $Z_{вх} = 1/(G^2 Z_н)$.

Представим гиратор как трехполюсник (зажим *3* на схеме рис. 4.8, *а* общий для входной и выходной цепей). Его $Y$-матрица остается неизменной, если, оставив гиратор неподвижным, в направлении стрелки последовательно изменять нумерацию его зажимов. Гиратор является невзаимным (необратимым) четырехполюсником, так как для него $Y_{12} \neq Y_{21}$. В настоящее время гиратор чаще обозначают в соответствии с рис. 4.8, *б*.

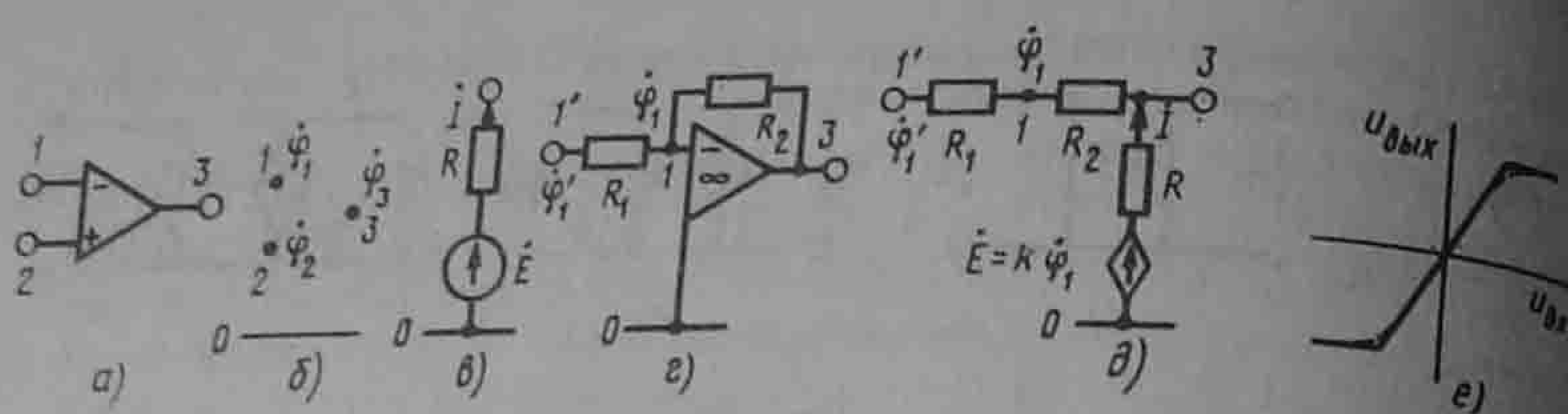



Рис. 4.9

Практически осуществить гиратор можно, например, по схеме рис. 4.8, *в*, в которой использованы два управляемых напряжением источника тока: $GU_2$ и $GU_1$ или по схеме рис. 4.8, *г* с двумя управляемыми источниками напряжения. Воспользовавшись табл. 4.1, можно перейти от $Y$-параметров гиратора к его $Z$- и $A$-параметрам:

$$[Z]=\begin{bmatrix}0 & -\frac{1}{G}\\ \frac{1}{G} & 0\end{bmatrix};[A]=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{G}\\ G & 0\end{bmatrix}.$$

**§ 4.14. Операционный усилитель.** *Операционный усилитель* (ОУ) — это усилитель с очень большим входным сопротивлением, очень малым выходным сопротивлением и очень большим коэффициентом усиления $k$ (теоретически $k\to\infty$, практически $k\approx 10^4\div 10^5$). ОУ выполняют по интегральной технологии в виде отдельного кристалла, поэтому его можно считать самостоятельным активным элементом схем, подобно транзистору. Коэффициент усиления $k=-k_0/(1+j\omega\tau)$. Знак минус обусловлен тем, что вход *1* является инвертирующим. Постоянная времени $\tau$ учитывает инерционные свойства ОУ.

ОУ имеет обычно восемь выводов: два входных или управляющих, один выходной (*3*), один заземленный (*О*), два вывода для источника питания и два для регулировки. Четыре последних вывода на схемах не показывают. На электрических схемах ОУ изображают в виде треугольника с тремя выводами *1, 2, 3* (рис. 4.9, *а*), потенциалы которых относительно заземленной точки соответственно $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ (рис. 4.9, *б*). При включении ОУ по дифференциальной схеме его входное напряжение $\dot{U}_{вх}=\dot{\varphi}_1-\dot{\varphi}_2$. При использовании одного входа и заземлении второго $\dot{U}_{вх}=\dot{\varphi}_1$. Выходное напряжение ОУ равно разности потенциалов между точкой *3* и заземленной точкой 0: $\dot{U}_{вых}=\dot{\varphi}_3-0=\dot{\varphi}_3$, оно в $k$ раз больше входного, т. е. $k(\dot{\varphi}_1-\dot{\varphi}_2)=\dot{\varphi}_3$ или $k\dot{\varphi}_1=\dot{\varphi}_3$ соответственно. Значение коэффициента усиления $k$ записывают рядом с ОУ либо внутри его. Знание числового значения при анализе схем с ОУ не всегда требуется, важно, что $k$ велико и стремится к бесконечности. Так как $k\to\infty$, а $U_{вых}$ — величина конечная, то в зависимости от способов включения $(\dot{\varphi}_1-\dot{\varphi}_2)\to 0$ или $\dot{\varphi}_1\to 0$.



Таким образом, входные напряжения ОУ можно полагать в первом приближении равными нулю. Для облегчения анализа схем, содержащих ОУ, последние в ряде случаев будем заменять их расчетными эквивалентами. Выходную цепь ОУ будем заменять ветвью (рис. 4.9, *в*), присоединенной между выходной точкой *3* и заземленной точкой 0 и содержащей источник ЭДС $\dot{E}=k(\dot{\varphi}_1-\dot{\varphi}_2)$ или $\dot{E}=k\dot{\varphi}_1$, соответственно, и последовательно с ним включенным сопротивлением порядка десятков или сотен ом (точное числовое значение его обычно не задано), по которой проходит некоторый ток $I$ (рис. 4.9, *в*). Значение тока $I$ в расчетах, как правило, не требуется, а если и потребуется, то всегда может быть определено по законам Кирхгофа. Входное сопротивление ОУ в первом приближении полагают стремящимся к бесконечности.

После замены входной и выходной цепей ОУ на расчетные эквиваленты схему рассчитывают по законам Кирхгофа, имея в виду в первом приближении, что входные напряжения и входные токи всех ОУ равны нулю.

Расчет схем с операционными усилителями, когда необходимо учесть конечное (не бесконечное) значение $k$ и конечное значение входных сопротивлений, производят обычно методом узловых потенциалов.

Сделаем еще два замечания относительно ОУ. Зависимость $u_{вых}=f(u_{вх})$ для ОУ линейна только до некоторого максимального значения $u_{вых}\approx 10\div 15$ В, после чего наступает насыщение. В дальнейшем будем полагать, что работа схем с ОУ происходит на линейном участке характеристики ОУ (рис. 4.9, *е*). Заметим еще, что скорость изменения выходного напряжения $du_{вых}/dt$ у ОУ ограничена величиной порядка $10^6$ В/с.

Рассмотрим три примера.

Сначала рассмотрим схему рис. 4.9, *г*, являющуюся схемой источника напряжения, управляемого напряжением. Резисторы $R_1$ и $R_2$ могут регулироваться. Через резистор $R_2$ осуществляется обратная связь. Расчетная схема изображена на рис. 4.9, *д*. Так как второй вход схемы рис. 4.9, *г* заземлен ($\varphi_2=0$), а напряжение на входе ОУ должно быть равно нулю, то $\varphi_1\approx 0$.

Потенциал на входе схемы $\dot{\varphi}_1'=-\dot{I}R_1$. Потенциал на выходе ОУ $\dot{\varphi}_3=\dot{I}R_2$, отсюда $\dot{\varphi}_3=-\dot{\varphi}_1'\frac{R_2}{R_1}$. Так как $R\to 0$, то выходное сопротивление схемы стремится к нулю, т. е. действительно схема рис. 4.9, *г* может выполнять функции источника напряжения (внутреннее сопротивление которого стремится к нулю), управляемого напряжением.

Рассмотрим схему преобразователя сопротивлений на ОУ, изображенную на рис. 4.10, *а*. В схеме имеется два ОУ и пять сопротивлений $Z_1-Z_5$. Покажем, что входное сопротивление схемы относительно зажимов $AB$ для малых переменных составляющих $Z_{AB}=(Z_1Z_3Z_5)/Z_2Z_4$. Обозначим токи в ветвях в соответствии с рис. 4.10, *а*. На рис. 4.10, *б* изображена схема, в которой выходные цепи ОУ заменены их

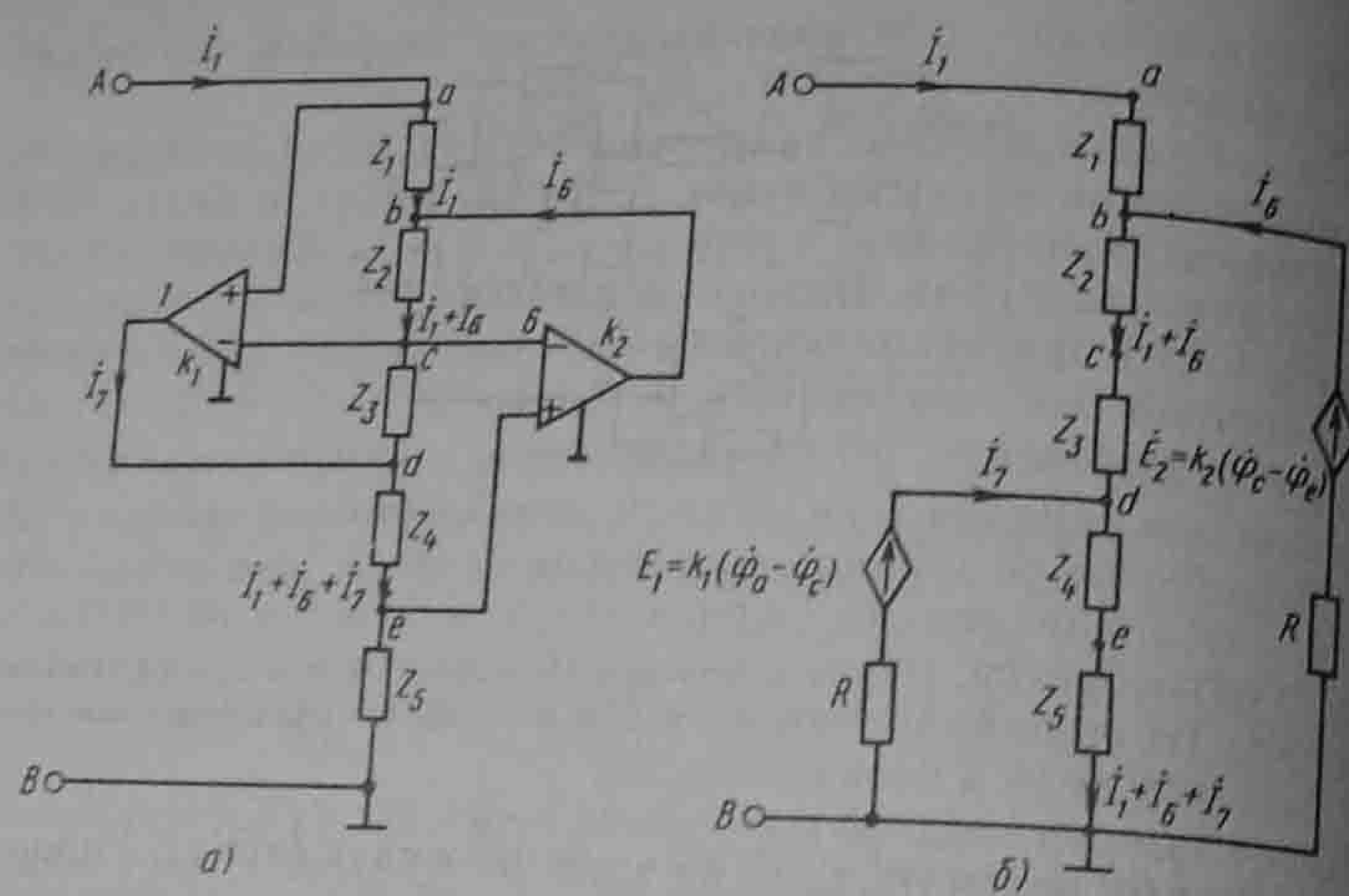



Рис. 4.10

расчетными эквивалентами. Для схемы рис. 4.10, *б* приравняем к нулю входные напряжения ОУ:

$$\dot U_{вх1} = \dot\varphi_a - \dot\varphi_c = \dot I_1 Z_1 + (\dot I_1 + \dot I_6) Z_2 = 0, \qquad (а)$$

$$\dot U_{вх2} = \dot\varphi_c - \dot\varphi_e = (\dot I_1 + \dot I_6) Z_3 + (\dot I_1 + \dot I_6 + \dot I_7) Z_4 = 0. \qquad (б)$$

Из (а)

$$\dot I_1 + \dot I_6 = -\dot I_1 \frac{Z_1}{Z_2}. \qquad (в)$$

Из (б) с учетом (в) получим $\dot I_1 + \dot I_6 + \dot I_7 = \dot I_1 \dfrac{Z_1 Z_3}{Z_2 Z_4}$. Входное напряжение схемы $\dot U_{AB} = \dot U_{ac} = \dot U_{ce} + (\dot I_1 + \dot I_6 + \dot I_7) Z_5$. Но $\dot U_{ac} + \dot U_{ce} = 0$, поэтому

$$\dot U_{AB} = (\dot I_1 + \dot I_6 + \dot I_7) Z_5 = \dot I_1 \frac{Z_1 Z_3 Z_5}{Z_2 Z_4}; \quad Z_{вхAB} = \frac{\dot U_{AB}}{\dot I_1} = \frac{Z_1 Z_3 Z_5}{Z_2 Z_4}.$$

Применение ОУ для реализации гиратора иллюстрирует рис. 4.11. В этой схеме три ОУ и четыре резистора. Проводимости резисторов $R_1$ и $R_2$ выполняют функции проводимостей гиратора. Обозначим потенциалы узлов и токи ветвей в соответствии с рис. 4.11. Учтем, что напряжение и токи на входе каждого ОУ стремятся к нулю, а точки, обозначенные буквой *О*, и точка *С* практически имеют нулевой потенциал. В этой схеме ток $\dot I_4 = \dot U_{вых}/R$, потенциал точки *1* $\dot\varphi_1 = -\dot I_4 R = -\dot U_{вых}$. Потенциал точки *С* $\dot\varphi_c = 0 = \dot\varphi_1 - \dot I_3 R_2$.

Отсюда $\dot I_3 = \dot\varphi_1/R_2 = -\dot U_{вых}/R_2$. Но $\dot I_1 = -\dot I_3$, поэтому

$$\dot I_1 = \dot U_{вых}/R_2. \qquad (г)$$

Потенциал точки *A* $\dot\varphi_A = -\dot I_2 R_1$. Входное напряжение

$$\dot U_{вх} = \dot\varphi_c - \dot\varphi_A = \dot I_2 R_1. \qquad (д)$$

Имея в виду, что для *Y*-формы записи уравнений четырехполюсника ток $\dot I_2$ должен иметь направление, противоположное указанному на рис. 4.11, установим, что уравнение (г) и (д) являются уравнением гиратора. Недостатком схемы рис. 4.11 является то, что источник сигнала и нагрузка $Z_н$ непосредственно не соединены с заземленной точкой.



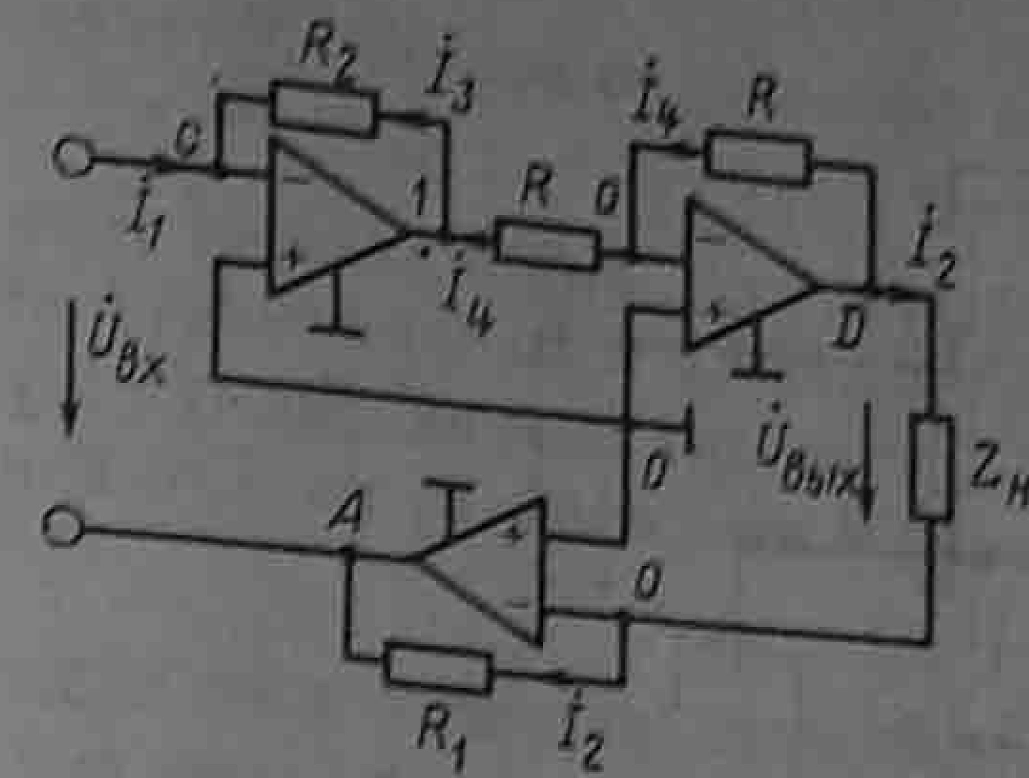



Рис. 4.11

## § 4.15. Управляемые источники напряжения (тока).

*Управляемый источник напряжения* (тока) представляет собой невзаимный четырехполюсник (трехполюсник), выходное напряжение (ток) которого пропорционально входному напряжению (току) этого четырехполюсника, а сам он обладает свойством источника напряжения (ЭДС) (напряжение на его зажимах не зависит от протекающего через него тока) или источника тока (его ток не зависит от нагрузки). Управляемый источник обозначают часто в виде ромба, в котором указана стрелка (если это источник напряжения), либо двойная стрелка (если это источник тока). Рядом записывают управляющую величину, умноженную на некоторый масштабный множитель[1].

Известны четыре типа идеализированных управляемых источников:

1) *источник тока, управляемый напряжением* (ИТУН). Схема его изображена на рис. 4.12, *а*. Входной ток $\dot I_1 = 0$, выходной ток пропорционален входному напряжению: $\dot I_2 = G\dot U_1$, входное и выход-

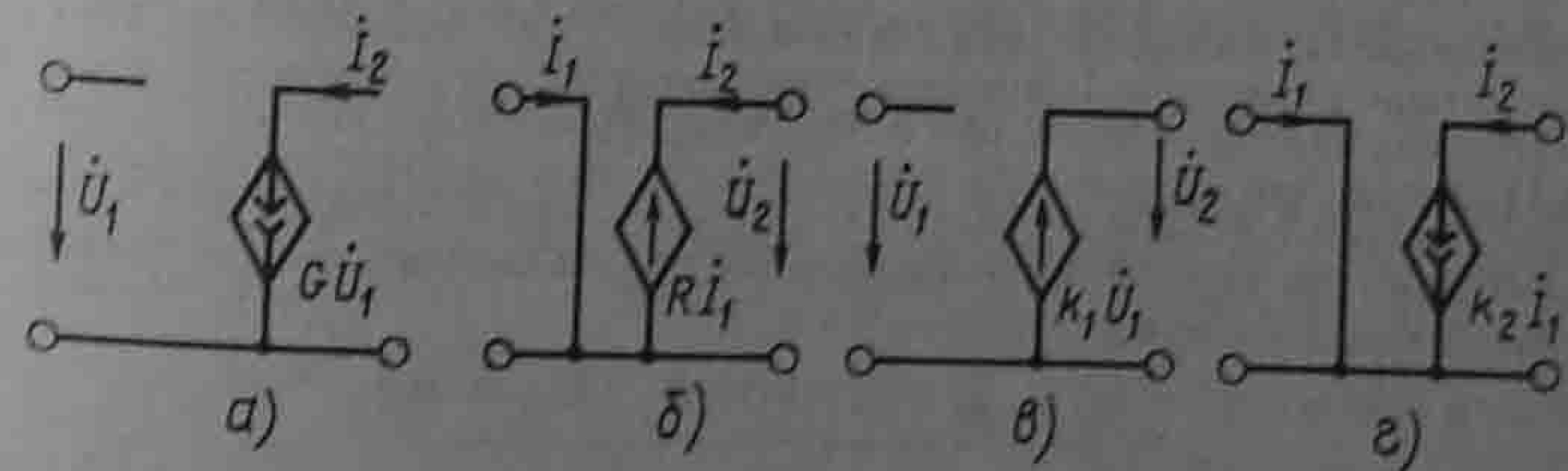



Рис. 4.12

[1] Управляющими величинами могут быть также интеграл и производная по времени от тока или напряжения.

ное сопротивления бесконечно велики. Матрица $Y$ ИТУН такова $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ G & 0 \end{bmatrix}$;

2) *источник напряжения, управляемый током* (ИНУТ). Схема его представлена на рис. 4.12, *б*. Входное напряжение $U_1 = 0$, выходное напряжение пропорционально входному току: $\dot{U}_2 = R\dot{I}_1$, входное и выходное сопротивления равны нулю. Его $Z$-матрица имеет вид $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ R & 0 \end{bmatrix}$;

3) *источник напряжения, управляемый напряжением* (ИНУН). Схема дана на рис. 4.12, *в*. Входной ток $\dot{I}_1 = 0$, выходное напряжение пропорционально входному: $\dot{U}_2 = k\dot{U}_1$, входное сопротивление бесконечно велико, а выходное равно нулю. Его $G$-матрица такова: $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k_1 & 0 \end{bmatrix}$;

4) *источник тока, управляемый током* (ИТУТ). Схема изображена на рис. 4.12, *г*. Входное напряжение $U_1 = 0$, входной ток пропорционален входному: $\dot{I}_2 = k_2\dot{I}_1$, входное сопротивление равно нулю, выходное — бесконечности. Матрица $H$-параметров его равна $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k_2 & 0 \end{bmatrix}$.

Каскадное соединение ИНУТ с ИТУН обладает свойством ИТУТ, а каскадное соединение ИТУН с ИНУТ — свойством ИНУН.

Для всех перечисленных управляемых источников выходная величина не влияет на входную, а входная мощность равна нулю, так как входной ток либо входное напряжение равны нулю.

Управляемые источники часто осуществляют на основе операционных усилителей. Так, схема ИНУН на ОУ изображена на рис. 4.9, *г*, а схема ИТУТ на двух ОУ — на рис. 4.13.

Убедимся, что схема рис. 4.13 обладает свойствами ИТУТ. Воспользуемся обозначениями на этой схеме.

Так как входное напряжение первого ОУ равно нулю, а $\varphi_1 = 0$, то и $\varphi_2 \approx 0$. Входной ток первого ОУ $\dot{I}_1 = 0$, входной ток второго ОУ $\dot{I}_2 = 0$. Выходной ток схемы $\dot{I}_{вх} = -\dot{\varphi}_3/R$, отсюда $\dot{\varphi}_3 = -\dot{I}_{вх}R$. Выходной ток первого ОУ обозначим $\dot{I}$. Тогда для узла 3 по первому закону Кирхгофа $\dot{I}_3 = \dot{I}_{вх} + \dot{I}$. Так как $\dot{I}_2 = 0$, то

$$\dot{I}_4 = \dot{\varphi}_4/(R_1 + R_2), \tag{а}$$

а потенциал точки 6 $\dot{\varphi}_6 = \dot{\varphi}_3 - \dot{I}_3R_1 = \dot{\varphi}_3 - (\dot{I}_{вх} + \dot{I})R_1$. Входное напряжение второго ОУ равно нулю, поэтому $\dot{\varphi}_5 = \dot{\varphi}_6$. Так как сопротивление между точками 4 и 5 равно сопротивлению между точками 4 и 6, то

$$\dot{I}_4 = \frac{\dot{\varphi}_4 - \dot{\varphi}_6}{R_2} = \frac{\dot{\varphi}_4 + \dot{I}_{вх}R + (\dot{I}_{вх} + \dot{I})R_1}{R_2}. \tag{б}$$

Приравняв (а) к (б), определим

$$\dot{\varphi}_4 = -\frac{1}{R_1}[\dot{I}_{вх}(R + R_1)(R_1 + R_2) - \dot{I}R_1(R_1 + R_2)]. \tag{в}$$



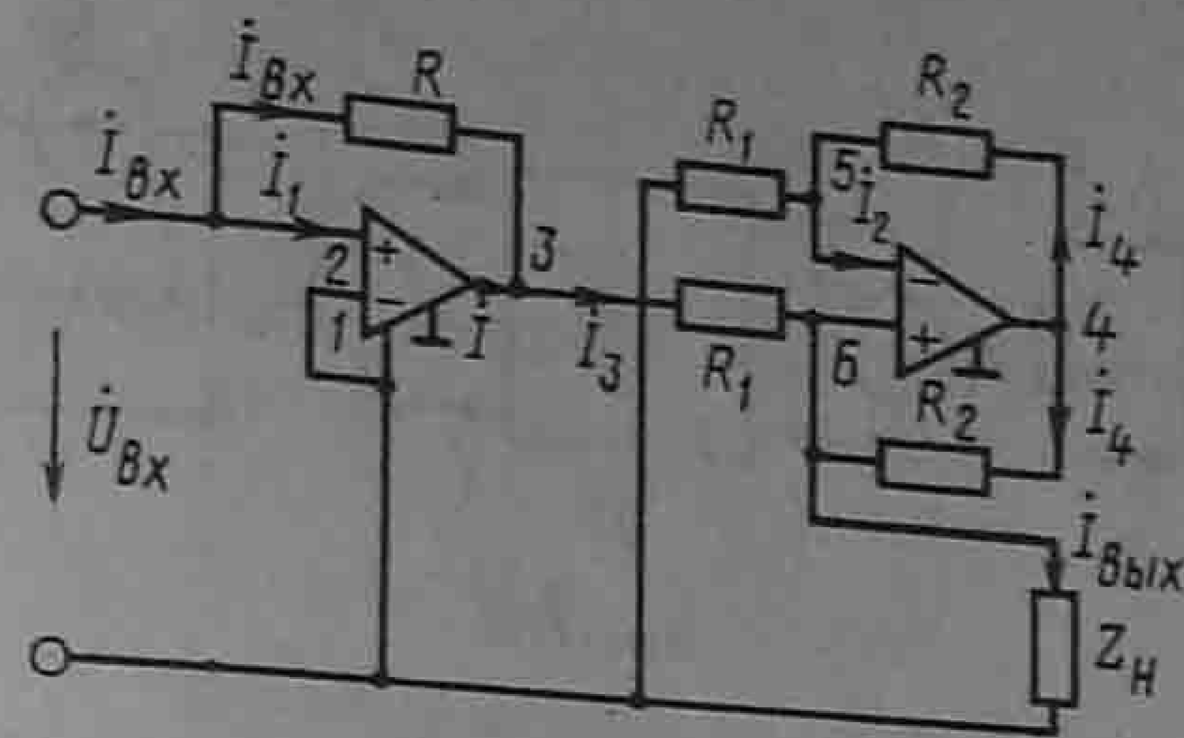



Рис. 4.13

Подставим (в) в (а)

$$\dot{I}_4 = -\dot{I}_{вх}\frac{R + R_1}{R_1} - \dot{I}. \tag{г}$$

Для узла 6, по первому закону Кирхгофа,

$$\dot{I}_{вых} = \dot{I}_3 + \dot{I}_4 = \dot{I}_{вх} + \dot{I} - \dot{I}_{вх}\left(1 + \frac{R}{R_1}\right) - \dot{I} = -\dot{I}_{вх}\frac{R}{R_1}.$$

Так как $\dot{I}_{вых}$ пропорционально $\dot{I}_{вх}$, $\dot{U}_{вх} = 0$, а выходной ток $\dot{I}_{вых}$ не зависит от сопротивления нагрузки $Z_н$, то схема (рис. 4.13) по отношению к выходной цепи обладает свойствами источника тока, управляемого током $\dot{I}_{вх}$. На рис. 4.14, *а* представлена одна из возможных схем ИНУТ, на рис. 4.14 *б* — одна из возможных схем ИНУТ, а на рис. 4.14, *в* — схема конвертора отрицательного сопротивления.

Как имитировать элементы — $R$, — $C$, заземленную и незаземленную $L$, частотно зависимые сопротивления, высокоомные резисторы — [см. приложение Б].

В § 4.14 — 4.15 было принято, что для ОУ $K = \frac{k_0}{1 + j\omega\tau} \to \infty$ за счет того, что $k_0 \to \infty$. Практически же $k_0 \approx 10^4 \div 10^6$, а $\tau \approx 10^{-2} \div 10^{-3}$. Поэтому при относительно высоких частотах $\omega$ при рассмотрении схем с управляемыми источниками следует учитывать зависимость $K$ от $\omega$.

**§ 4.16. Активный четырехполюсник.** Под активным четырехполюсником будем понимать линейный четырехполюсник, содержащий источники энергии, за счет которых на разомкнутых зажимах его появляется напряжение. Следует иметь в виду, что в понятие

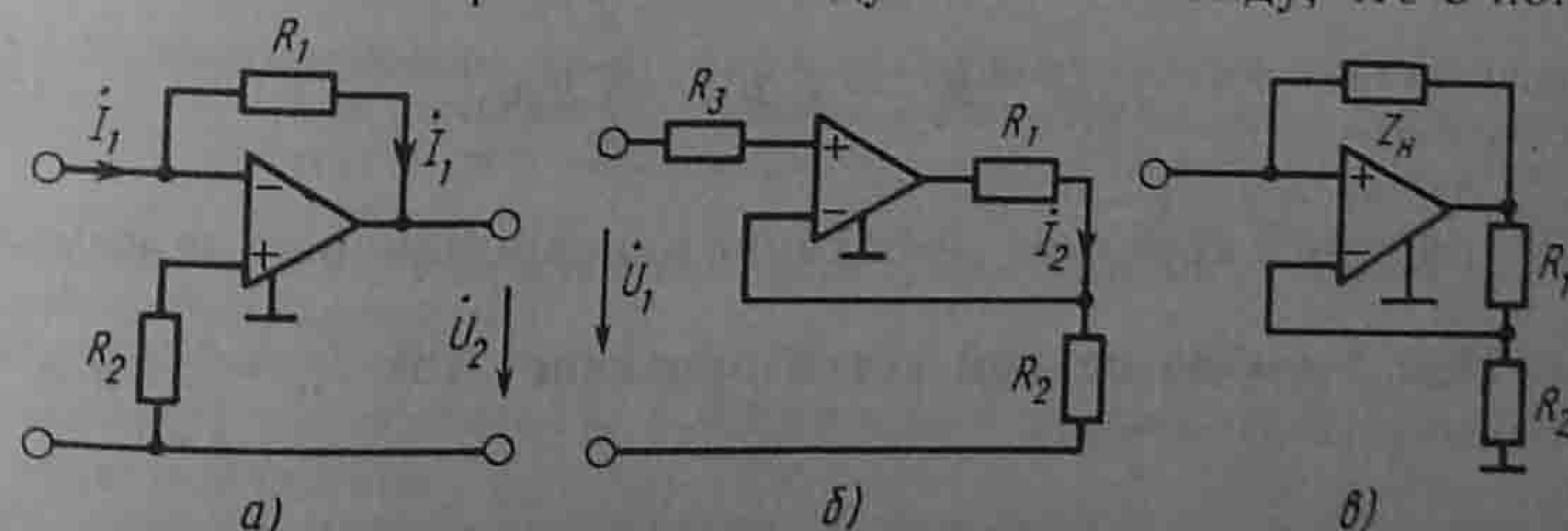



Рис. 4.14

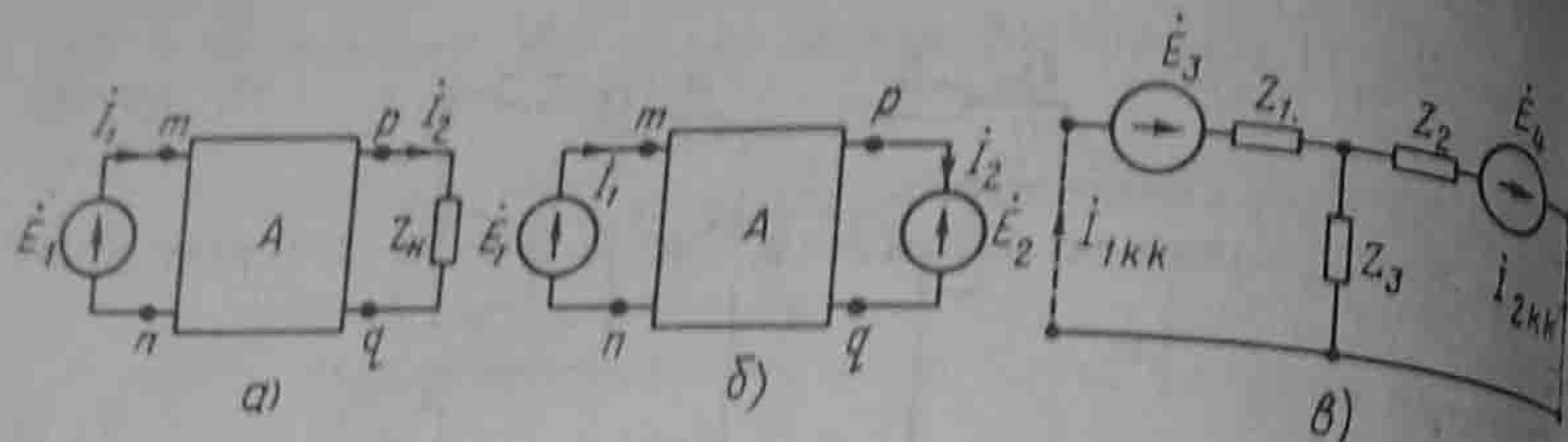



Рис. 4.15

активный четырехполюсник в литературе вкладывают также и иной смысл, а именно — такой четырехполюсник, активная мощность на выходе которого превышает (может превышать) активную мощность на входе. Этот эффект достигается обычно за счет того, что в состав четырехполюсника входят активные невзаимные элементы, такие, как операционные усилители, транзисторы, электронные лампы, туннельные диоды и др. Чтобы различать эти два класса активных четырехполюсников, условимся рассматриваемый четырехполюсник называть *активным автономным* [по зажимам $mn$ и (или) $pq$], а четырехполюсник, обладающий свойством усиливать мощность, — *активным неавтономным* в направлении усиления мощности.

Рассмотрим уравнения, описывающие связь между входными и выходными величинами активного автономного четырехполюсника и его схему замещения.

Положим, что в первой ветви $mn$ активного четырехполюсника рис. 4.15, *а* есть источник ЭДС $\dot E_1$, во второй ветви $pq$ — нагрузка $Z_н$, а в остальных ветвях ($3 - p$), находящихся внутри четырехполюсника, имеются или могут иметься источники ЭДС $\dot E_k$ (индекс $k$ может принимать значения от 3 до $p$). Тогда, заменив по теореме компенсации сопротивление $Z_н$ на источник ЭДС $\dot E_2$ (рис. 4.15, *б*), запишем выражения для токов $\dot I_1$ и $\dot I_2$:

$$\dot I_1 = \dot E_1 y_{11} - \dot E_2 y_{12} + \sum_{k=3}^{p} \dot E_k y_{1k}; \tag{4.29}$$

$$\dot I_2 = \dot E_1 y_{21} - \dot E_2 y_{22} + \sum_{k=3}^{p} \dot E_k y_{2k}. \tag{4.30}$$

Осуществим короткое замыкание одновременно на зажимах $mn$ и $pq$. При этом по первой ветви протекает ток $\dot I_{1к} = \sum_{k=3}^{p} \dot E y_{1k}$, а по второй — ток $\dot I_{2к} = \sum_{k=3}^{p} \dot E_k y_{2k}$.



В (4.29) вместо $\sum_{k=3}^{p} \dot E_k y_{1k}$ подставим $\dot I_{1к}$, а в (4.30) вместо $\sum_{k=3}^{p} \dot E_k y_{2k}$ — $\dot I_{2к}$. Кроме того, заменим $\dot E_1$ на $\dot U_1$ и $\dot E_2$ на $\dot U_2$. В результате получим

$$\dot I_1 - \dot I_{1к} = y_{11} \dot U_1 - y_{12} \dot U_2; \tag{4.31}$$

$$\dot I_2 - \dot I_{2к} = y_{21} \dot U_1 - y_{22} \dot U_2. \tag{4.32}$$

Уравнения (4.31) и (4.32) отличаются от уравнений (а) и (б) только тем, что в их левых частях находятся соответственно $\dot I_1 - \dot I_{1к}$ и $\dot I_2 - \dot I_{2к}$ вместо $\dot I_1$ и $\dot I_2$. Отсюда следует, что все уравнения, получающиеся из (а) и (б) в результате их преобразований, справедливы и для активного четырехполюсника, только в них $\dot I_1$ следует заменить на $\dot I_1 - \dot I_{1к}$, а $\dot I_2$ — на $\dot I_2 - \dot I_{2к}$. Так, $A$-форме уравнений пассивного четырехполюсника ($\dot U_1 = A\dot U_2 + B\dot I_2$, $\dot I_1 = C\dot U_2 + D\dot I_2$) соответствует $A$-форма уравнений активного четырехполюсника:

$$\dot U_1 = A\dot U_2 + B(\dot I_2 - \dot I_{2к});$$

$$\dot I_1 - \dot I_{1к} = C\dot U_2 + D(\dot I_2 - \dot I_{2к}).$$

Коэффициенты $A$, $B$, $C$ активного автономного взаимного четырехполюсника удовлетворяют условию $AD - BC = 1$ и определяют их так же, как и для пассивного.

На рис. 4.14, *в* изображена одна из возможных Т-схем замещения активного четырехполюсника. Сопротивления $Z_1$, $Z_2$ и $Z_3$ находят через коэффициенты $A$, $B$, $C$ так же, как для пассивного четырехполюсника, а ЭДС $\dot E_3$ и $\dot E_4$ вычисляют по значениям токов $\dot I_{1к}$ и $\dot I_{2к}$ и сопротивлениям из уравнений, составленных для режима одновременного короткого замыкания входа и выхода (показано пунктиром на рис. 4.15, *в*):

$$\dot I_{1к}(Z_1 + Z_3) - \dot I_{2к} Z_3 = \dot E_3;$$

$$-\dot I_{1к} Z_3 + \dot I_{2к}(Z_2 + Z_3) = \dot E_4.$$

§ 4.17. **Многополюсник.** На рис. 4.16, *а* изображена пассивная схема, в которой выделено $m$ ветвей ($m$ пар зажимов). Условимся называть такую схему *многополюсником*. Будем полагать известными входные $y_{11} - y_{mm}$ и взаимные $y_{km}$, $y_{mk}$ проводимости ветвей. Они определены в соответствии с § 2.15 ($k$-ветвь входит только в $k$-контур; направления всех контурных токов при составлении уравнений по методу контурных токов одинаковы).

Включим в ветвь *1* ЭДС $\dot E_1 = \dot U_1$, а в ветви *2* — $m$ нагрузки $Z_2 - Z_m$ (рис. 4.16, *б*). Токи в ветвях *2* — $m$ обозначим $\dot I_2' - \dot I_m'$, а в ветви *1* обозначим $\dot I_1$. Все токи направлены по часовой стрелке.

На основании теоремы компенсации заменим нагрузки $Z_2 - Z_m$ на источники ЭДС $\dot E_2 - \dot E_m$, направленные встречно токам $\dot I_2' - \dot I_m'$ (рис. 4.16, *в*). На основании

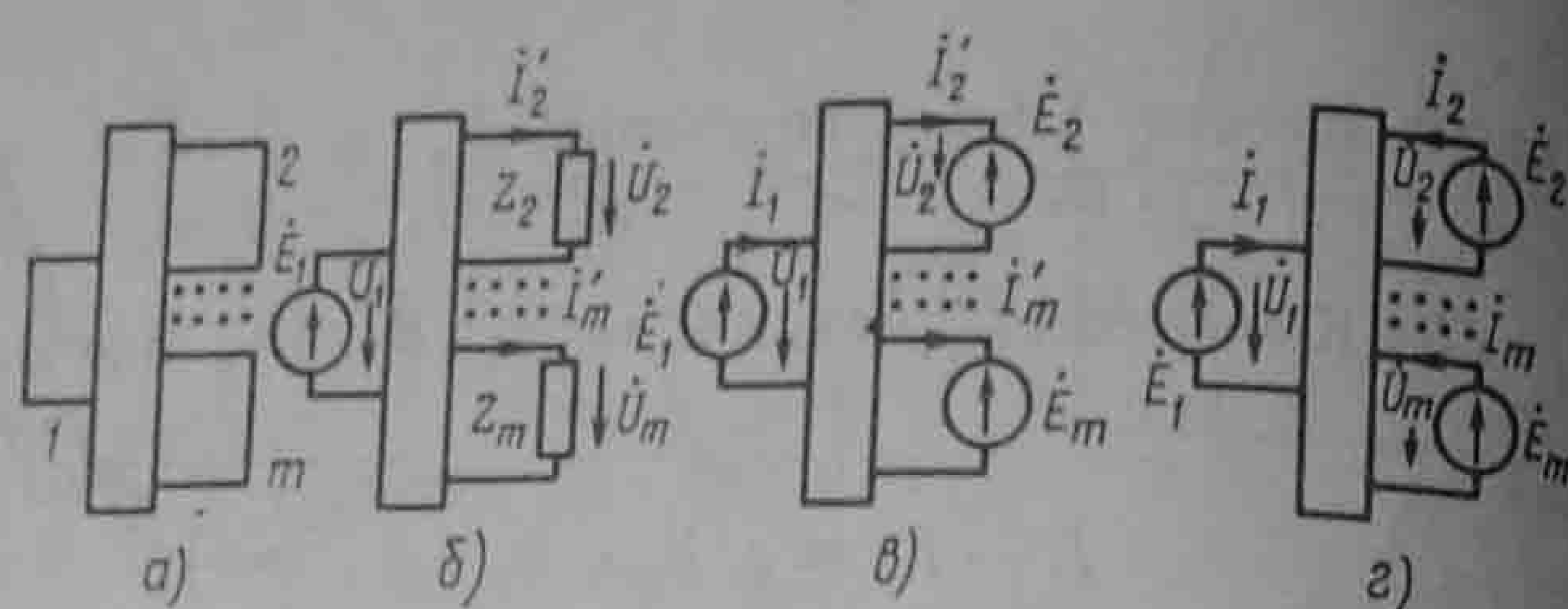



Рис. 4.16

принципа наложения запишем выражения для токов ветвей:

$$
\begin{aligned}
\dot I_1 &= \dot U_1 y_{11} - \dot U_2 y_{12} - \dot U_3 y_{13} - \ldots - \dot U_m y_{1m},\\
\dot I_2' &= \dot U_1 y_{21} - \dot U_2 y_{22} - \dot U_3 y_{23} - \ldots - \dot U_m y_{2m},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\dot I_m' &= \dot U_1 y_{m1} - \dot U_2 y_{m2} - \dot U_3 y_{m3} - \ldots - \dot U_m y_{mm}.
\end{aligned} \qquad (а)
$$

Изменим направления токов в ветвях $2 - m$ на противоположные и назовем их токами $\dot I_2 - \dot I_m$ ($\dot I_2 = -\dot I_2', \ldots, \dot I_m = -\dot I_m'$) (рис. 4.16, *г*). Для того чтобы все слагаемые уравнений имели положительные знаки, введем следующие обозначения: $Y_{kk} = y_{kk}$,

$$Y_{1k} = -y_{1k} = -y_{k1};\ Y_{pr} = Y_{rp} = y_{pr} = y_{rp}\ (p \neq r \neq 1).$$

Тогда система уравнений многополюсника (а) будет иметь вид

$$[Y][\dot U] = [\dot I]; \qquad (б)$$

$$[Y] = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} \ldots & Y_{1m} \\ Y_{21} & Y_{22} & \ldots & \ldots Y_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ Y_{m1} & Y_{m2} & \ldots & \ldots Y_{mm} \end{bmatrix};[\dot U] = \begin{bmatrix} \dot U_1 \\ \dot U_2 \\ \ldots \\ \dot U_m \end{bmatrix};[\dot I] = \begin{bmatrix} \dot I_1 \\ \dot I_2 \\ \ldots \\ \dot I_m \end{bmatrix}.$$

Если систему уравнений многополюсника (б), записанную в $Y$-форме, решить относительно $[\dot U]$, то получим систему уравнений многополюсника, записанную в $Z$-форме:

$$[\dot U] = [Z][\dot I], \qquad (в)$$

$$[Z] = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \ldots & Z_{1m} \\ Z_{21} & Z_{22} & \ldots & Z_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ Z_{m1} & Z_{m2} & \ldots & Z_{mm} \end{bmatrix} = [Y]^{-1}.$$

Если у многополюсника $Y_{km} \neq Y_{mk}$, его называют *невзаимным*. Если многополюсник содержит источники энергии (активный автономный многополюсник), то его уравнения в $Y$- или $Z$-форме запишутся подобно тому, как это сделано в § 4.16 для четырехполюсника:

$$[Y][\dot U] = [\dot I - \dot I_{kk}] \text{ или } [Z][\dot I - \dot I_{kk}] = [\dot U].$$

Исследование работы электрических цепей часто проводят графическими методами путем построения круговых и линейных диаг-



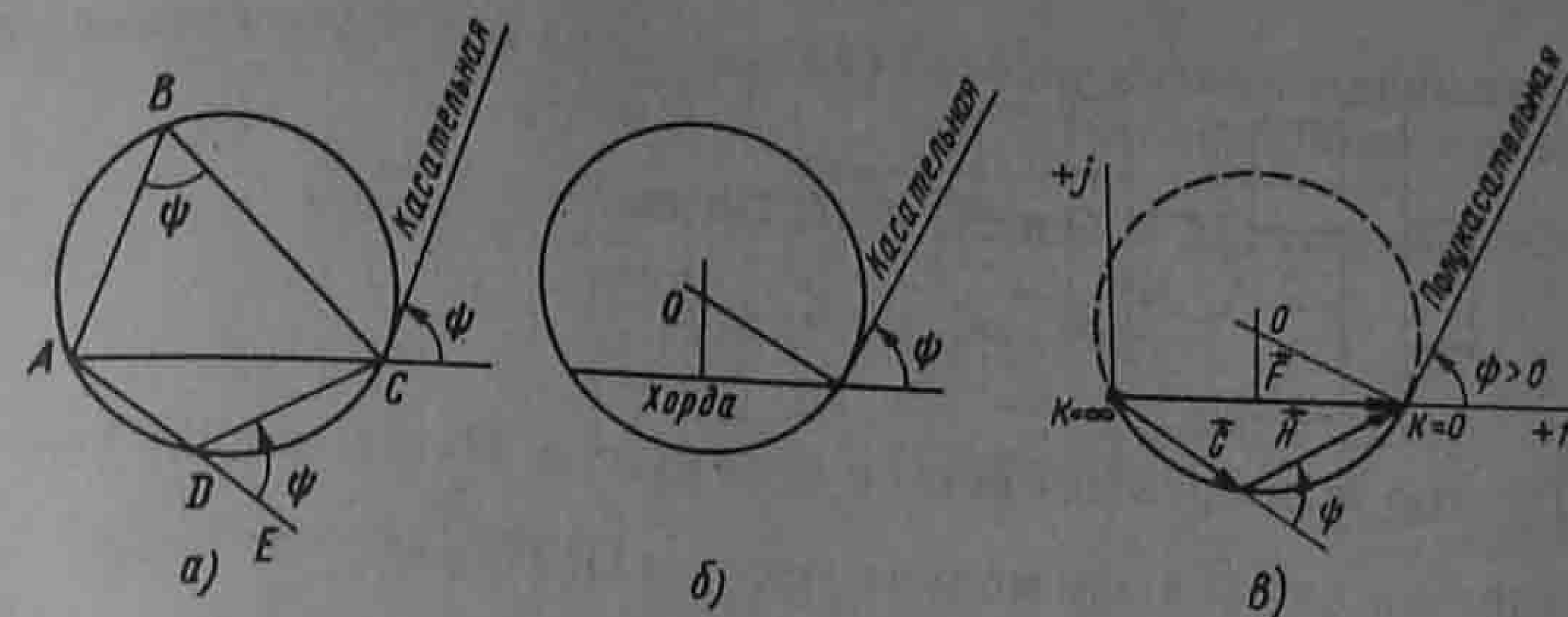



Рис. 4.17

рамм. Перед тем как приступить к изучению круговых диаграмм, рассмотрим вопрос о построении дуги окружности по хорде и вписанному углу.

**§ 4.18. Построение дуги окружности по хорде и вписанному углу.** Из курса геометрии известно, что *вписанным углом* называют угол, вершина которого находится на окружности, а стороны являются хордами.

Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается. Так, $\angle ABC = \psi$ (рис. 4.17, *а*) измеряется дугой $ADC/2$, а $\angle ADC$ — дугой $ABC/2$. Сумма $\angle ABC + \angle ADC = \pi$.

Угол $\angle EDC$ дополняет до $\pi$ угол $\angle ADC$, поэтому $\angle EDC = \psi$.

Какое бы положение ни занимала точка $D$ в интервале от $A$ до $C$, угол между продолжением хорды $AD$ (т. е. линией $DE$) и хордой $DC$ остается неизменным и равным $\psi$.

Угол между продолжением хорды $AC$ и касательной (полукасательной) к окружности в точке $C$ также равняется углу $\psi$.

Центр окружности $O$ находится на пересечении перпендикуляра к середине хорды и перпендикуляра к касательной (рис. 4.17, *б*).

Из изложенного следует, что если заданы хорда и вписанный угол $\psi$, то для нахождения центра окружности необходимо: 1) восставить перпендикуляр к середине хорды; 2) под углом $\psi$ к продолжению хорды провести прямую, которая будет являться касательной к окружности; 3) восставить перпендикуляр к касательной; пересечение перпендикуляра к хорде и перпендикуляра к касательной даст центр окружности.

**§ 4.19. Уравнение дуги окружности в векторной форме записи.** Построения, аналогичные построениям рис. 4.17, *а*, могут быть выполнены и на комплексной плоскости. В этом случае все хорды, например $CA$, $DA$, $CD$, являются векторами.

На комплексной плоскости рис. 4.17, *в* совместим хорду $\vec{CA} = \vec{F}$ с осью $+1$. Если угол $\psi > 0$, то от продолжения хорды его

откладывают против часовой стрелки; если $\psi < 0$, угол откладывают по часовой стрелке.

Обозначим $\vec{DA} = \vec{G}$ и $\vec{CD} = \vec{H}$. Тогда

$$\vec{G} + \vec{H} = \vec{F}. \quad (4.31а)$$

Вектор $\vec{H}$ опережает вектор $\vec{G}$ на угол $\psi$. Пусть модуль вектора $\vec{H}$ будет в $k$ раз больше модуля вектора $\vec{G}$. Тогда

$$\vec{H} = k\vec{G}e^{j\psi}. \quad (4.31б)$$

Если $k = 0$, то $\vec{H} = 0$ и $\vec{G} = \vec{F}$. При $k = \infty$ $\vec{H} = \vec{F}$ и $\vec{G} = 0$. Подставив (4.31б) в (4.31а), получим

$$\vec{G}(1 + ke^{j\psi}) = \vec{F},$$

или

$$\vec{G} = \vec{F}/(1 + ke^{j\psi}). \quad (4.31в)$$

Уравнение (4.31в) называют *уравнением дуги окружности в векторной форме записи.*

При изменении коэффициента $k$ от 0 до $\infty$ меняются оба вектора $\vec{G}$ и $\vec{H}$, но так, что угол $\psi$ между ними остается неизменным, а сумма векторов равна вектору $\vec{F}$. Конец вектора $\vec{G}$ скользит по дуге окружности, хордой которой является вектор $\vec{F}$. Поэтому можно сказать, что дуга окружности является геометрическим местом концов вектора $\vec{G}$.

Рабочей частью окружности, или рабочей дугой, является та часть окружности, которая по отношению к хорде лежит по обратную сторону от полукасательной (рабочая дуга на рис. 4.17, в вычерчена сплошной линией, нерабочая — пунктиром).

Рабочая дуга меньше половины окружности при $|\psi| < 90°$ и больше половины окружности при $|\psi| > 90°$.

**§ 4.20. Круговые диаграммы.** Из § 3.4 известно, что синусоидально изменяющиеся функции времени (токи, напряжения) могут быть изображены векторами на комплексной плоскости. Если процесс в электрической цепи описывается уравнением, по форме тождественным уравнению (4.31в), то геометрическим местом концов вектора тока (напряжения), выполняющего в уравнении электриче-



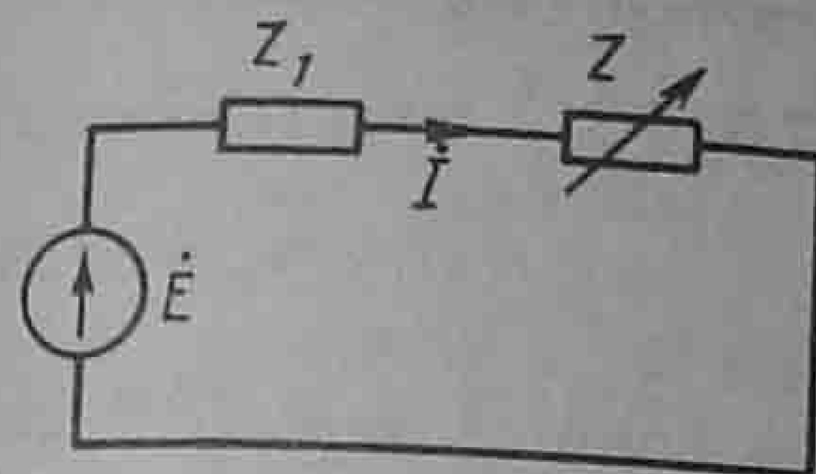



Рис. 4.18

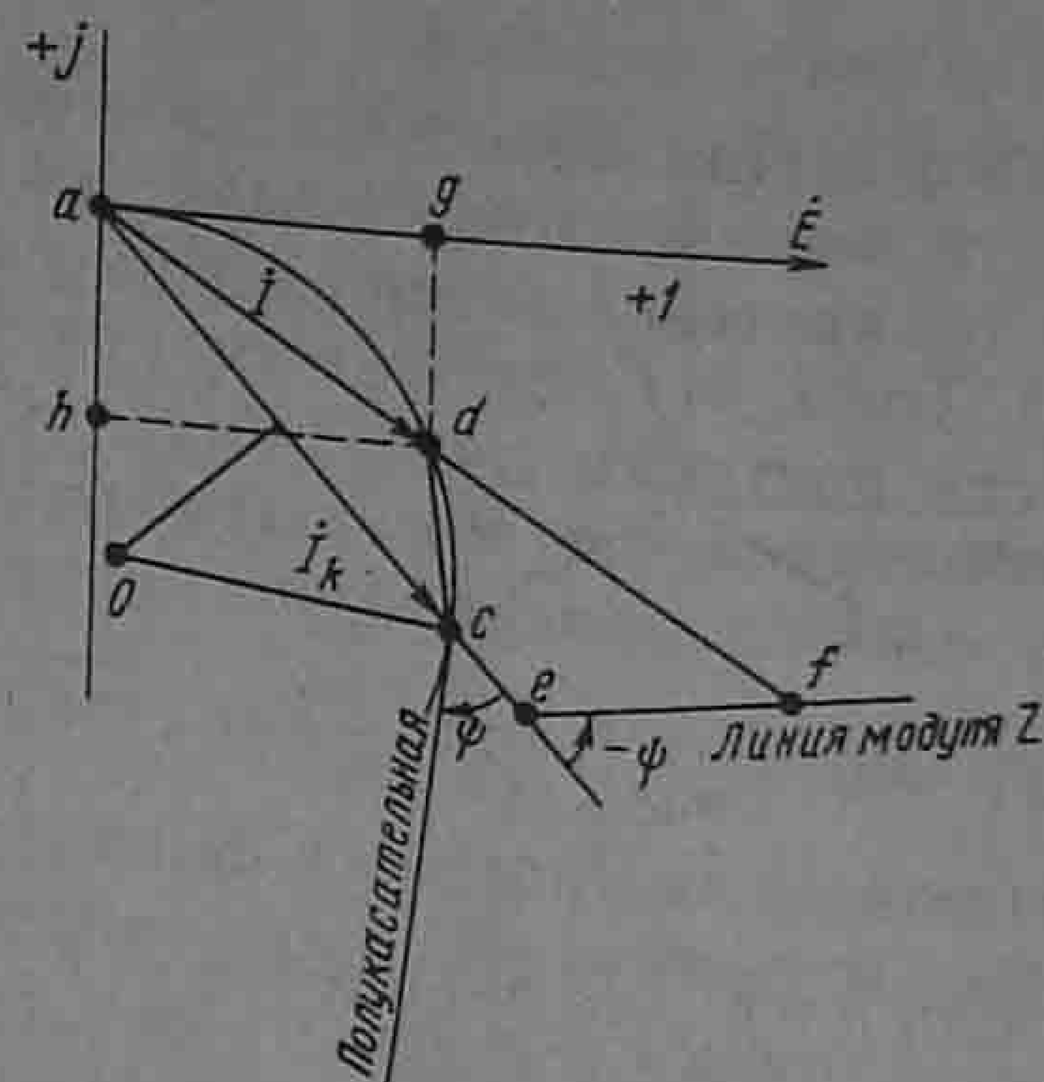



Рис. 4.19

ской цепи те же функции, что и вектор $\vec{G}$ в уравнении (4.31в), является окружность.

Под круговой диаграммой тока или напряжения понимают дугу окружности, являющуюся геометрическим местом концов вектора тока (напряжения) при изменении по модулю какого-либо сопротивления электрической цепи и сохранении неизменными остальных сопротивлений, частоты и ЭДС источников энергии.

С помощью круговых диаграмм производят графический анализ работы электрических цепей.

**§ 4.21. Круговая диаграмма тока двух последовательно соединенных сопротивлений.** Пусть к источнику ЭДС подключены последовательно $Z_1 = z_1e^{j\varphi_1}$ и $Z = ze^{j\varphi}$ (рис. 4.18). Сопротивление $Z_1$ неизменно, а $Z$ может меняться лишь по модулю, так что угол $\varphi$ остается постоянным. Ток в цепи

$$\dot{I} = \frac{\dot{E}}{Z_1 + Z} = \frac{\dot{E}/Z_1}{1 + \frac{z}{z_1}e^{j(\varphi - \varphi_1)}}, \quad (4.32а)$$

где $\dot{E}/Z_1 = \dot{I}_k$ — ток в цепи при коротком замыкании сопротивления $Z$.

Обозначим $\varphi - \varphi_1 = \psi$. Тогда

$$\dot{I} = \frac{\dot{I}_k}{1 + \frac{z}{z_1}e^{j\psi}}. \quad (4.32б)$$

Уравнение (4.32б) тождественно (4.31в). Роль вектора $\vec{F}$ выполняет комплекс $\dot{I}_k$; роль коэффициента $k$ — отношение $z/z_1$; роль $\vec{G}$ —

6 Зак. 683

вектор $\dot I$. При изменении $z$ вектор $\dot I$ будет скользить по дуге окружности, хордой которого является $\dot I_k$.

На круговой диаграмме рис. 4.19 вектор ЭДС направлен по оси +1. Ток $\dot I_k = \dot E/z_1 e^{j\varphi_1}$ отстает от ЭДС $E$ на угол $\varphi_1$. Для определенности построим диаграмму при $\psi < 0$. Выберем масштаб токов: пусть отрезок $ac$ в масштабе $m_I$ выражает собой модуль тока $I_k$. Отрезок $da$ характеризует модуль тока $I$, отрезок $da$ в соответствии с уравнением (4.32б) — модуль произведения $\dot I \dfrac{z}{z_1} e^{j\psi}$. Отложим по направлению $\dot I_k$ отрезок $ae$ в произвольном масштабе $m_z$, выражающий модуль постоянного сопротивления $z_1 (z_1 = aem_z)$.

Из точки $e$ под углом $-\psi$ к линии $ae$ проводим прямую $ef$, которая является (как будет показано далее) линией модуля переменного сопротивления $z$ при отсчете от точки $e$. На ней в масштабе $m_z$ нанесем деления для измерения $z$.

Из подобия треугольников $adc$ и $aef$ следует

$$\frac{ad}{dc} = \frac{ae}{ef},\ ef = ae\frac{dc}{ad} = \frac{z_1}{m_z}\frac{I\dfrac{z}{z_1}}{I} = \frac{z}{m_z},$$

или

$$z = efm_z.$$

Следовательно, отрезок $ef$ в масштабе $m_z$ определяет модуль переменного сопротивления $z$.

Проекция $\dot I$ на направление $\dot E$ (отрезок $ag$) в масштабе $m_P = Em_I$ измеряет активную мощность:

$$P = agm_P = agEm_I = agE(I/ad) = EI\cos\varphi,$$

$$m_I = I/ad;\ ag/ad = \cos\varphi.$$

Проекция $\dot I$ на направление, перпендикулярное $\dot E$ (отрезок $ah$), в масштабе $m_P$ определяет реактивную мощность:

$$Q = ahm_P = ahE(I/ad) = EI\sin\varphi.$$

## § 4.22. Круговая диаграмма напряжения двух последовательно соединенных сопротивлений.

**§ 4.22. Круговая диаграмма напряжения двух последовательно соединенных сопротивлений.** Умножив обе части уравнения (4.32б) на $Z_1 = z_1 e^{j\varphi_1}$ и учтя, что $\dot I Z_1 = \dot U_{z1}$, получим

$$\dot U_{z1} = \frac{\dot E}{1 + \dfrac{z}{z_1} e^{j(\varphi - \varphi_1)}}. \quad (4.33)$$

Уравнение (4.33) свидетельствует о том, что геометрическим местом концов вектора $\dot U_{z1}$ является дуга окружности, хордой которой $\dot E$.



**§ 4.23. Круговая диаграмма тока активного двухполюсника.** Ток в цепи нагрузки $Z_н = z_н e^{j\varphi_н}$ активного двухполюсника (см. рис. 3.30, $a$)

$$\dot I_н = \frac{\dot U_{abx}}{Z_{вх} + Z_н} = \frac{\dot U_{abx}/Z_{вх}}{1 + \dfrac{z_н}{z_{вх}} e^{j(\varphi_н - \varphi_{вх})}}, \quad (4.34)$$

где $Z_{вх} = z_{вх} e^{j\varphi_{вх}}$ — комплексное входное сопротивление двухполюсника по отношению к зажимам $ab$ выделенной ветви.

Из уравнения (4.34) следует, что при изменении модуля сопротивления нагрузки $z_н$ ток $I_н$ скользит по дуге окружности.

**Пример 53.** В схеме рис. 4.19 $E = 120$ В; $Z_1 = R_1 = 24$ Ом; сопротивление $Z$ — чисто емкостное и модуль его изменяется от 0 до ∞. Построить круговые диаграммы тока и напряжения на сопротивлении $Z_1$.

Р е ш е н и е. Ток $\dot I_k = 120/24 = 5$ А. Выберем масштаб для токов ($m_I = 1{,}39$ А/см) и напряжений ($m_U = 26$ В/см).

Найдем угол $\psi = \varphi - \varphi_1 = -90° - 0° = -90°$.

На рис. 4.20 построены круговая диаграмма тока на токе $\dot I_k$ как на диаметре и круговая диаграмма напряжения на ЭДС $\dot E$, как на диаметре. Масштаб для сопротивлений $m_z = 13$ Ом/см. Для любого значения сопротивления $z$ по диаграмме находим ток $I$ и напряжение $U_{z1}$. Так, при $z = 9{,}5$ Ом $I = 4{,}65$ А, $U_{z1} = 111{,}5$ В.

**Пример 54.** Построить геометрическое место концов вектора тока $\dot I$ неразветвленной части схемы рис. 4.21 и графически исследовать возможность возникновения резонансных режимов при следующих данных: $\dot E = 30$ В; $R_2 = 6$ Ом; $X_C = 8$ Ом; $R_1 = 3$ Ом; $X_L$ изменяется от 0 до ∞.

Р е ш е н и е. Ток $\dot I_2$ в схеме остается неизменным: $\dot I_2 = 30/(6 - j8) \doteq 3e^{j53°10'}$ А. Он на 53°10′ опережает ЭДС $\dot E$ (рис. 4.22). Вектор тока $\dot I_1$ при изменении $X_L$ меняется так, что конец его скользит по дуге окружности, диаметром которой является вектор тока: $\dot I_{1k} = \dot E/R_1 = 10$ А. $m_I = 2{,}65$ А/см. Ток в неразветвленной части схемы $\dot I = \dot I_1 + \dot I_2$. Геометрическим местом его является также дуга окружности $a12b$. В режимах, соответствующих точкам $1$ и $2$, ток $\dot I$ совпадает по фазе с ЭДС $E$. Следовательно, в этих режимах в схеме имеет место резонанс токов.

Выберем масштаб сопротивлений $m_z = 2$ Ом/см. Графически найдем $X_L$ для точек $1$ и $2$. Для точки $2$ $X_L \approx 0{,}8$ Ом, для точки $1$ $X_L \approx 10{,}6$ Ом. При этом ток $I = 11{,}1$ и 2,4 А.

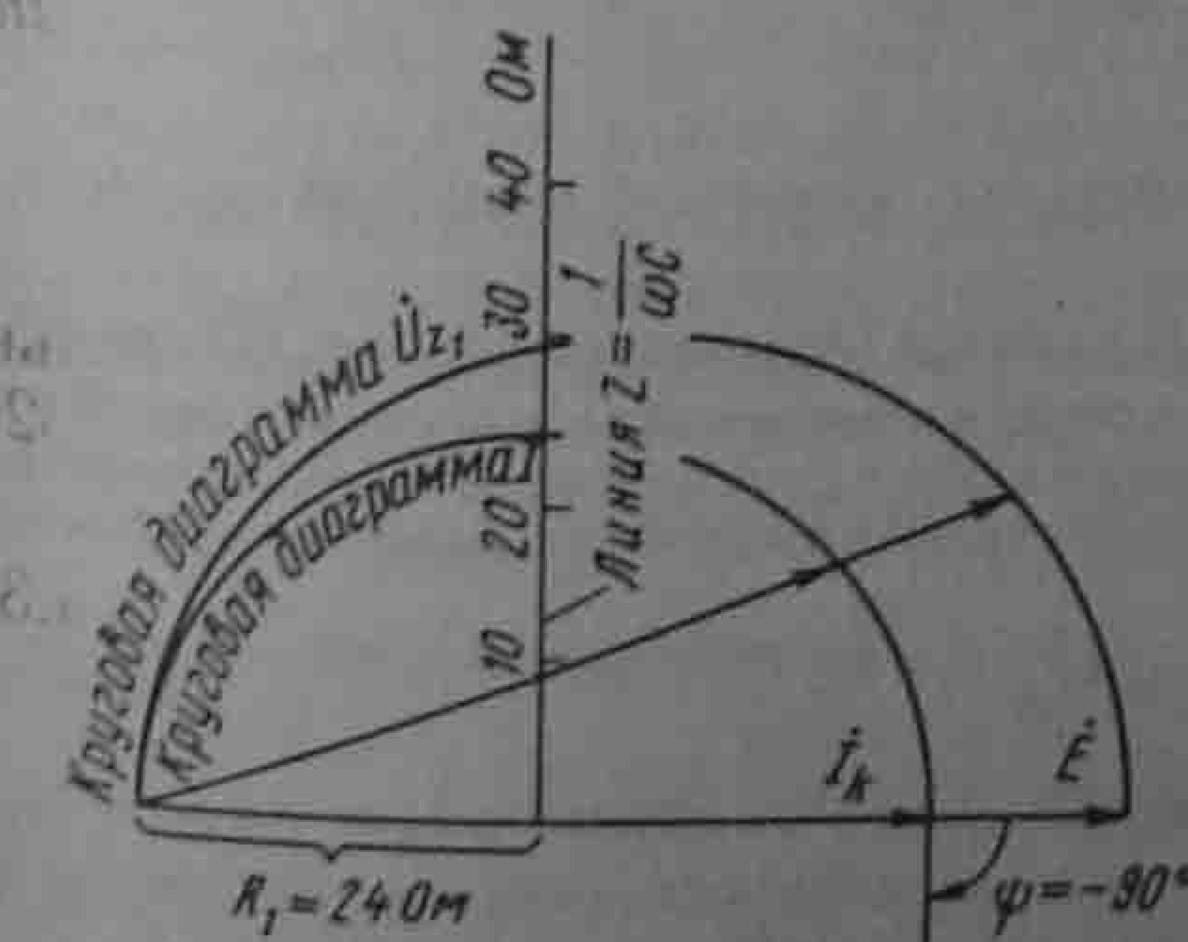



Рис. 4.20

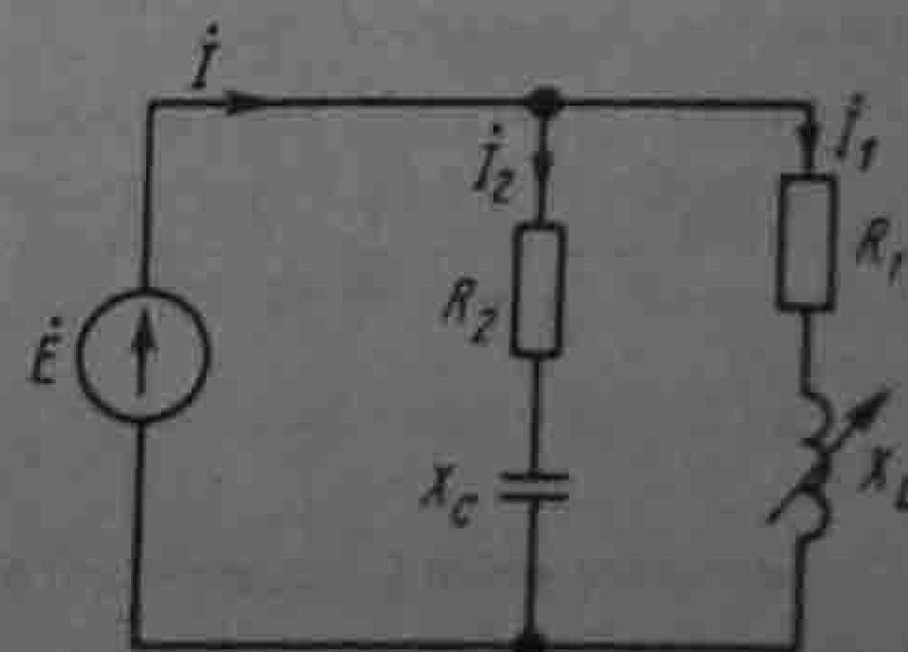



Рис. 4.21

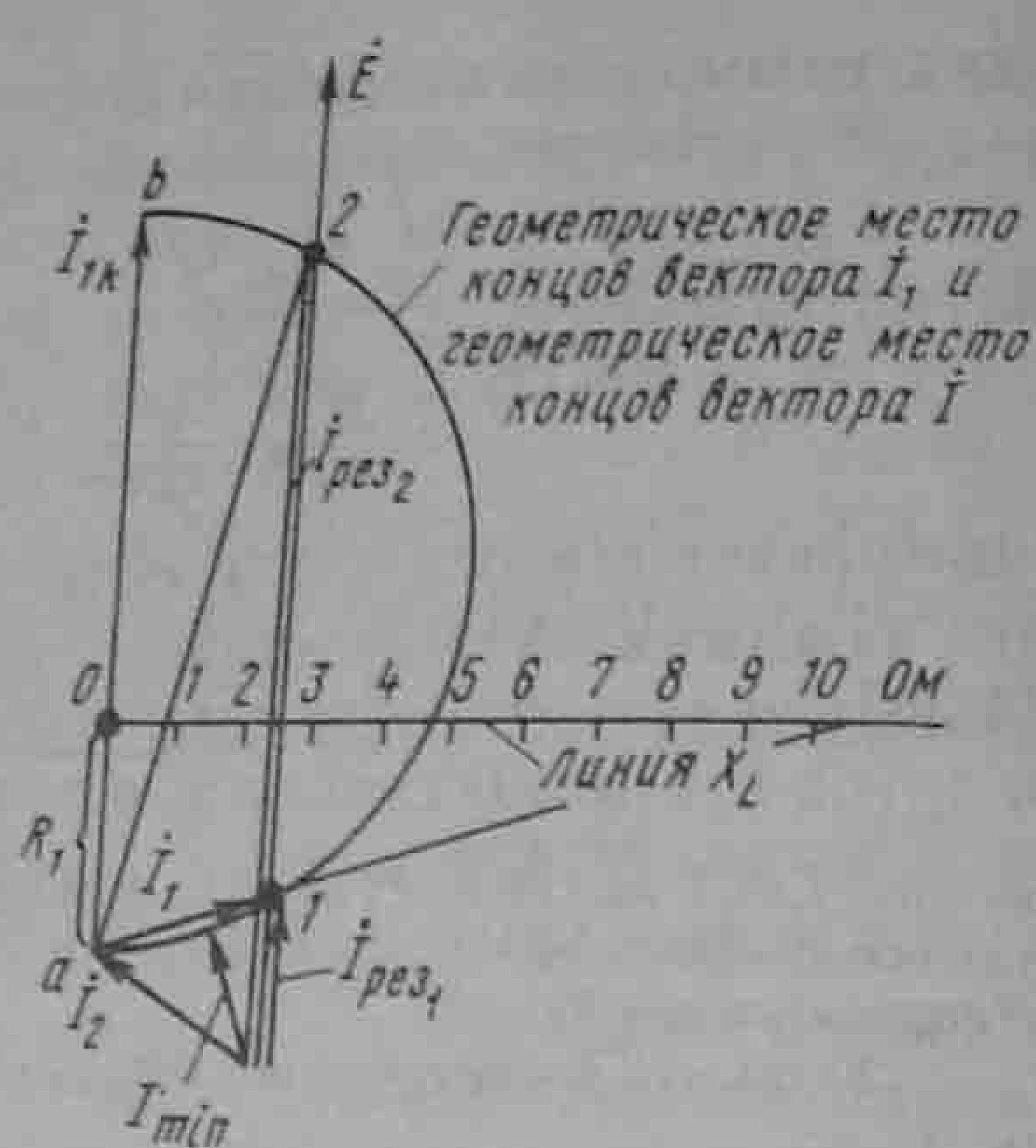



Рис. 4.22

**§ 4.24. Круговая диаграмма напряжения четырехполюсника.** Пусть напряжение четырехполюсника рис. 4.2, *а* неизменно по модулю, фазе и частоте, а нагрузка $Z_2 = z_2 e^{j\varphi_2}$ на выходе его изменяется только по модулю, так что характеризующий ее угол $\varphi_2$ остается постоянным. В этом случае для тока $\dot I_2$, напряжения $\dot U_2$, тока $\dot I_1$ могут быть построены круговые диаграммы. Сначала рассмотрим круговую диаграмму тока $\dot I_2$. С этой целью схему четырехполюсника рис. 4.2, *а*, исключая нагрузку $Z_2$, заменим активным двухполюсником и по методу эквивалентного генератора найдем ток $\dot I_2$ в ветви *pq*:

$$\dot I_2 = \dot U_{pq\,x}/(Z_{вх\,pq} + Z_2), \tag{4.35}$$

где $\dot U_{pq\,x}$ — напряжение между точками *p* и *q* при размыкании ветви *pq*; $Z_{вх\,pq} = Z_{2к} e^{j\varphi_{2к}}$ — входное сопротивление по отношению к зажимам *pq* при короткозамкнутых зажимах *mn* (в схеме рис. 4.2, *а* к зажимам *mn* присоединен источник ЭДС). Разделив числитель и знаменатель правой части (4.35) на $Z_{вх\,pq} = Z_{2к}$ и учтя, что $\dot U_{pq\,x}/Z_{2к} = \dot I_{2к}$, где $\dot I_{2к}$ — ток короткозамкнутой ветви *pq*, получим

$$\dot I_2 = \frac{\dot I_{2к}}{1 + \frac{z_2}{z_{2к}} e^{j(\varphi_2 - \varphi_{2к})}}. \tag{4.35а}$$

Из уравнения (4.35а) следует, что вектор тока $\dot I_2$ скользит по дуге окружности, хордой которой является ток $\dot I_{2к}$.

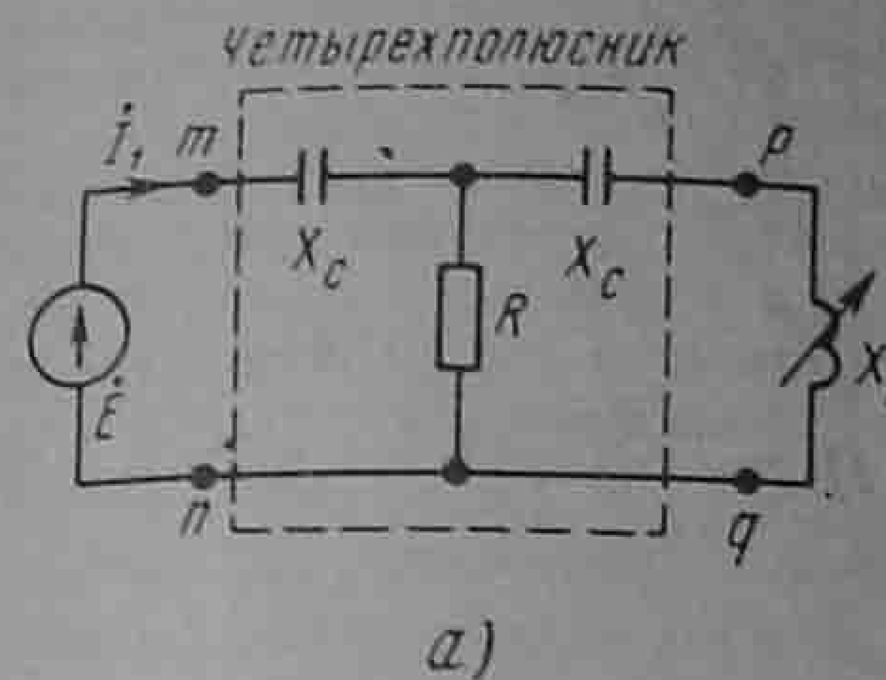
Построим круговую диаграмму тока $\dot I_1$ на входе четырехполюсника. Из предыдущего [см. формулу (2.14)] известно, что при изменении сопротивления в одной из ветвей линейной электрической цепи два тока в любых двух ветвях этой цепи связаны соотношением $\dot I_m = a + b\dot I_n$. Следовательно, ток $\dot I_1$ может быть линейно выражен через ток $\dot I_2$:

$$\dot I_1 = a + b\dot I_2. \tag{4.36}$$

Определим коэффициенты *a* и *b*. Если ветвь *pq* разомкнута, то $\dot I_2 = 0$ и $\dot I_1 = \dot I_{1x}$. При этом из (4.36) найдем $a = \dot I_{1x}$. Если ветвь *pq* короткозамкнутая, то $\dot I_2 = \dot I_{2к}$ и $\dot I_1 = \dot I_{1к}$. Поэтому

$$\dot I_{1к} = \dot I_{1x} + b\dot I_{2к}. \tag{4.37}$$





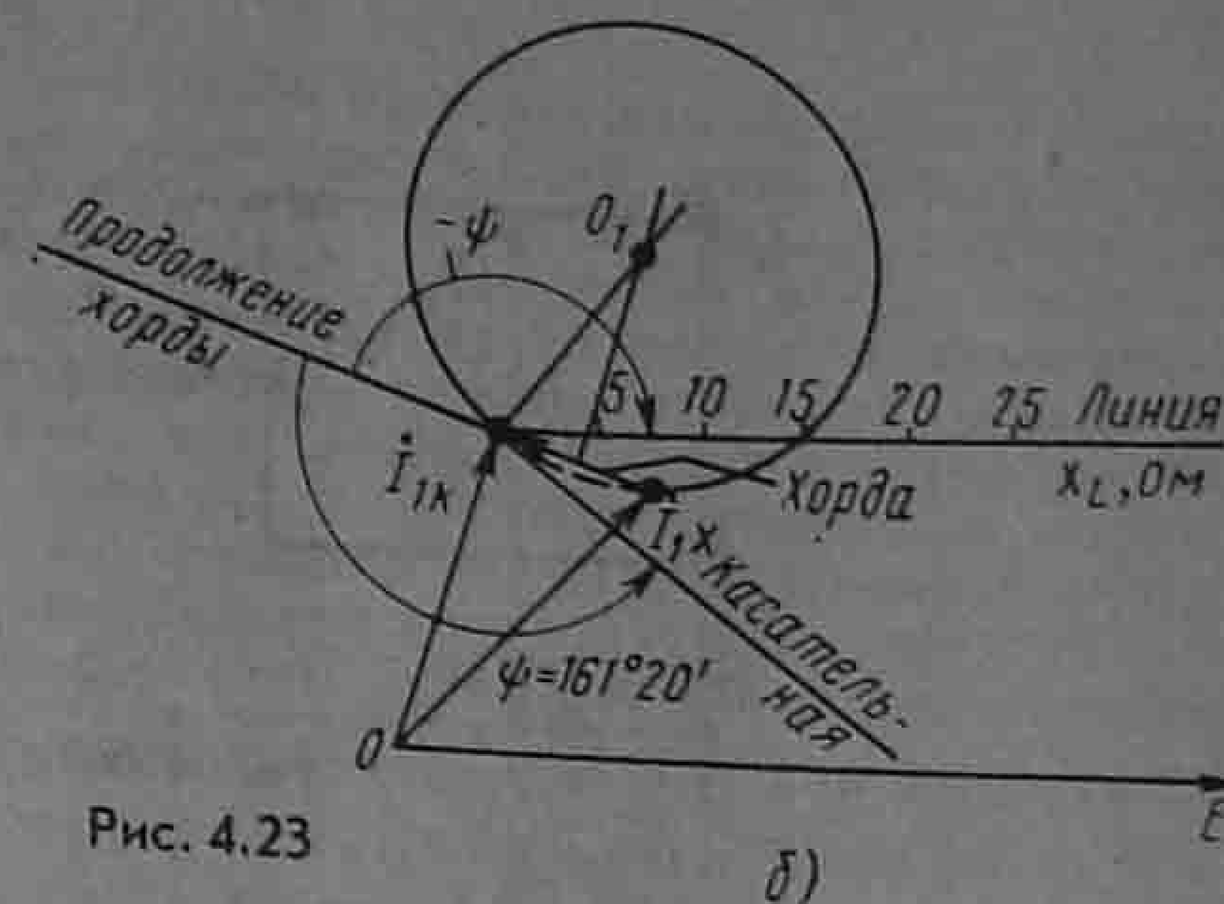




Рис. 4.23

Отсюда

$$b = (\dot I_{1к} - \dot I_{1x})/\dot I_{2к}. \tag{4.38}$$

Подставив (4.37) и (4.38) в (4.36), получим

$$\dot I_1 = \dot I_{1x} + \frac{\dot I_{1к} - \dot I_{1x}}{1 + \frac{z_2}{z_{2к}} e^{j(\varphi_2 - \varphi_{2к})}}. \tag{4.39}$$

Уравнение (4.39) свидетельствует о том, что геометрическим местом концов вектора тока $\dot I_1$ также является дуга окружности. Хордой ее является разность $\dot I_{1к} - \dot I_{1x}$; вектор $\dot I_{1x}$ смещает начало отсчета.

Аналогичным образом строят круговую диаграмму напряжения. Так, если в какой-то схеме изменяется по модулю сопротивление $Z_2 = z_2 e^{j\varphi_2}$ в одной, например второй ветви, то для напряжения на участке *ab* этой схемы можно записать выражение, аналогичное (4.39):

$$\dot U_{ab} = \dot U_{ab\,x} + \frac{\dot U_{ab\,к} - \dot U_{ab\,x}}{1 + \frac{z_2}{z_{2к}} e^{j(\varphi_2 - \varphi_{2к})}}, \tag{4.40}$$

где $\dot U_{ab\,x}$ — напряжение на зажимах *ab* при $z_2 = \infty$; $\dot U_{ab\,к}$ — напряжение на зажимах *ab* при $z_2 = 0$; $Z_{2к} = z_{2к} e^{j\varphi_{2к}}$ — выходное сопротивление схемы относительно зажимов, к которым присоединено сопротивление $Z_2$.

Формула (4.40) выведена на основании выражения $\dot U_{ab} = a_1 + b_1\dot I_2$ и (4.35).

**Пример 55.** Построить круговую диаграмму тока $\dot I_1$ схемы рис. 4.23, *а*, в которой $X_C = 5$ Ом; $R = 5$ Ом; $\dot E = 100$ В. Нагрузкой четырехполюсника является индуктивное сопротивление $X_L$, которое может изменяться от 0 до ∞.

Р е ш е н и е. Найдем ток холостого хода при разомкнутой выходной ветви:

$$\dot I_{1x} = \dot E/(R - jX_C) = 100/(5 - j5) = 14{,}15 e^{j45°}\ \text{А}.$$

Определим ток короткого замыкания при коротком замыкании нагрузки:

$$\dot I_{1к} = \frac{\dot E}{-jX_C + \frac{R(-jX_C)}{R - jX_C}} = 12{,}82 e^{j71°20'}\ \text{А}.$$

Рассчитаем входное сопротивление $Z_{2к}$ со стороны зажимов *pq* при коротком

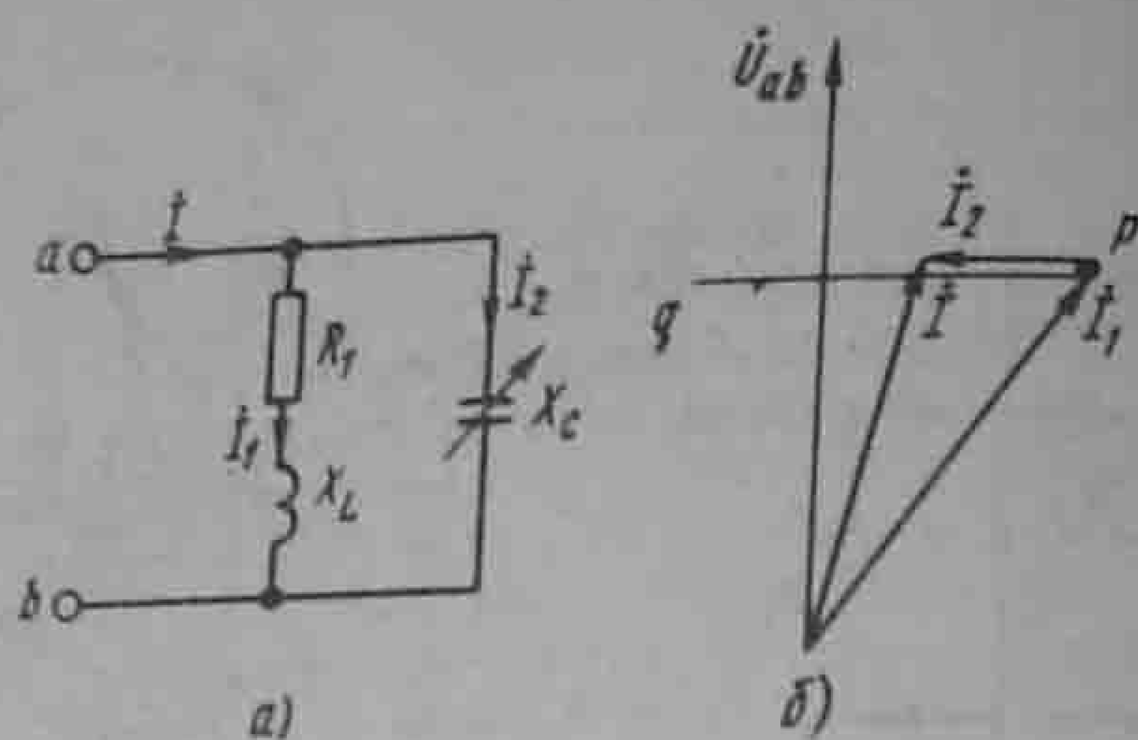



Рис. 4.24

замыкании зажимов $mn$:

$$Z_{2к} = z_{2к}e^{j\varphi_{2к}} = -jX_C + \frac{R(-jX_C)}{R - jX_C} = 7{,}8e^{-j71°20'}\ \text{Ом}.$$

Следовательно, $\varphi_{2к} = -71°20'$. Угол $\psi = \varphi_2 - \varphi_{2к} = 90° - (-71°20') = 161°20'$.

Круговая диаграмма тока $\dot I_1$ построена на рис. 4.23, *б*. Хордой окружности является разность $\dot I_{1к} - \dot I_{1х}$. Угол $\psi > 0$, поэтому для определения положения касательной он отложен от продолжения хорды против часовой стрелки. Диаграмма носит несколько необычный характер: рабочая часть дуги занимает почти целую окружность.

Для определения положения конца вектора $\dot I_1$ из конца вектора $\dot I_{1х}$ через точку на линии $X_L$, соответствующую заданному значению $X_L$, проводят прямую до пересечения с рабочей частью дуги окружности. При $X_L = 5$ Ом ток $\dot I_1$ опережает ЭДС $\dot E$ на 90°.

**§ 4.25. Линейные диаграммы.** Под линейными диаграммами понимают диаграммы, в которых геометрическим местом концов вектора тока (напряжения) является прямая линия. По существу, линейная диаграмма является частным случаем круговой, поскольку прямая есть дуга окружности с бесконечно большим радиусом.

**Пример 56.** Построить геометрическое место концов вектора тока в схеме рис. 4.24, *а* при изменении $X_C$. Напряжение $\dot U_{ab} = \text{const}$, $R_1$ и $X_L$ неизменны.

Решение. На рис. 4.24, *б* изображаем вектор $\dot U_{ab}$. Вектор тока $\dot I_1$ отстает от него на угол $\varphi = \text{arctg}\, X_L/R_1$.

Ток $\dot I_2$ опережает $\dot U_{ab}$ на 90°. Геометрическим местом концов вектора тока $\dot I = \dot I_1 + \dot I_2$ будет прямая линия $pq$. Она и является линейной диаграммой тока $\dot I$.

### Вопросы для самопроверки

1. Запишите шесть форм записи уравнений четырехполюсника, покажите для них положительные направления отсчета токов и напряжений и поясните, в каких случаях каждая форма записи имеет преимущества перед остальными. **2.** Какие четырехполюсники называют взаимными, невзаимными, симметричными и несимметричными? **3.** Как опытным путем определить коэффициенты *A*-, *Z*-, *Y*-, *H*-, *G*-, *B*-форм записи? **4.** Каким образом, зная коэффициенты одной формы записи, определить коэффициенты другой формы? **5.** Прокомментируйте схемы замещения пассивных четырехполюсников. **6.** Какое соединение четырехполюсников называют регулярным? **7.** Что понимают под $Z_{C1}$ и $Z_{C2}$ несимметричного четырехполюсника и как их определить через коэффициенты *A*, *B*, *C*, *D* и через входные сопротивления? **8.** Что понимают под повторным сопротивлением четырехполюсника? **9.** Запишите уравнения для симметричного четырехполюсника через гиперболические функции. **10.** Запишите уравнения для несимметричного четырехполюсника через гиперболические



функции. **11.** Что понимают под постоянной передачи симметричного и под мерой передачи несимметричного четырехполюсников? **12.** В каких единицах измеряют затухание? Как эти единицы связаны между собой? **13.** Охарактеризуйте свойства конвертора, инвертора и гиратора. **14.** Дайте характеристику операционному усилителю как элементу электрической цепи. **15.** Каким расчетным схемным эквивалентом может быть замещен ОУ? **16.** Охарактеризуйте свойства управляемых источников напряжения и тока. **17.** Покажите, что схема рис. 4.11 может выполнять функции гиратора. **18.** Поясните, почему схема рис. 4.13 может выполнять функции ИТУТ, схема рис. 4.14, *а* — функции ИНУТ, схема рис. 4.14, *б* — функции ИТУН, а схема рис. 4.14, *в* — функции конвертора отрицательного сопротивления. **19.** В схеме рис. 4.10 $Z_2 = Z_4 = Z_5 = R$. Какими следует взять $Z_1 = Z_3$, чтобы входное сопротивление схемы $Z_{AB}$ было отрицательным, чисто резистивным и пропорциональным $1/\omega^2$? **20.** Каким следует взять сопротивление $Z_2 = Z_4$ в схеме рис. 4.10 ($Z_1 = Z_3 = Z_5 = R$), чтобы входное сопротивление схемы $Z_{AB}$ было отрицательным, чисто резистивным и пропорциональным $\omega^2$? **21.** Какой четырехполюсник называют активным автономным и какой активным неавтономным? **22.** Запишите систему уравнений многополюсника в *Y*-форме и поясните, как определить его $Y_{kk}$ и $Y_{pr}$ параметры. **23.** Дайте определения активного автономного и активного неавтономного многополюсника. **24.** Запишите уравнение дуги окружности в векторной форме и поясните его. **25.** Сформулируйте условия, при которых можно строить круговую диаграмму. В чем преимущества исследований цепей с помощью круговых диаграмм? **26.** Поясните последовательность построения круговой диаграммы двухполюсника и четырехполюсника. **27.** Как определить рабочую часть дуги окружности? **28.** Как определить масштаб на линии переменного сопротивления? **29.** При каком условии круговая диаграмма переходит в линейную? **30.** Решите задачи 6,4; 6,9; 6,13; 6,23; 6,35; 6,38.

## Глава пятая

# ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ФИЛЬТРЫ

**§ 5.1. Назначение и типы фильтров.** Под *электрическими фильтрами* понимают четырехполюсники, включаемые между источником питания и приемником (нагрузкой), назначение которых состоит в том, чтобы беспрепятственно (без затухания) пропускать к приемнику токи одних частот и задерживать или пропускать, но с большим затуханием, токи других частот.

Диапазон частот, пропускаемых фильтром без затухания, называют *полосой прозрачности;* диапазон частот, пропускаемых с затуханием, — *полосой затухания.*

Электрические фильтры собирают обычно из индуктивных катушек и конденсаторов. Исключение составляют RC-фильтры (см. § 5.6 — 5.9). Фильтры используют главным образом в радиотехнике и технике связи, где применяют токи довольно высоких частот.

При высоких частотах индуктивные сопротивления $\omega L$ индуктивных катушек во много раз больше их активных сопротивлений. Поэтому будем полагать, что активные сопротивления индуктивных катушек и активная проводимость конденсаторов равны нулю, т. е. что фильтры составлены только из идеальных реактивных элементов.

Фильтры обычно собирают по симметричной Т- или П-схеме (см. рис. 4.4, *а*, *б*), т. е. при $Z_2 = Z_1$ и $Z_6 = Z_5$.

При изучении фильтров будем пользоваться понятием коэффициента затухания и коэффициента фазы (см. § 4.10).

Условимся сопротивление $Z_1$ в схеме рис. 4.4, *а* и сопротивление $Z_4$ в схеме рис. 4.4, *б* называть продольными, а сопротивление $Z_3$ в схеме рис. 4.4, *а* и сопротивление $Z_5$ в схеме рис. 4.4, *б* — поперечными.

Фильтры, в которых произведение продольного сопротивления на соответствующее поперечное сопротивление представляет собой некоторое постоянное для данного фильтра число (число $k$), не зависящее от частоты, принято называть *k-фильтрами.*

Сопротивление нагрузки $Z_н$, присоединяемой на выходе фильтра, должно быть согласовано с характеристическим сопротивлением фильтра $Z_c$ ($Z_н = Z_c$). Входное сопротивление $k$-фильтра при этом также равно $Z_c$. В $k$-фильтрах $Z_c$ существенно изменяется в зависимости от частоты $\omega$, находящейся в полосе прозрачности. Это обстоятельство вызывает необходимость изменять сопротивление нагрузки в функции частоты (особенно при приближении к границе полосы прозрачности), что нежелательно. В $m$-фильтрах при определенных значениях коэффициента $m$ сопротивление $Z_c$ мало изменяется от частоты (в пределах полосы прозрачности) и поэтому нагрузка практически может быть одна и та же по модулю для различных $\omega$, находящихся в этих пределах.

Качество фильтра тем выше, чем более резко выражены его фильтрующие свойства, т. е. чем более резко возрастает затухание в полосе затухания.

Фильтрующие свойства четырехполюсников обусловлены возникновением в них резонансных режимов — резонансов токов или резонансов напряжений.

**§ 5.2. Основы теории *k*-фильтров.** Из § 4.10 известно, что если нагрузка $Z_н$ согласована с характеристическим сопротивлением $Z_c$ четырехполюсника, то напряжение $\dot U_2$ и ток в нагрузке $\dot I_2$ связаны с напряжением $\dot U_1$ и током $\dot I_1$ на входе четырехполюсника следующими соотношениями:

$$\dot U_2 = \dot U_1 e^{-g}, \quad \dot I_2 = \dot I_1 e^{-g},$$

где $g = \ln(A + \sqrt{BC}) = a + jb$.

Тогда

$$\dot U_2 = \dot U_1 e^{-a} e^{-jb}, \quad \dot I_2 = \dot I_1 e^{-a} e^{-jb}.$$

Множитель $e^{-a}$ определяет, во сколько раз модуль напряжения (тока) на выходе фильтра меньше модуля напряжения (тока) на его входе.

Если $a = 0$, то $e^{-a} = e^0 = 1$ и фильтр пропускает колебания без затухания. Таким образом, в полосе прозрачности $a = 0$.



В полосе затухания $a > 0$. Множитель $e^{-jb}$, по модулю равный 1, свидетельствует о том, что напряжение $\dot U_2$ и ток $\dot I_2$ отстают соответственно от $\dot U_1$ и $\dot I_1$ на угол $b$.

Фильтрующие свойства четырехполюсника рассмотрим путем сравнения выражения для коэффициента $A$ четырехполюсника с равным ему выражением гиперболического косинуса от аргумента $a + jb$:

$$A = \mathrm{ch}(a + jb).$$

Гиперболический косинус от суммы двух аргументов (с учетом того, что $\mathrm{ch}\,jb = \cos b$ и $\mathrm{sh}\,jb = j\sin b$) можно представить следующим образом:

$$\mathrm{ch}(a + jb) = \mathrm{ch}\,a\,\cos b + j\,\mathrm{sh}\,a\,\sin b.$$

Для любого фильтра, собранного по Т-схеме (см. § 4.5), $A = 1 + (Z_1/Z_3)$.

Для фильтра, собранного по П-схеме (см. § 4.5), $A = 1 + (Z_4/Z_5)$. Из каких бы реактивных сопротивлений ни был собран фильтр, отношения $Z_1/Z_3$ в Т-схеме и $Z_4/Z_5$ в П-схеме всегда будут действительными (не мнимыми и не комплексными) числами— отношение двух мнимых чисел всегда есть число действительное. Следовательно, всегда будет действительным и коэффициент $A$. Но если коэффициент $A$ действителен, то действительным должно быть и выражение равного ему $\mathrm{ch}(a + jb)$:

$\mathrm{ch}(a + jb) = \mathrm{ch}\,a \cos b + j\,\mathrm{sh}\,a \sin b = A$.

Это выражение действительно, если

$$\mathrm{sh}\,a \sin b = 0. \qquad (5.1)$$

При этом

$$\mathrm{ch}\,a \cos b = A. \qquad (5.2)$$

Уравнения (5.1) и (5.2) используют для определения границ полосы прозрачности и характера изменения угла $b$ в этой полосе, а также характера изменения коэффициента затухания в полосе (полосах) затухания.

Равенство (5.1) для полосы прозрачности ($a = 0$) удовлетворяется, так как $\mathrm{sh}\,a = \mathrm{sh}\,0 = 0$. В силу того что $\mathrm{ch}\,0 = 1$, уравнение (5.2) для полосы прозрачности переходит в следующее:

$$\cos b = A. \qquad (5.3)$$

Круговой косинус ($\cos b$) может изменяться в пределах от $+1$ до $-1$. Поэтому крайние значения коэффициента $A$ [являющегося функцией частоты $-A(\omega)$] в полосе прозрачности равны $\pm 1$. Полоса прозрачности в общем случае лежит в диапазоне частот от $\omega_1$ до $\omega_2$. Значения $\omega_1$ и $\omega_2$ для фильтров НЧ и ВЧ (подробнее см. § 5.3)

определяют путем решения уравнений

$$A(\omega) = \pm 1. \quad (5.4)$$

Для полосовых и заграждающих фильтров (см. § 5.3) $\omega_1$ и $\omega_2$ находят как корни уравнения $A(\omega) = -1$.

Частоту, являющуюся граничной между полосой прозрачности и полосой затухания, называют *частотой среза*.

Характер изменения угла $b$ в функции от $\omega$ для полосы прозрачности определяют в соответствии с уравнением (5.3) следующим образом:

$$b = \arccos A(\omega). \quad (5.5)$$

Определим $a$ и $b$ для полосы затухания. В полосе затухания $a > 0$. Уравнение (5.1) удовлетворяется при условии

$$\sin b = 0, \quad (5.6)$$

т. е. при

$$b = 0 \quad (5.7)$$

и (или) при

$$b = \pm\pi. \quad (5.8)$$

Согласно уравнению (5.2), при $b = 0$

$$\mathrm{ch}\, a = A(\omega), \quad (5.9)$$

а при $b = \pm\pi$

$$\mathrm{ch}\, a = -A(\omega). \quad (5.10)$$

Уравнения (5.9) и (5.10) позволяют по значениям $A$ как функции $\omega$ рассчитать $\mathrm{ch}\, a$ в полосе затухания, а по $\mathrm{ch}\, a$ определить $a$ и, таким образом, построить кривую $a = f(\omega)$. Из уравнений (5.7) и (5.8) следует, что в полосе затухания напряжение $\dot{U}_2$ на выходе фильтра находится либо в фазе (при $b = 0$), либо в противофазе (при $b = \pm\pi$) с напряжением $\dot{U}_1$ на входе фильтра.

В заключение необходимо отметить два важных положения:

1) с изменением частоты $\omega$ меняются коэффициенты $B$ и $C$ четырехполюсника, поэтому изменяется и характеристическое сопротивление $Z_c = \sqrt{B/C}$. Для того чтобы фильтр работал на согласованную нагрузку (только в этом случае справедлива изложенная теория фильтров), при изменении частоты нужно менять и сопротивление нагрузки;

2) в полосе прозрачности характеристическое сопротивление $K$-фильтров (§ 5.3) активное, а в полосе затухания — чисто реактивное (индуктивное или емкостное).

Если нагрузка фильтра не чисто активная или не согласована с характеристическим сопротивлением фильтра, а также требуется



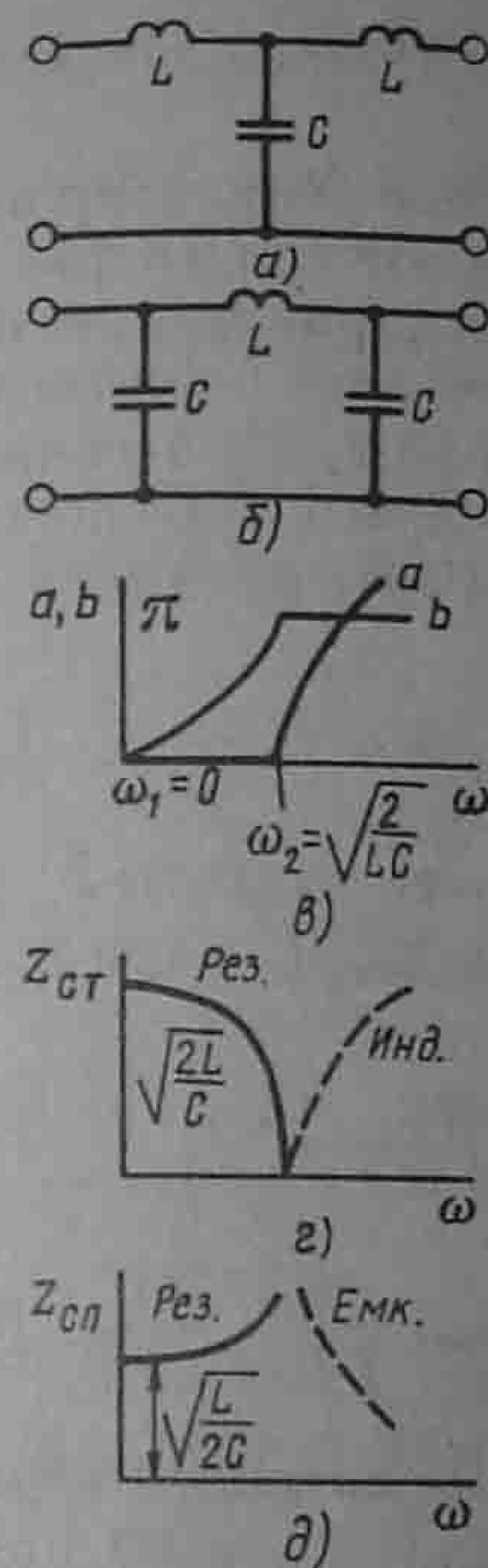



Рис. 5.1

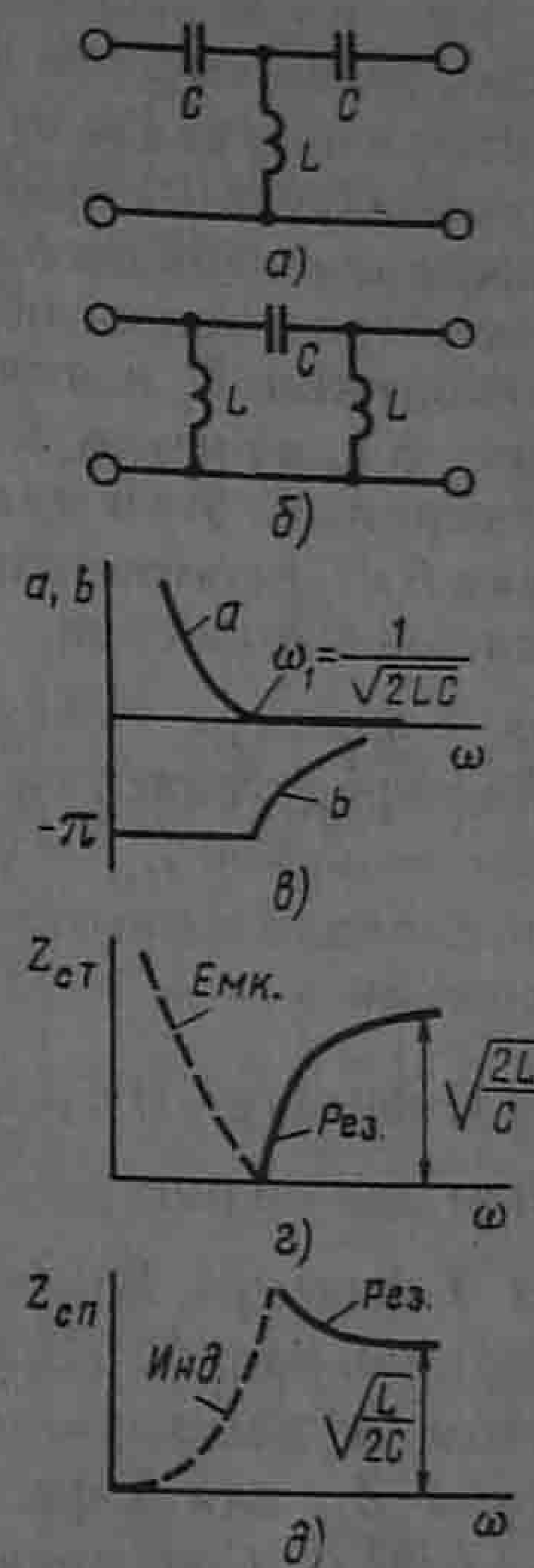



Рис. 5.2

учесть влияние активного сопротивления индуктивных катушек на работу фильтра (что существенно для низких частот), то для построения зависимости $U_1/U_2 = f(\omega)$ и зависимости сдвига фаз между $\dot{U}_1$ и $\dot{U}_2$ в функции частоты можно воспользоваться, например, методом пропорциональных величин (см. пример 57). Характеристическое сопротивление фильтра берут равным внутреннему сопротивлению источника сигнала (генератора). При этом и генератор и фильтр работают в режиме согласования.

**§ 5.3. *K*-фильтры НЧ и ВЧ, полосно-пропускающие и полосно-заграждающие *k*-фильтры.** *Фильтрами НЧ (ФНЧ)* называют фильтры, пропускающие в нагрузку лишь низкие частоты: с $\omega_1 = 0$ до $\omega_2$. Полоса их затухания находится в интервале от $\omega_2$ до $\infty$.

Схемы двух ФНЧ приведены на рис. 5.1, *а*, *б*. Характер изменения коэффициента затухания $a$ и коэффициента фазы $b$ качественно иллюстрируют кривые рис. 5.1, *в*.

Под *фильтром ВЧ (ФВЧ)* понимают фильтры, пропускающие в

нагрузку лишь высокие частоты: с $\omega_1$ до $\infty$. Полоса затухания их находится в интервале от 0 до $\omega_1$.

Схемы двух ФВЧ приведены на рис. 5.2, *а*, *б*. Характер изменения коэффициентов *a* и *b* для них иллюстрируют кривые рис. 5.2, *в*.

Рассмотрим вопрос об изменении модуля характеристического сопротивления $Z_c$ в полосе прозрачности для Т-фильтра НЧ (см. рис. 5.1, *а*) и для Т-фильтра ВЧ (рис. 5.2, *а*), а также для П-фильтров. С этой целью в выражение $Z_c = \sqrt{B/C}$ подставим значения *B* и *C* в соответствии с формулами (4.18) и проанализируем полученные выражения.

Для Т-фильтра НЧ (см. рис. 5.1, *а*) $Z_{cT} = \sqrt{\frac{2L}{C} - \omega^2 L^2}$. График $Z_{cT} = f(\omega)$ представлен на рис. 5.1, *г*.

При $\omega = \omega_1 = 0$ $Z_{cT} = \sqrt{2L/C}$. С увеличением частоты $Z_{cT}$ уменьшается, сначала мало отличаясь от значения $\sqrt{2L/C}$. При достижении значения $\omega = \omega_2 = \sqrt{2/LC}$ $Z_c = 0$.

Для П-фильтра НЧ (см. рис. 5.1, *б*) $Z_{cП} = \left(\frac{2C}{L} - \omega^2 C^2\right)^{-0,5}$. График $Z_{cП} = f(\omega)$ дан на рис. 5.1, *д*.

Для *Т*-фильтра ВЧ (см. рис. 5.2, *а*) $Z_{cT} = \sqrt{\frac{2L}{C} - \frac{1}{\omega^2 C^2}}$. График $Z_{cT} = f(\omega)$ дан на рис. 5.2, *г*.

В этом случае характер изменения $Z_{cT}$ отличен от характера изменения $Z_{cT}$ для Т-фильтра НЧ, а именно $Z_{cT} = 0$ при $\omega = \omega_1 = 1/\sqrt{2LC}$. С увеличением $\omega$ сопротивление $Z_{cT}$ увеличивается и при $\omega \to \infty$ $Z_{cT} = \sqrt{2L/C}$.

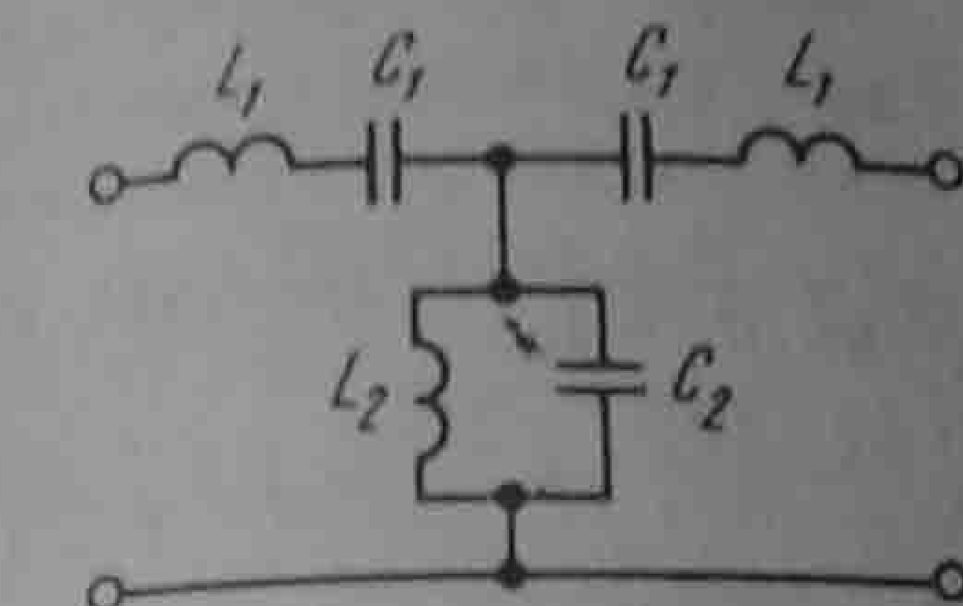
Для П-фильтра ВЧ (см. рис. 5.2, *б*) $Z_{cП} = \left(\frac{2C}{L} - \frac{1}{\omega^2 L^2}\right)^{-0,5}$. График $Z_{cП} = f(\omega)$ представлен на рис. 5.2, *д*.

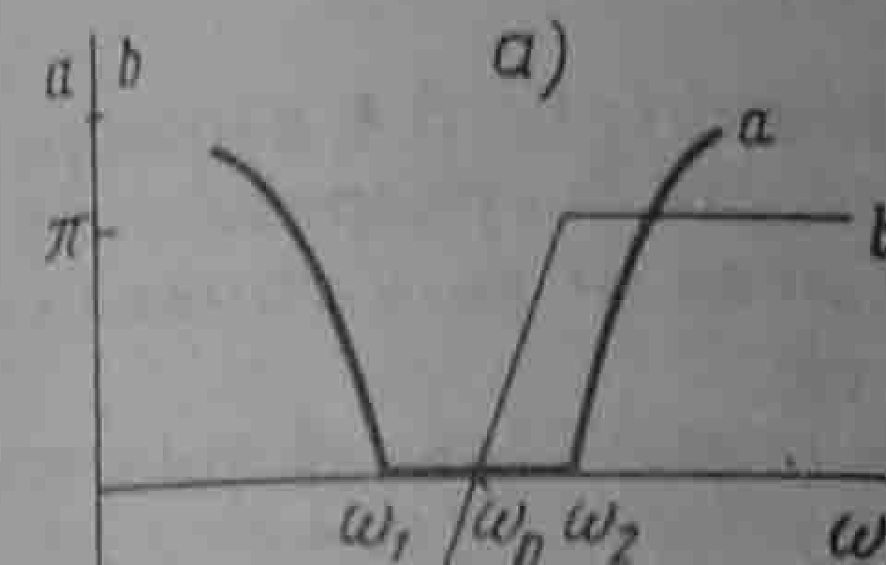
Если фильтр предназначен для работы на частотах, находящихся внутри полосы прозрачности данного фильтра и относительно далеко отстоящих от значения $\omega$, при котором $Z_c = 0$, то сопротивление нагрузки $Z_н$ на выходе фильтров НЧ выбирают равным $Z_c$, которое соответствует $\omega = \omega_1 = 0$. Для Т-фильтра НЧ (см. рис. 5.1, *а*) $Z_c = \sqrt{2L/C}$.

Для фильтров ВЧ обычно нагрузку согласовывают со значением $Z_c$ при $\omega \to \infty$. Для Т-фильтра НЧ (см. рис. 5.2, *а*) $Z_c = \sqrt{2L/C}$. В полосе (полосах) затухания $Z_c$ оказывается чисто реактивным для всех типов *k*-фильтров.

Для того чтобы выяснить, индуктивный или емкостный характер имеет $Z_c$ в полосе затухания, следует определить характер входного сопротивления этого фильтра (фильтр всегда работает в режиме согласованной нагрузки) для предельного режима, а именно для фильтров НЧ (рис. 5.1, *а*, *б*) при очень высокой частоте, а для фильтров ВЧ (рис. 5.2, *а*, *б*) при очень низкой частоте (теоретически





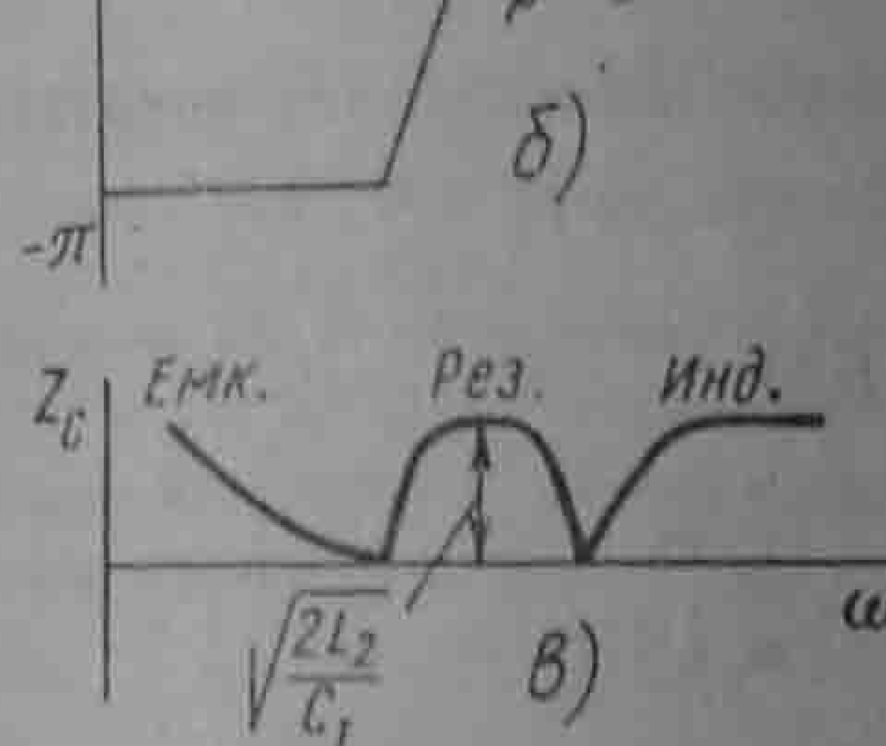
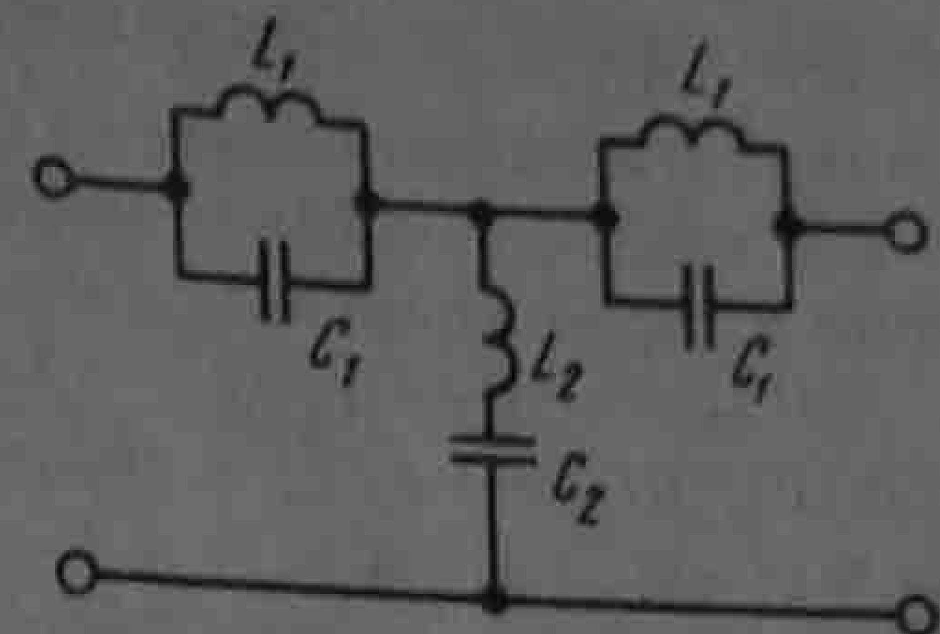
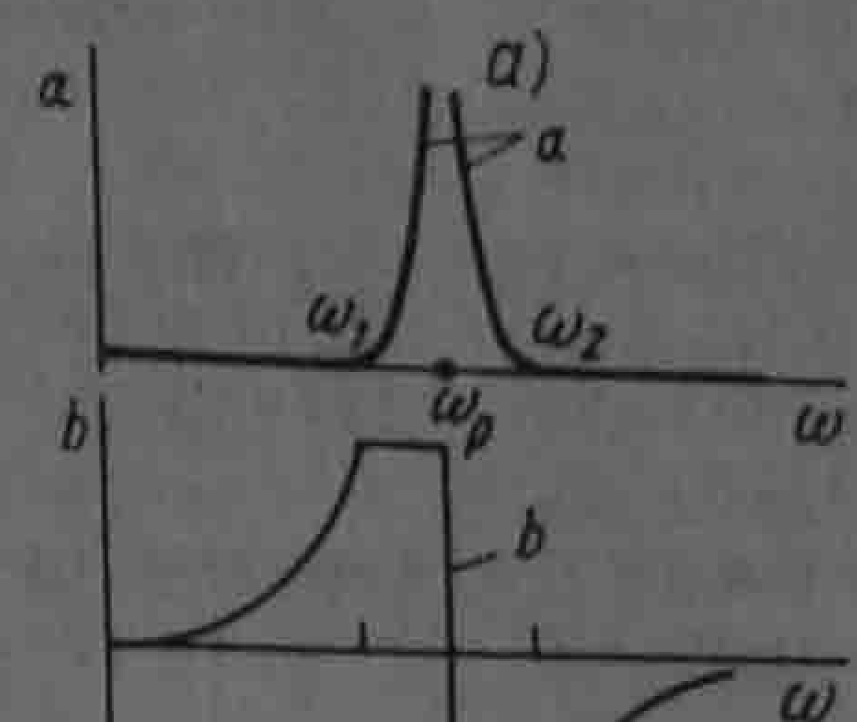




Рис. 5.3



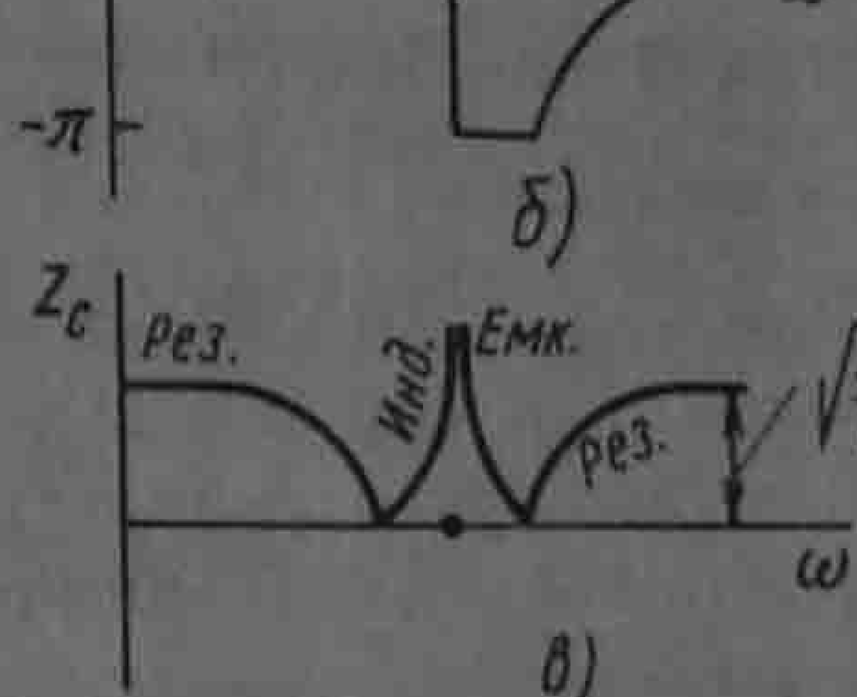




Рис. 5.4

при $\omega \to 0$), считая выходные зажимы схем закороченными. Тот же результат будет получен, если считать их разомкнутыми. В результате определим, что в зоне затухания $Z_c$ имеет индуктивный характер для Т-фильтра НЧ (рис. 5.1, *а*) и П-фильтра ВЧ (рис. 5.2, *б*) и емкостный характер для П-фильтра НЧ (см. рис. 5.1, *б*) и Т-фильтра ВЧ (рис. 5.2, *а*).

*Полосно-пропускающие фильтры представляют* собой фильтры, пропускающие в нагрузку лишь узкую полосу частот от $\omega_1$ до $\omega_2$. Слева от $\omega_1$ и справа от $\omega_2$ находятся полосы затухания. Схема простейшего полосно-пропускающего *k*-фильтра изображена на рис. 5.3, *а*. Параметры схемы должны удовлетворять условию $L_1 C_1 = L_2 C_2$.

Характер изменения *a* и *b* для полосно-пропускающего фильтра иллюстрируют кривые рис. 5.3, *б*.

Без вывода дадим формулы для определения параметров фильтра рис. 5.3, *а* по заданным частотам $f_1$ и $f_2$ и сопротивлению нагруз-

ки фильтра $Z_c$ при резонансной частоте $f_р = \omega_р / 2\pi$:

$$1)\ f_р = \sqrt{f_1 f_2};\quad 2)\ C_1 = \frac{f_2 - f_1}{2\pi f_1 f_2 Z_c};$$

$$3)\ L_1 = \frac{Z_c}{2\pi (f_2 - f_1)};\quad 4)\ C_2 = \frac{1}{\pi Z_c (f_2 - f_1)};$$

$$5)\ L_2 = \frac{Z_c (f_2 - f_1)}{4\pi f_1 f_2}.$$

*Под полосно-заграждающими фильтрами* (рис. 5.4, *а*) понимают фильтры, в которых полоса прозрачности как бы разрезана на две части полосой затухания (рис. 5.4, *б*). Слева от $\omega_1$ и справа от $\omega_2$ находятся две части полосы прозрачности.

В схеме простейшего заграждающего фильтра на рис. 5.4, *а* $L_1 C_1 = L_2 C_2$.

Обозначим $\omega_р = 1/\sqrt{L_1 C_1}$, $k = L_1/L_2$ и запишем формулы для определения $\omega_{1,2}$ и $Z_c$ фильтров рис. 5.3, *а*, рис. 5.4, *а*.

Для рис. 5.3, *а*

$$\omega_{1,2} = \frac{\omega_р}{\sqrt{2k}} (\sqrt{1 + 2k} \mp 1);$$

$$Z_c = \sqrt{\frac{2L_1}{C_1}} \sqrt{1 - \frac{k}{2} \left( \frac{\omega_р}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_р} \right)^2};$$

для рис. 5.4, *а*

$$\omega_{1,2} = 0{,}25 \omega_р (\sqrt{2k + 16} \pm \sqrt{2k});$$

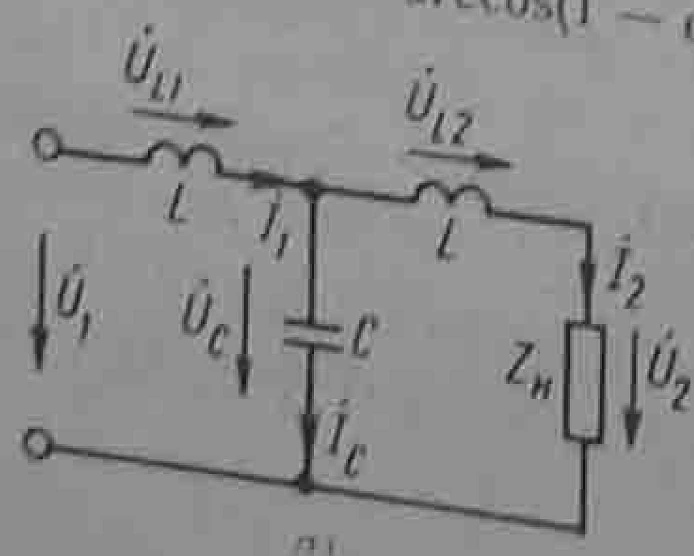
$$Z_c = \sqrt{\frac{2L_2}{C_2}} \sqrt{1 - \frac{0{,}5k}{\left( \frac{\omega_р}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_р} \right)^2}}.$$

Для фильтра рис 5.3, *а* в области частот от 0 до $\omega_1$ $Z_c$ имеет емкостный характер, а в области частот от $\omega_2$ до $\infty$ — индуктивный. Для фильтра рис. 5.4, *а* в области частот от $\omega_1$ до $\omega_р$ $Z_c$ имеет индуктивный характер, а в области от $\omega_р$ до $\omega_2$ — емкостный.

Характер изменения $Z_c$ иллюстрируют кривые рис. 5.3, *в*, 5.4, *в*.

**Пример 57.** В схеме рис. 5.5, *а* $L = 10$ мГн; $C = 10$ мкФ. Определить $b = f(\omega)$ в полосе пропускания, $a = f(\omega)$ в полосе затухания. Построить векторную диаграмму при $\omega = 2000$ рад/с и токе $I_2 = 0{,}2$ А при согласованной нагрузке. Вывести формулу расчета фильтра рис. 5.5, *а* при работе его в несогласованном режиме.

Р е ш е н и е. Частота среза $\omega_2 = \sqrt{\frac{2}{LC}} = 4470$ рад/с. В полосе пропускания $a = 0$, $b = \arccos A = \arccos(1 - \omega^2 LC)$. При $\omega = 2000$ рад/с $b = 53°15'$, $\omega L = 20$.



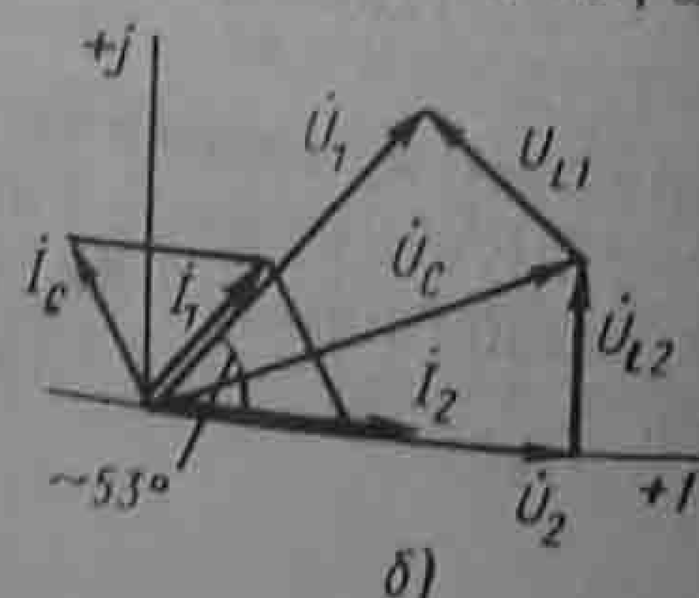




Рис. 5.5

б)



$\frac{1}{\omega C} = 50$ Ом, $Z_н = Z_c = \sqrt{\frac{2L}{C} - \omega^2 L^2} = 40$ Ом. Векторная диаграмма изображена на рис 5.5, *б* $\dot U_2 = \dot I_2 Z_н = 8$ В, $\dot U_1 = \dot U_2 e^a e^{jb} = 8e^{j53°15'}$ В. В полосе затухания при согласованной нагрузке $a = \mathrm{Arch}(\omega^2 LC - 1)$. Если $Z_н$ будет несогласована с $Z_c$, то расчет фильтра в полосе пропускания и в полосе затухания можно проводить, используя соотношения $\dot U_1 = \dot U_c + \dot I_1 j\omega L$, $\dot U_c = \dot U_2 + \frac{\dot U_2}{Z_н} j\omega L$,

$$\dot I_1 = \dot I_2 + \dot I_c = \frac{\dot U_2}{Z_н} + \frac{\dot U_2}{\frac{1}{j\omega C}} + \frac{j\omega L}{Z_н \frac{1}{j\omega C}} \dot U_2;\quad \dot U_1 = m \dot U_2,$$

где

$$m = 1 + \frac{2j\omega L}{Z_н} + \frac{j\omega L}{\frac{1}{j\omega C}} + \frac{(j\omega L)^2}{Z_н \frac{1}{j\omega C}}.$$

Если взять $\omega = 2\omega_2 = 8940$ рад/с (работа в полосе затухания) и $Z_н = 40$ Ом (вместо $j77{,}5$ Ом, исходя из условия согласованности), то $m = 12{,}55 e^{j118°40'}$, т. е. затухание будет $\ln \frac{U_1}{U_2} = \ln 12{,}55 = 2{,}53$ Нп (вместо 2,64 при согласованной нагрузке).

Аналогичные формулы для несогласованного режима можно вывести для любого другого фильтра.

**Пример 58.** Определить параметры полосового фильтра рис. 5. 3, *а*, исходя из того, что он должен пропускать полосу частот от $f_1 = 750$ Гц до $f_2 = 850$ Гц и что при резонансной частоте $f_р$ сопротивление нагрузки $Z_н = Z_c = 1130$ Ом.

Р е ш е н и е.

$$1)\ f_р = \sqrt{f_1 f_2} = \sqrt{750 \cdot 850} = 798\ Гц.$$

$$2)\ C_1 = \frac{850 - 750}{2\pi \cdot 750 \cdot 850 \cdot 1130} = 0{,}022\ мкФ;$$

$$3)\ L_1 = \frac{1130}{2\pi (850 - 750)} = 1{,}6\ Гн;$$

$$4)\ C_2 = \frac{1}{\pi \cdot 1130 \cdot 100} = 2{,}825\ мкФ;$$

$$5)\ L_2 = \frac{1130 \cdot 100}{4\pi \cdot 750 \cdot 850} = 0{,}0141\ Гн.$$

**§ 5.4. Качественное определение *k*-фильтра.** По схеме *k*-фильтра без проведения подробного математического анализа можно судить о том, к какому из перечисленных типов может быть отнесен тот или иной фильтр. Заключение основывается на характере продольного сопротивления фильтра.

Характер продольного сопротивления *k*-фильтра, как правило, прямо противоположен характеру поперечного сопротивления. В этом можно убедиться, рассмотрев схемы рис. 5.1, *а*, 5.2, *а* и 5.3, *а*. Действительно, если продольное сопротивление индуктивное, то поперечное — емкостное. Если продольное сопротивление образовано последовательно соединенными $L$ и $C$, то поперечное — параллельно соединенными $L$ и $C$ и т. д. Если продольное сопротивление состоит только из индуктивностей, то фильтр относится к категории НЧ; если продольное сопротивление чисто емкостное, то фильтр — ВЧ.

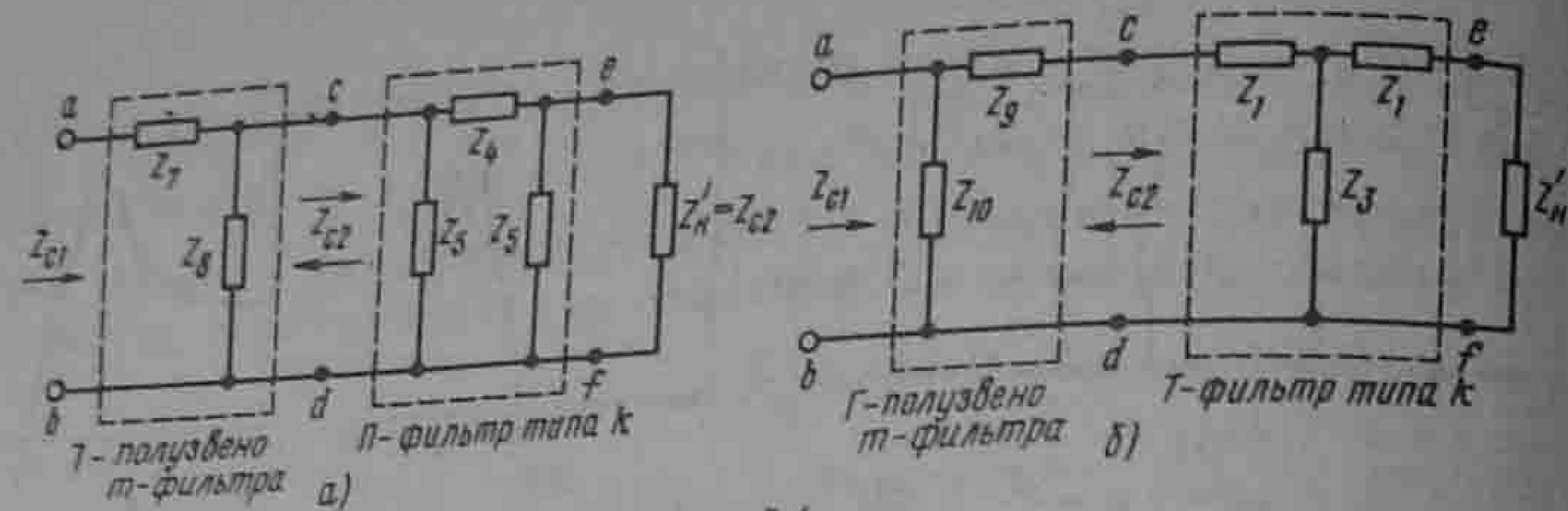



Рис. 5.6

Если продольное сопротивление состоит из последовательно соединенных $L$ и $C$, то фильтр полосового типа. Если продольное сопротивление состоит из параллельно соединенных $L$ и $C$, то фильтр заграждающего типа.

**§ 5.5. Основы теории *m*-фильтров. Каскадное включение фильтров.** Для увеличения крутизны характеристики $a=f(\omega)$ в начале полосы затухания, получения заданного значения затухания при определенной частоте (частотах) и меньшей зависимости $Z_c$ от частоты в полосе прозрачности применяют полузвенья $m$-фильтров, каскадно включаемые с $k$-фильтрами.

На рис. 5.6 в качестве примера изображены две возможные схемы каскадного включения ⅂-полузвена $m$- и $k$-фильтров. На практике обычно применяют также схемы, в которых $k$-фильтр находится между двумя полузвеньями $m$-фильтра.

Входное сопротивление фильтра $Z_{c1}$ берут равным сопротивлению источника сигнала (источника питания) $Z_и$. Схемы рис. 5.6 применяют, когда сопротивление нагрузки на выходе фильтра $Z_н$ не может быть взято равным $Z_и$. Схему рис. 5.8, *а* и ей подобные используют, когда $Z_н = Z_{c1} = Z_и$.

Рассмотрим свойства полузвеньев $m$-фильтров и каскадных соединений их с $k$-фильтрами. На рис. 5.6, *а* ⅂-полузвено $m$-фильтра, состоящее из сопротивлений $Z_7$ и $Z_8$, каскадно соединено с $П$-фильтром типа $k$ (сопротивления $Z_4$, $Z_5$, $Z_5$). На рис. 5.6, *б* Г-полузвено $m$-фильтра из сопротивлений $Z_9$ и $Z_{10}$ каскадно соединено с $T$-фильтром типа $k$ (сопротивления $Z_1$, $Z_1$, $Z_3$). Сопротивления $Z_7$ и $Z_8$ зависят от $Z_4$ и $Z_5$, а сопротивления $Z_9$ и $Z_{10}$ — от $Z_1$ и $Z_3$. Поэтому говорят, что прототипами ⅂- или Г-полузвеньев $m$-фильтров являются каскадно соединенные с ними $k$-фильтры.

При каскадном соединении фильтров друг с другом всегда соблюдают принцип согласованности. Входное сопротивление $k$-фильтра должно быть равно сопротивлению нагрузки на выходе этого фильтра: $Z_{c2} = Z_н'$. Для левого полузвена $m$-фильтра $Z_{c2}$ является сопротивлением нагрузки. Несимметричный четырехполюсник, каким является полузвено $m$-фильтра, описывается двумя характеристическими сопротивлениями $Z_{c1}$ и $Z_{c2}$. Сопротивление $Z_{c1}$ в $m$-фильтре рис. 5.6, *а* определяется

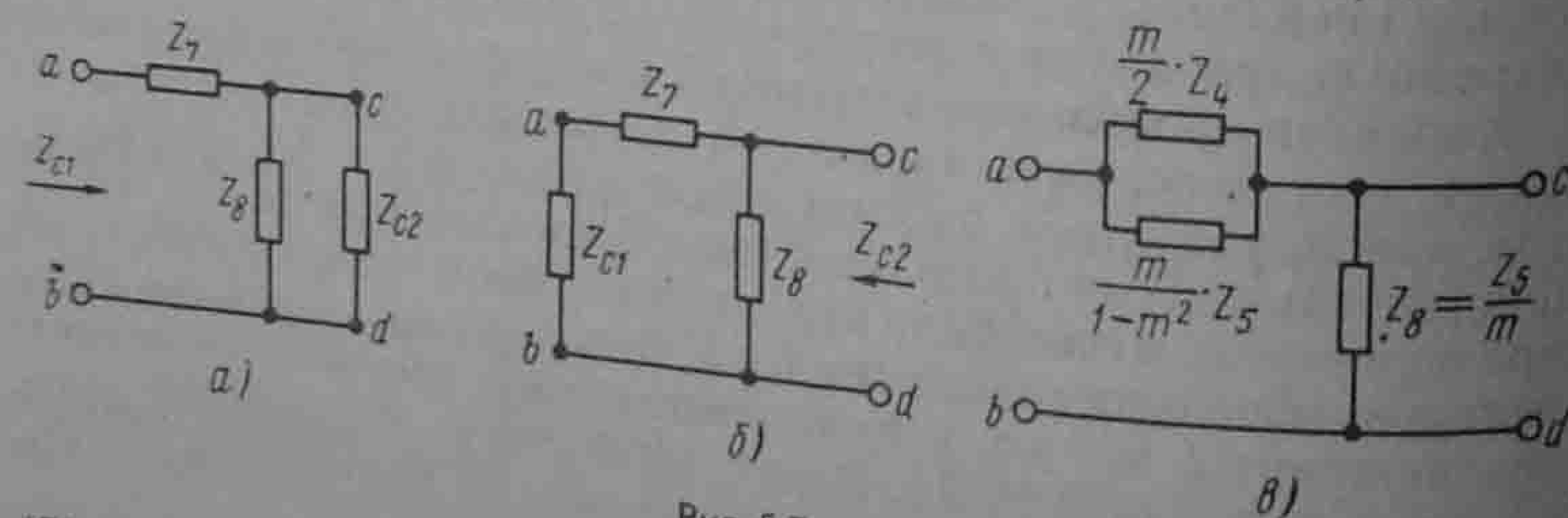



Рис. 5.7



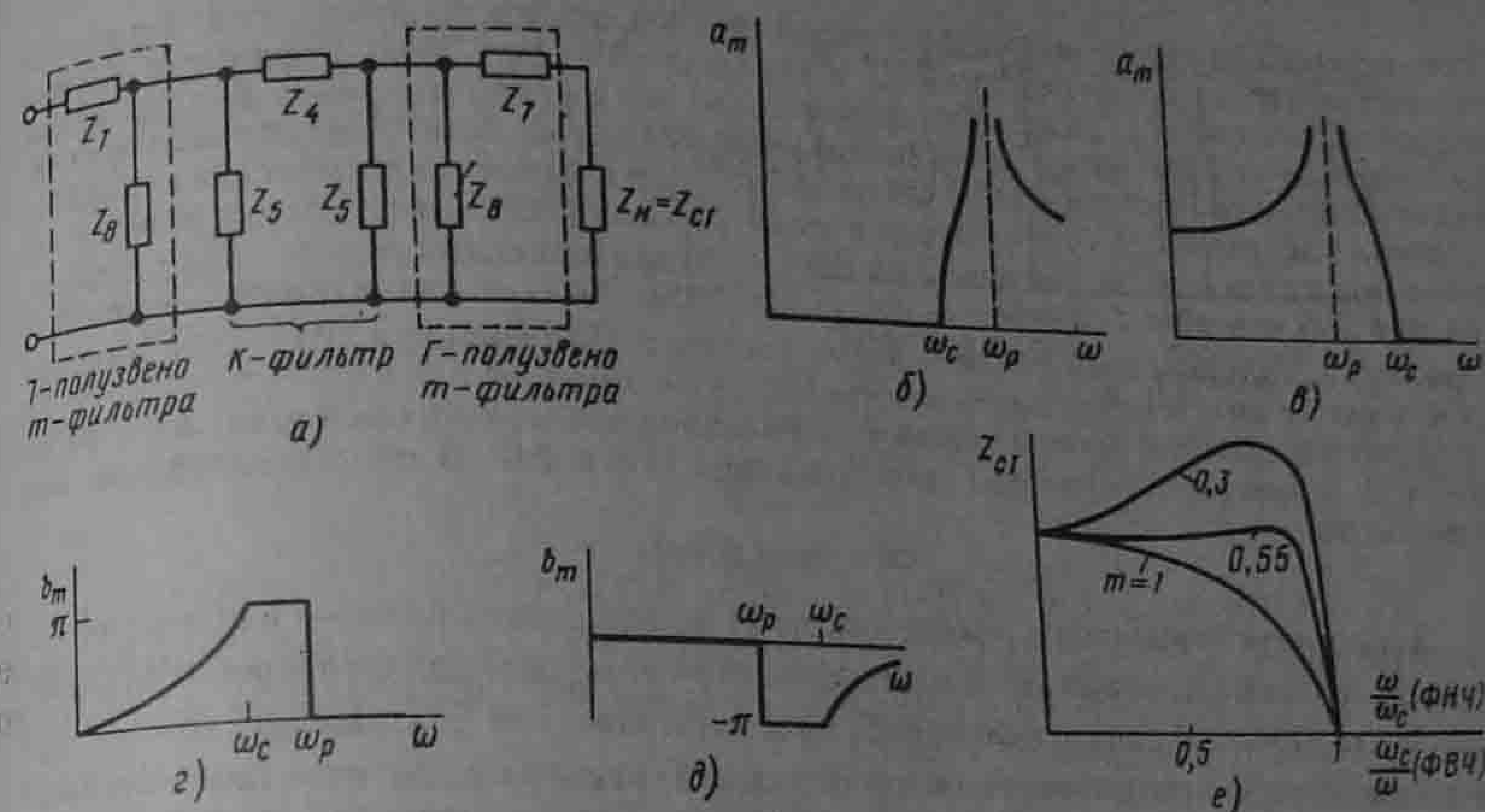



Рис. 5.8

как входное сопротивление схемы рис. 5.7, *а*, в которой нагрузкой является $Z_{c2}$ (входное сопротивление $k$-фильтра). Сопротивление $Z_{c2}$ для полузвена $m$-фильтра представляет собой входное сопротивление схемы рис. 5.7, *б*, в которой нагрузкой является $Z_{c1}$.

Коэффициенты $A$, $B$, $C$, $D$, ⅂-полузвена $m$-фильтра рис. 5.6, *а* вычислим по формулам § 4.5, полагая в них $Z_1 = Z_7$, $Z_2 = 0$, $Z_3 = Z_8$. В результате получим $A = 1 + (Z_7/Z_8)$, $B = Z_7$, $C = 1/Z_8$, $D = 1$.

Подставим найденные значения $A$, $B$, $C$, $D$ в формулы для $Z_{c1}$ и $Z_{c2}$

$$Z_{c1} = \sqrt{Z_7 Z_8 (1 + Z_7/Z_8)}\,; \tag{5.11}$$

$$Z_{c2} = \sqrt{\frac{Z_7 Z_8}{1 + Z_7/Z_8}}. \tag{5.12}$$

Входное сопротивление второго каскада схемы рис. 5.6, *а*

$$Z_{c2} = \sqrt{\frac{Z_4 Z_5}{1 + Z_4/Z_5}}\,. \tag{5.13}$$

Сопротивление $Z_8$ в ⅂-полузвене $m$-фильтра рис. 5.6, *а* берут равным $Z_5/m$, где числовой коэффициент $m$ находится в интервале от 0 до 1. Подставляя в (5.12) $Z_5/m$ вместо $Z_8$ и приравнивая подкоренные выражения формул (5.12) и (5.13), получим уравнение для определения $Z_7$:

$$\frac{Z_7 \dfrac{Z_5}{m}}{1 + m\dfrac{Z_7}{Z_5}} = \frac{Z_4 Z_5}{2 + Z_4/Z_5} \quad \text{или} \quad \frac{1}{Z_7} = \frac{1}{Z_4 \dfrac{m}{2}} + \frac{1}{Z_5 \dfrac{m}{1-m^2}}\,.$$

Последнее выражение свидетельствует о том, что сопротивление $Z_7$ образовано двумя параллельно соединенными сопротивлениями $Z_4 \frac{m}{2}$ и $Z_5 \frac{m}{1-m^2}$ (рис. 5.7, *в*).

Так как $Z_7$ образовано параллельно соединенными сопротивлениями, которые являются зависимыми (производными) от сопротивлений $Z_4$ и $Z_5$ $k$-фильтра, $m$-фильтр рис. 5.6, *а* называют *фильтром параллельно-производного типа*.

Заменим в схеме рис. 5.6, *а* сопротивление $Z_н' = Z_{c2}$ на второе полузвено $m$-фильтра, на входе которого включим согласованную нагрузку $Z_н = Z_{c1}$ (рис. 5.8, *а*).

Если первое полузвено $m$-фильтра схемы рис. 5.6, $a$ представляло собой Т-полузвено, состоящее из сопротивлений $Z_7$ и $Z_8$, то второе полузвено $m$-фильтра должно представлять собой Г-полузвено, состоящее из тех же сопротивлений $Z_7$ и $Z_8$, но как бы перевернутых относительно вертикальной прямой. Для второго полузвена $m$-фильтра входное сопротивление слева равно $Z_{c2}$, а входное сопротивление справа (со стороны нагрузки $Z_н$) — $Z_{c1}$. Практически $Z_{c1}$ для фильтра НЧ берут равным его значению при $\omega \to 0$, а для фильтра ВЧ — его значению при $\omega \to \infty$. Для $m$-фильтра рис. 5.6, $a$ в обоих случаях $Z_{c1} = \sqrt{L/2C}$, где $L$ и $C$ — индуктивность и емкость $k$-фильтра, являющегося прототипом $m$-фильтра. Для фильтра НЧ — это значения $L$ и $C$ в схеме рис. 5.1, $б$, а для фильтра ВЧ — в схеме рис. 5.2, $б$.

Границы полосы прозрачности у $m$-фильтра определяют так же, как и у $k$-фильтра, т. е. полагая $A(\omega) = \pm 1$ для фильтров НЧ и ВЧ. В полосе затухания для $m$-фильтра

$$\operatorname{ch} a = \pm A(\omega).$$

Знак минус относится к полосе частот от $\omega_p$ до $\omega_c$, знак плюс — к полосе частот от $\omega_p$ до $\infty$ для фильтров НЧ и к полосе частот от $\omega_p$ до 0 для фильтров ВЧ (объясняется это тем, что сопротивление $Z_7$ изменяет знак при резонансной частоте $\omega_p$). Границы полосы прозрачности по частоте для $k$-фильтра и для каскадно и согласованно с ним соединенного $m$-фильтра совпадают. Результирующее затухание всего фильтра $a$ равно сумме затуханий $m(a_m)$- и $k(a_k)$-фильтров:

$$a = a_m + a_k.$$

Характер зависимости $a_m = f(\omega)$ для $m$-фильтров НЧ и ВЧ показан на рис. 5.8, $б$, $в$, где $\omega_c$ — частота среза (граничная частота полосы прозрачности). На рис. 5.8, $б$ $\omega_p$ — резонансная частота, при которой противоположного характера сопротивления $\frac{m}{2} Z_4$ и $\frac{m}{1-m^2} Z_5$ в схеме рис. 5.7, $в$ вступают в резонанс, так что $Z_7 = \infty$ (при частоте $\omega_p$) при этом бесконечно велико затухание $m$-фильтра. В области частот от $\omega_c$ до $\omega_p$ затухание $a_m$ резко возрастает, что существенно, так как получается большое затухание в начале полосы затухания, где $a_k$ мало. Уменьшение $a_m$ при $\omega > \omega_p$ компенсируется ростом $a_k$. Напряжение на входных зажимах фильтра опережает напряжение на нагрузке на угол $b = b_m + b_k$, где $b_m$ — угол сдвига фаз от $m$-фильтра, а $b_k$ — угол сдвига фаз от $k$-фильтра. Зависимость $b_k = f(\omega)$ рассмотрена в § 5.3. Зависимость $b_m = f(\omega)$ показана на рис. 5.8, $г$ для фильтра НЧ и на рис. 5.8, $д$ — для фильтра ВЧ. Зависимость $Z_{c1} = f\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$ для фильтра НЧ показана на рис. 5.9, $б$ при трех значениях $m$. При $m \approx 0{,}5 \div 0{,}6$ сопротивление $Z_{c1}$ остается приблизительно постоянным почти по всей полосе прозрачности, резко уменьшается только вблизи частоты среза.

Рассмотрим свойства Г-полузвена $m$-фильтра рис. 5.9, $a$, являющегося составной частью фильтра рис. 5.6, $б$. Опуская промежуточные выкладки, запишем окончательные выражения для $Z_{c1}$ и $Z_{c2}$ этого фильтра:

$$Z_{c1} = \sqrt{\frac{Z_9 Z_{10}}{1 + Z_9/Z_{10}}}; \quad Z_{c2} = \sqrt{Z_9 Z_{10}(1 + Z_9/Z_{10})}.$$

Входное сопротивление $k$-фильтра рис. 5.6, $б$

$$Z_{c2} = \sqrt{Z_1 Z_3 (2 + Z_1/Z_3)}.$$

Г-полузвено $m$-фильтра рис. 5.9, $a$ называют последовательно-производным, так как его сопротивление $Z_{10}$ состоит из двух последовательно соединенных сопротивлений $\frac{2}{m} Z_3$ и $\frac{1-m^2}{m} Z_1$, являющихся производными от сопротивлений $Z_1$ и $Z_3$



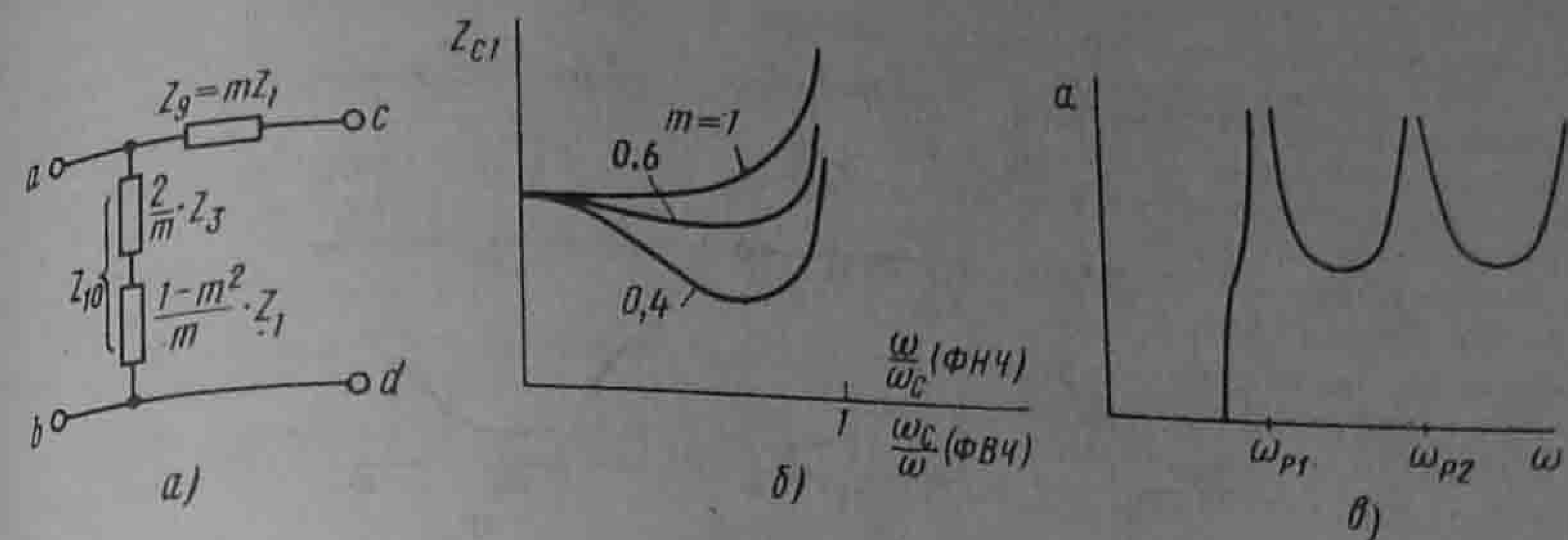



Рис. 5.9

$k$-фильтра. Сопротивления $Z_1$ и $Z_3$ имеют противоположный характер (одно индуктивный, другое емкостный), поэтому при некоторой частоте сопротивление $Z_{10} = 0$ (резонанс напряжений). Для полосы прозрачности зависимость $Z_{c1} = f\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$ для фильтра НЧ (от $\omega_c/\omega$ для фильтра ВЧ) при трех значениях $m$ показана на рис. 5.8, $е$. При $m \approx (0{,}5 \div 0{,}6)$ $Z_{c1}$ относительно мало изменяется в полосе прозрачности, что важно для практики. Зависимости $a_m = f(\omega)$ и $b_m = f(\omega)$ для $m$-фильтра рис. 5.6, $б$ такие же, как и для соответствующего ему $m$-фильтра рис. 5.6, $a$. Обобщенно можно сказать, что теоретически бесконечно большое затухание в $m$-фильтре на частоте $\omega_p$ создается либо за счет того, что на этой частоте в последовательной ветви полузвена $m$-фильтра оказывается участок с бесконечно большим сопротивлением (возникает резонанс токов), либо за счет того, что параллельная ветвь $m$-фильтра образует короткое замыкание при возникновении в ней режима резонанса напряжений. При каскадном соединении нескольких $m$-фильтров значения $L$, $C$ выбирают различными, чтобы создавать большие затухания на нескольких заданных частотах ($\omega_{p1}$, $\omega_{p2}$ и т. п.). При этом зависимость $a = f(\omega)$, например, для фильтра НЧ имеет вид гребенки (рис. 5.9, $в$). Фильтр с такой характеристикой иногда называют *гребенчатым*. На рис. 5.10, $a$ показана схема последовательно-производного полосно-пропускающего фильтра. Параметры ее соответствуют соотношениям, указанным на

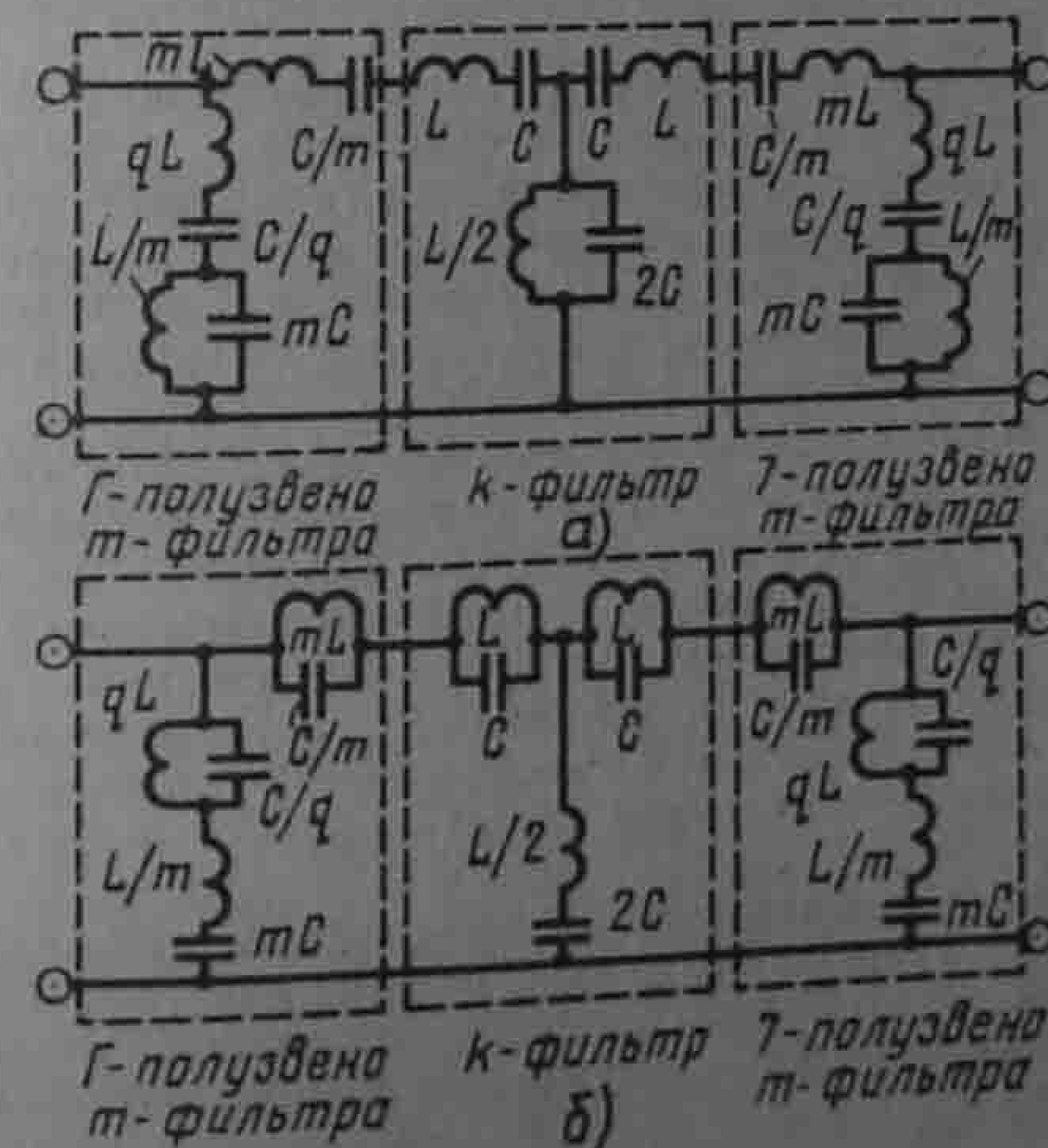



Рис. 5.10

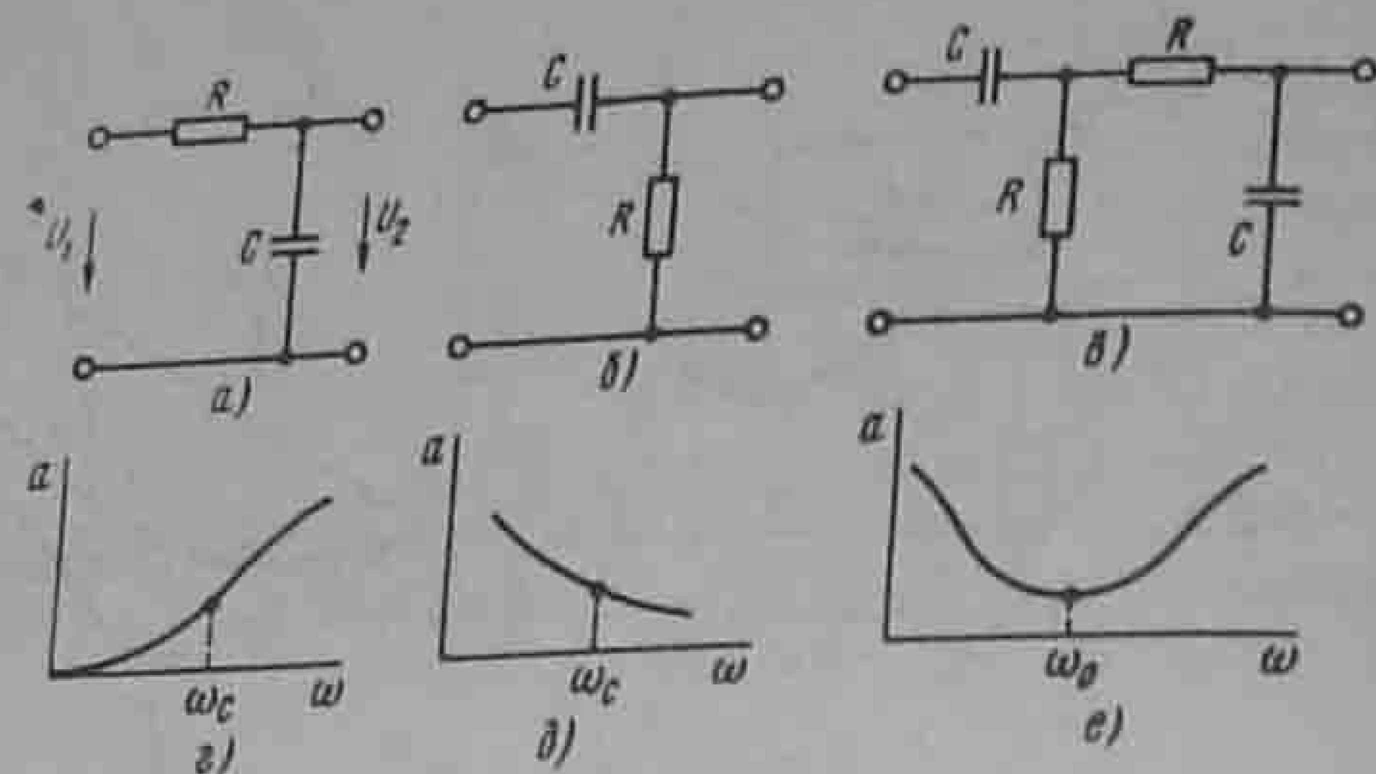



Рис. 5.11

рис. 5.9, *а*; $q = (1 - m^2)/m$. Продольные $mL$ и $L$ элементы могут быть заменены одним $(m+1)L$, а элементы $C/m$ и $C$ — на $C/(m+1)$. На рис. 5.10, *б* представлена схема последовательно-производного полосно-заграждающего фильтра ($q$ имеет тот же смысл). В обоих схемах сопротивление нагрузки берут равным $Z_{c1}$, но для фильтра рис. 5.10, *а* при $\omega = \omega_p$, а для фильтра рис. 5.10, *б* при $\omega \to 0$.

**§ 5.6. *RC*-фильтры.** Если сопротивление нагрузки, на которую включен фильтр, очень велико, т. е. теоретически стремится к бесконечности (например, входное сопротивление лампового усилителя или входное сопротивление полевого транзистора), то часто используют *RC*-фильтры. На рис. 5.11, *а* — *в* изображены схемы НЧ, ВЧ и полосно-пропускающего *RC*-фильтров, а на рис. 5.11, *г* — *е* — соответствующие им зависимости $a = \ln U_1/U_2 = f(\omega)$. Для НЧ-фильтра рис. 5.11, *а* $a = \ln|1 + j\omega RC|$, для ВЧ-фильтра рис. 5.11, *б* $a = \ln|1 - j/(\omega RC)|$. Для всех *RC*-фильтров в рабочей зоне $a \neq 0$. Рабочая зона НЧ-фильтра простирается от $\omega = 0$ до $\omega = \omega_c = 1/RC$ (принято условно), при которой $a = 3$ дБ. Для ВЧ-фильтра рабочая зона находится в диапазоне от $\omega = \omega_c = 1/RC$, когда $a = 3$ дБ, до $\omega = \infty$, когда $a \to 0$. В полосно-пропускающем фильтре минимальное затухание имеет место при $\omega = \omega_0 = 1/RC$, при этом $a = \ln|3 + j(\omega RC - \frac{1}{\omega RC})|$.

**§ 5.7. Активные *RC*-фильтры.** Обычные *k*- и *m*-фильтры формируют из конденсаторов и индуктивных катушек. Но индуктивные катушки — элементы громоздкие и их нельзя изготовить методами интегральной технологии. Кроме того, при очень низких (инфранизких) частотах, применяемых, например, в гидролокации и акустике, очень трудно изготовить индуктивные катушки с высокой добротностью. Требования миниатюризации аппаратуры вызвали интерес к активным *RC*-фильтрам. Они представляют собой фильтры, состоящие из элементов *R* и *C* и активных элементов (ОУ или транзисторов); индуктивные элементы в них не входят. Известны два направления реализации активных *RC*-фильтров. Первое основано на применении схем с активными элементами, в которых используют обратные связи, второе — на использовании обычных схем *k*- и *m*-фильтров, в которых индуктивные элементы заменены на имитированные (позволяющие осуществить их в миниатюрном исполнении).

Рассмотрим основы построения активных *RC*-фильтров с обратными связями. На рис. 5.12, *а* изображена одна из схем низкочастотного активного *RC*-фильтра. Она состоит из двух конденсаторов, четырех резисторов и ОУ, использованного в инвертирующем включении.

Сопротивление нагрузки, включаемой на выходе активных *RC*-фильтров, обычно во много раз больше малого выходного сопротивления самого фильтра, поэтому можно считать, что фильтры работают в условиях, близких к холостому ходу. Исходя из этого, анализ схемы рис. 5.12, *а* проведем для режима холостого хода. Обозначим токи в ветвях ($I_1 - I_5$, $I_{вх}$) и узлах ($1 - 5$) в соответствии с рис. 5.12, *а* и выведем формулу для затухания фильтра. При выводе учтем, что входной ток ОУ $I_5 \approx 0$,



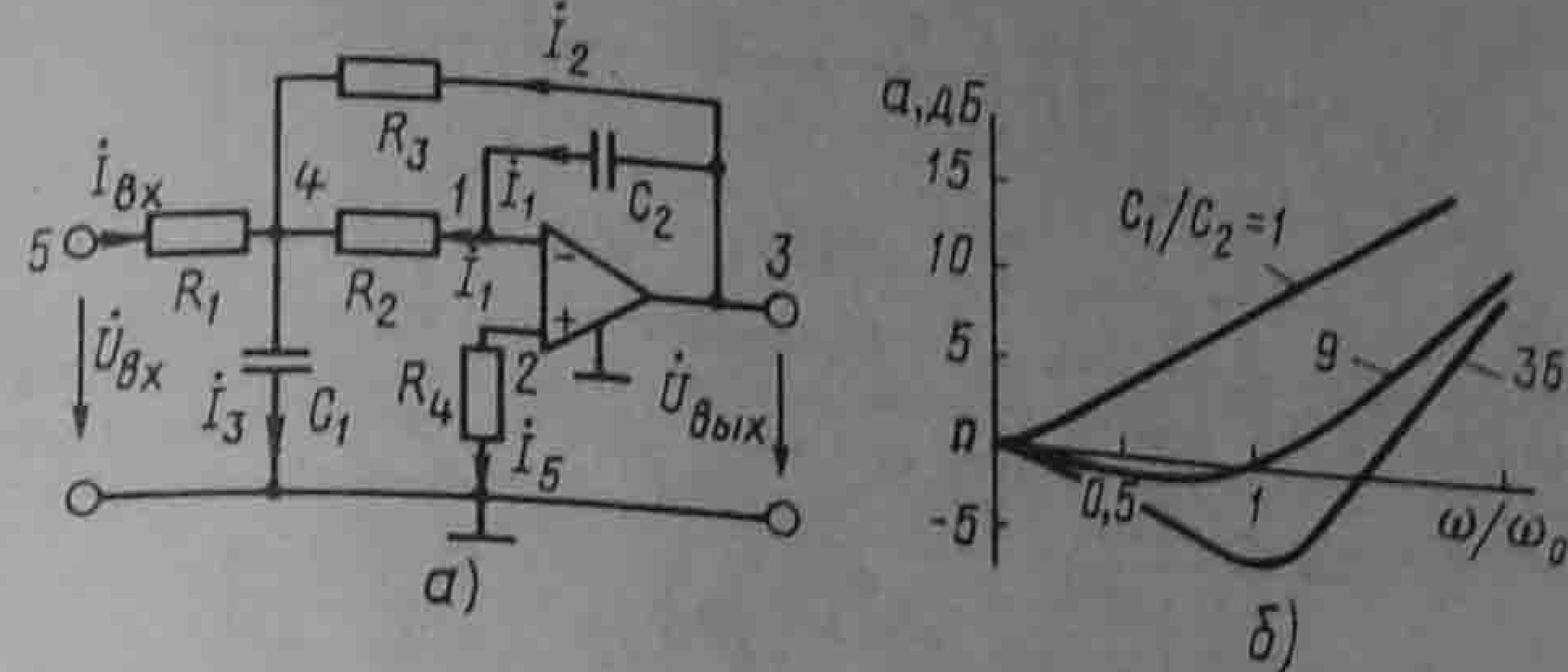



Рис. 5.12

поэтому $\varphi_2 \approx \varphi_1 \approx 0$. Ток $\dot{I}_1 = j\omega_2 C\varphi_3$; потенциал $\dot{\varphi}_4 = -\dot{I}_1 R_2 = -j\omega C_2 R_2 \dot{\varphi}_3$. Ток $\dot{I}_2 = (\dot{\varphi}_3 - \dot{\varphi}_4)/R_3 = \dot{\varphi}_3(1 + j\omega R_2 C_2)/R_3$. Ток $\dot{I}_3 = \dot{\varphi}_4\, j\omega C_1 = \dot{\varphi}_3 C_1 C_2 R_2 \omega^2$. Входной ток фильтра $\dot{I}_{вх} = \dot{I}_3 - \dot{I}_1 - \dot{I}_2 = -\dot{\varphi}_3[C_1 C_2 R_2 \omega^2 + j\omega C_2 + (1 + j\omega C_2 R_2)/R_3]$.

Входное напряжение

$$\dot{\varphi}_5 = \dot{\varphi}_4 + \dot{I}_{вх} R_1 = -\dot{\varphi}_3 \left\{-C_1 C_2 R_1 R_2 \omega^2 + j\omega\left[(R_1 + R_2) C_2 + \frac{R_1 R_2 C_2}{R_3}\right] + \frac{R_1}{R_3}\right\}.$$

Затухание фильтра в децибелах

$$a_{дБ} = 20\lg\left|\frac{\dot{\varphi}_5}{\dot{\varphi}_3}\right| = 20\lg\left|\left(\frac{R_1}{R_3} - C_1 C_2 R_1 R_2 \omega^2\right) + j\omega\left[(R_1 + R_2) C_2 + \frac{R_1 R_2 C_2}{R_3}\right]\right| \frac{R_1}{R_3}.$$

Если принять $R_1 = R_2 = R_3 = R$ и обозначить $\omega_0 = 1/R\sqrt{C_1 C_2}$, то зависимость $a = f(\omega)$ (выраженная в долях от $\omega_0$) может быть проиллюстрирована кривыми рис. 5.12, *б* при $C_1/C_2 = 1; 9; 36$. Отношение $C_1/C_2$ определяет вид затухания в полосе частот от 0 до $\omega_0$. За счет наличия ОУ при некоторых $C_1/C_2$ затухание может быть отрицательным (вместо затухания имеет место усиление). На рис. 5.13, *а* приведена схема высокочастотного активного *RC*-фильтра, образованная из схемы рис. 5.12, *а* перестановкой конденсаторов и резисторов. Резисторы $R_4$ в схеме рис. 5.12, *а* и $R_4$ в схеме рис. 5.13, *а* выполняют функции сопротивлений, регулирующих работу ОУ, поэтому при упомянутой замене их не следует принимать во внимание. Для этой схемы (выкладки опускаем) затухание фильтра в децибелах

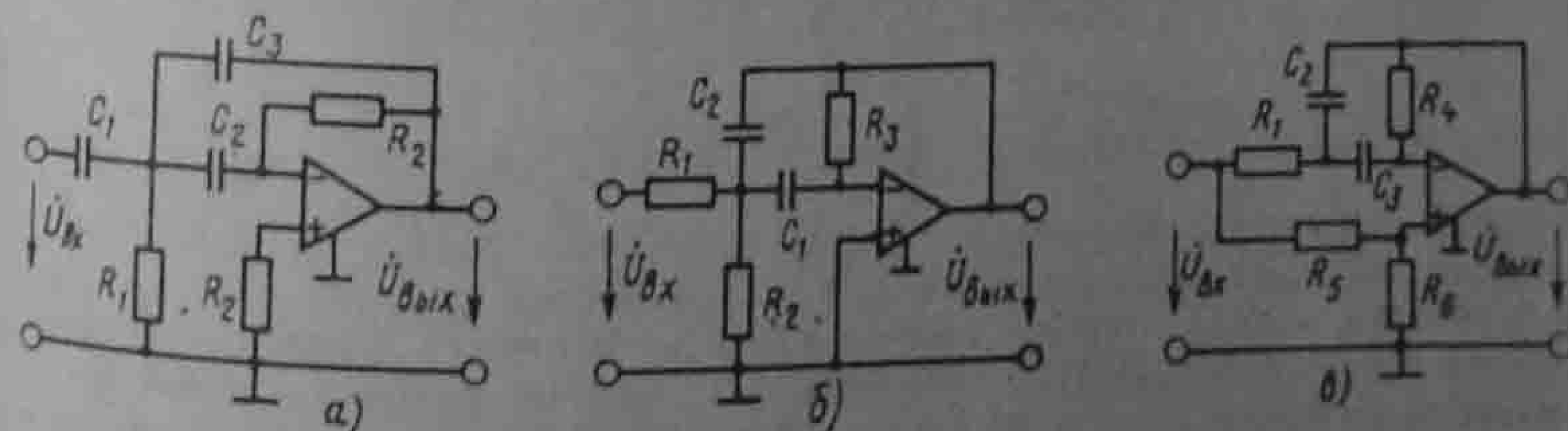



Рис. 5.13

$$a_{\text{дБ}} = 20\lg\left|\left(\frac{1}{R_1R_2C_1C_2\omega^2} - \frac{C_3}{C_1}\right) + j\frac{C_1 + C_2 + C_3}{C_1C_2R_2\omega}\right|;$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{R_1R_2C_2C_3}}$$

Зависимости $a = f(\omega)$ для схемы рис. 5.13, а можно качественно получить из кривых $a = f(\omega)$ для схемы рис. 5.12, а, если последние зеркально отразить относительно вертикальной оси, проведенной через $\omega_0$. Схема полосно-пропускающего активного RC-фильтра изображена на рис. 5.13, б. Затухание этого фильтра в децибелах

$$a_{\text{дБ}} = 20\lg\left|\frac{R_1}{R_3}\left(1 + \frac{C_2}{C_1}\right) + j\left(R_2C_2\omega - \frac{R_1 + R_2}{R_2R_3C_1\omega}\right)\right|.$$

При этом

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{R_1 + R_2}{R_1R_2R_3C_1C_2}}.$$

Наименьшее затухание $a = 20\lg\left[\frac{R_1}{R_3}\left(1 + \frac{C_2}{C_1}\right)\right]$ имеет место при частоте $\omega_0$.

Отношение выходного напряжения четырехполюсника к входному как функция частоты $\omega$ называют *передаточной функцией четырехполюсника*. Для схемы рис. 5.12, а $K = \varphi_3/\varphi_5$.

Схема полосно-заграждающего фильтра изображена на рис. 5.13, в.

Второе направление реализации активных RC-фильтров основано на замене обычных индуктивных элементов в k- или m-фильтрах на имитированные. При замене учитывают, является ли или может ли быть заземленным один из концов имитируемого индуктивного элемента. Если один из концов заземлен, то выбирают одну схему имитации, если нет, то другую. Так, в схеме фильтра ВЧ рис. 5.2, а нижний зажим индуктивного элемента соединен с землей, т. е. элемент $L$ является заземленным. В схеме фильтра НЧ рис. 5.1, б ни один из зажимов $L$ не заземлен (т. е. $L$ не заземлена). Поэтому индуктивные элементы в схемах рис. 5.2, а, 5.1, б должны быть имитированы различно (см. Приложение Б).

**§ 5.8. Передаточные функции активных RC-фильтров в нормированном виде.** Будем различать обычную частоту $\omega$ и нормированную $\omega_н$, выраженную в долях от частоты среза $\omega_c$ для НЧ фильтра рис. 5.14, а и в долях от центральной частоты полосы пропускания $\omega_r$ рис. 5.14, б полосно-пропускающего фильтра. То есть для НЧФ $\omega_н = \omega/\omega_c$, для ППФ $\omega_н = \omega/\omega_r$. Передаточные функции одного звена НЧ-, ПП-, ВЧ- и ПЗ-фильтров в нормированном виде записывают так:

$$K_{\text{НЧ}}(p_н) = \frac{k\,\omega_{pн}}{M(p_{pн})};\quad K_{\text{ПП}}(p_н) = \frac{k\dfrac{\omega_{pн}}{q_p}p_н}{M(p_{pн})};$$

$$K_{\text{ВЧ}}(p_н) = \frac{k\,p_н^2}{M(p_н)};\quad K_{\text{ПЗ}}(p_н) = \frac{k(p_н^2 + \omega_{pн}^2)}{M(p_{pн})}.$$

Здесь $M(p_н) = p_н^2 + mp_н + n$; $m = \frac{\omega_{pн}}{q_p}$; $n = \omega_{pн}^2$; $p_н = j\omega_н$; $\omega_{pн}$ — нормиро-
ванная резонансная угловая частота одного звена фильтра ($\omega_{pн} < 1$). Степень $p_н$ в
числителях этих выражений различна. У низкочастотного — нулевая, у ППФ —
первая, у ВЧФ и ПЗФ — вторая. Уравнение $M(p_н) = 0$ имеет комплексно-сопряжен-
ные корни (полюса $K(p_н)$). Под добротностью полюсов $q_p$ одного звена фильтра
понимают величину $2\alpha / \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$. Она показывает, насколько острой является час-
тотная характеристика звена (полюса равны $-\alpha \pm j\beta$).



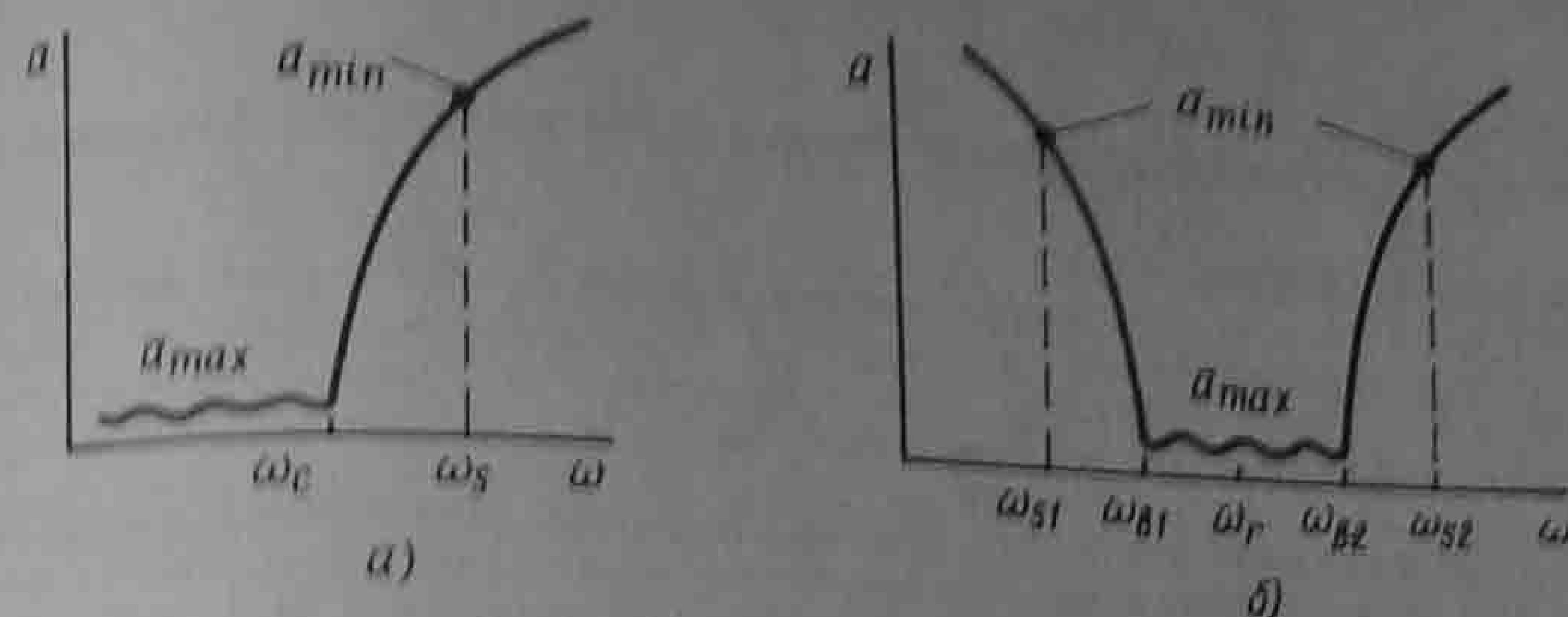



Рис. 5.14

При $q_p \leqslant 2$ звено фильтра считают низкодобротным, при $q_p \leqslant 20$ — среднедобротным, при $q_p > 20$ — высокодобротным. Схемы звеньев фильтров с различной величиной $q_p$ приведены в [9, 17].

**§ 5.9. Получение передаточной функции низкочастотного активного RC-фильтра, выбор схемы и определение ее параметров.** На рис. 5.14, а изображена зависимость затухания $a$ НЧ-фильтра от частоты $\omega$; $\omega_c$ — частота среза, $\omega_s$ — частота, начиная с которой НЧ-фильтр имеет относительно большое затухание $a_{min}$. В полосе пропускания допустимо небольшое затухание $a_{max}$. Порядок расчета следующий: сначала определим отношение $\omega_s/\omega_c$, затем по величинам $\omega_s/\omega_c$, $a_{min}$ и $a_{max}$ по таблицам, помещенным в [9, 17], при выбранном способе аппроксимации частотной характеристики фильтра (см. § 10.10) определяем знаменатель $M(p_н)$ всего фильтра. В таблицах он представлен, как правило, в виде произведения полиномов второго порядка вида $p_н^2 + mp_н + n$. Каждому полиному соответствует свое звено активного RC-фильтра. Все звенья соединяют каскадно. Для каждого полинома определяем добротность $q_p$ и по ее величине подбираем схему каждого звена по [9, 17]. После этого передаточную функцию каждого звена денормируем, заменяя $\omega_{pн}$ на $\omega_p/\omega_c$, а $p_н$ на $j\frac{\omega}{\omega_c}$. Затем определяем параметры $R$, $C$ каждого звена. С этой целью сопоставляем почленно выражение передаточной функции звена (например, выражения $\varphi_3/\varphi_5$ схемы рис. 5.12) с полученной функцией $K(j\omega)$ звена. Часть параметров в схеме может быть взята произвольно (резисторы по нескольку килоом, а конденсаторы доли микрофарад), другую часть находим из сопоставления. Так как вариантов решения может быть несколько, то выбираем по тем или иным соображениям наиболее целесообразное.

**§ 5.10. Получение передаточной функции полосно-пропускающего активного RC-фильтра.** Положим, что требуется получить ПП-фильтр с относительно большим затуханием $a_{min}$ в полосах затухания (от $\omega = 0$ до $\omega_{s1}$ и от $\omega_{s2}$ до $\infty$) — рис. 5.14, б — и небольшим допустимым затуханием $a_{max}$ в полосе пропускания от $\omega_{b1}$ до $\omega_{b2}$. Центральная частота в полосе пропускания обозначена $\omega_r$ (в относительных единицах $\omega_r = 1$).

Передаточную функцию ПП-фильтра получают на основе частотных преобра-
зований (см. Приложение Е) следующим образом: сначала подсчитывают нормиро-
ванную частоту $\omega_s = \frac{\omega_{s2} - \omega_{s1}}{\omega_{b2} - \omega_{b1}}$ НЧ-фильтра прототипа. Затем по $\omega_s$ и заданным
значениям $a_{min}$ и $a_{max}$ полосового фильтра, при заданном способе аппроксимации
частотной характеристики (по Чебышеву, по Баттерворту, по Бесселю и т. д.) по
таблицам, приведенным в [9, 17], определяем нормированную передаточную функ-
цию НЧ-фильтра прототипа. После этого подсчитываем коэффициент
$b = \frac{\omega_{b2} - \omega_{b1}}{\omega_r}$ и в передаточной функции НЧ-фильтра прототипа заменяем $p_н$ на

$\frac{s_н^2+\omega_r^2}{b_{s_н}} = \frac{s_н^2+1}{bs_н}$, т. е. осуществляем переход от НЧ-фильтра к ПП-нормированному фильтру (см. Приложение Е).

Здесь $s_н = j\omega_н$, $\omega_н$ — текущее значение нормированной угловой частоты. Для перехода от нормированной частоты $\omega_н$ к ненормированной $\omega$ заменяем $\omega_н$ на $\omega/\omega_{r\,ненорм}$ и $\omega_{рн}$ на $\frac{\omega_р}{\omega_{r\,ненорм}}$.

Обратим внимание на то, что степень полинома знаменателя передаточной функции ПП-фильтра увеличивается при этом в два раза по сравнению со степенью полинома знаменателя передаточной функции НЧ прототипа. Другими словами, каждое квадратичное звено НЧ прототипа заменяется на два каскадно включенных квадратичных звена ПП-фильтра.

**Вопросы для самопроверки**

1. Что понимают под электрическими $m$- и $k$-фильтрами? 2. Дайте определение полосы прозрачности и полосы затухания. Как расчетным путем найти границы полосы прозрачности для фильтров НЧ и ВЧ, а также полосно-пропускающих и полосно-заграждающих фильтров? 3. Начертите графики изменения $Z_c$, $a$ и $b$ в функции частоты $\omega$ для всех известных вам типов фильтров. 4. Из чего следует исходить при выявлении характера $Z_c$ фильтра в полосе затухания? 5. Как по схеме $k$-фильтра определить, к какому типу он принадлежит? 6. В чем недостатки $k$-фильтров? 7. Как согласовывают полузвенья $m$-фильтра с $k$-фильтром? За счет чего в $m$-фильтрах при некоторых частотах возникает бесконечно большое затухание? 8. В чем преимущества $m$-фильтров перед $k$-фильтрами? 9. Что послужило основанием подразделять полузвенья $m$-фильтров на параллельно-производные и на последовательно-производные? 10. Чем объяснить, что коэффициент $m$ берут равным 0,55 — 0,6? 11. Чем принципиально отличается $RC$-фильтр от $k$- и $m$-фильтров? 12. Что понимают под активными $RC$-фильтрами и каковы их достоинства? 13. Какие вы знаете два основных направления реализации активных $RC$-фильтров? 14. Какие способы создания имитированной индуктивности вы знаете? 15. Выведите формулы зависимости затухания $a$ от частоты $\omega$: а) для фильтра на рис. 5.12, $a$; б) для фильтра на рис. 5.13, $б$; в) для фильтра на рис. 5.13, $в$. 16. Решите задачи 14.1; 14.4; 14.6; 14.7; 14.18; 14.21; 14.22.

**Глава шестая**

# ТРЕХФАЗНЫЕ ЦЕПИ

**§ 6.1. Трехфазная система ЭДС.** Под *трехфазной симметричной системой ЭДС* понимают совокупность трех синусоидальных ЭДС одинаковой частоты и амплитуды, сдвинутых по фазе на 120°. Графики их мгновенных значений изображены на рис. 6.1, векторная диаграмма — на рис. 6.2. Принцип получения трехфазной системы ЭДС иллюстрирует рис. 6.3. В равномерном магнитном поле с постоянной угловой скоростью $\omega$ вращаются три одинаковых жестко скрепленных друг с другом катушки.

Плоскости катушек смещены в пространстве друг относительно друга на 120°. В каждой катушке наводится синусоидальная ЭДС одинаковой амплитуды. По фазе ЭДС катушек сдвинуты на 120°.

Аналогичным путем можно получить двух- и четырехфазную



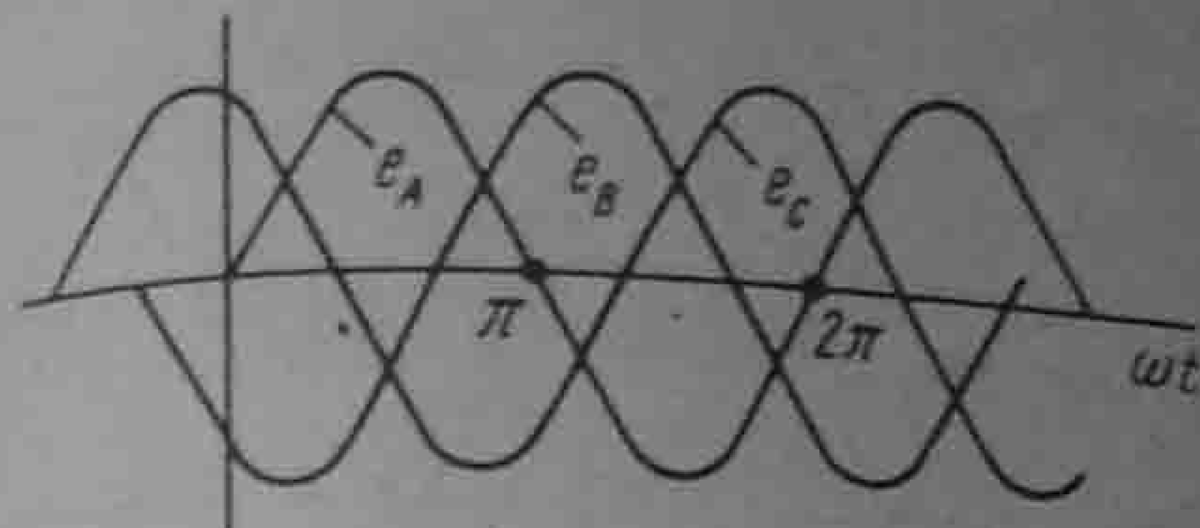



Рис. 6.1

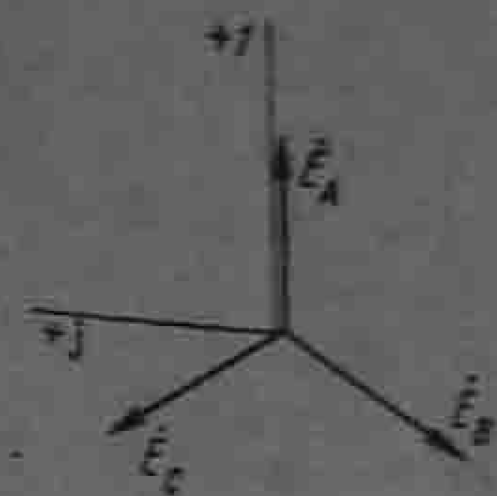



Рис. 6.2

систему ЭДС и более. Наибольшее практическое применение получила трехфазная система.

ЭДС трехфазного генератора обозначают следующим образом: одну из ЭДС — $\dot{E}_A$, отстающую от нее на 120° ЭДС — $\dot{E}_B$, а опережающую на 120° — $\dot{E}_C$.

Последовательность прохождения ЭДС через одинаковые значения (например, через нулевое значение) называют *последовательностью фаз*.

**§ 6.2. Принцип работы трехфазного машинного генератора.** В машинном генераторе (рис. 6.4) обмотки неподвижны (помещены в пазы статора); на рисунке они обозначены буквами $A$, $B$, $C$. Магнитное поле в генераторе создается вращающимся ротором с намотанной на него катушкой, по которой протекает постоянный ток. Если число пар полюсов ротора равно единице, то угловая частота вращения ротора равна угловой частоте вращающегося магнитного поля. Магнитная цепь в такой конструкции почти замкнута (имеется только небольшой зазор между статором и ротором), что позволяет получить значительный поток при относительно небольшой магнитодвижущей силе обмотки ротора. При конструировании генератора стремятся к тому, чтобы распределение магнитной индукции по окружности статора было практически синусоидально. На рис. 6.4 пунктиром показаны магнитные силовые линии в некоторый момент времени.

**§ 6.3. Трехфазная цепь. Расширение понятия фазы.** Совокупность трехфазной системы ЭДС, трехфазной нагрузки (нагрузок) и соединительных проводов называют *трехфазной цепью*.

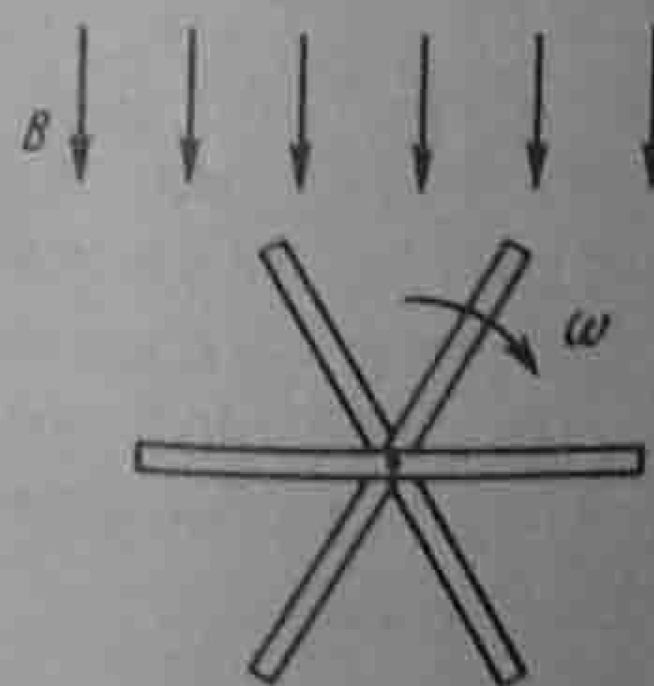



Рис. 6.3

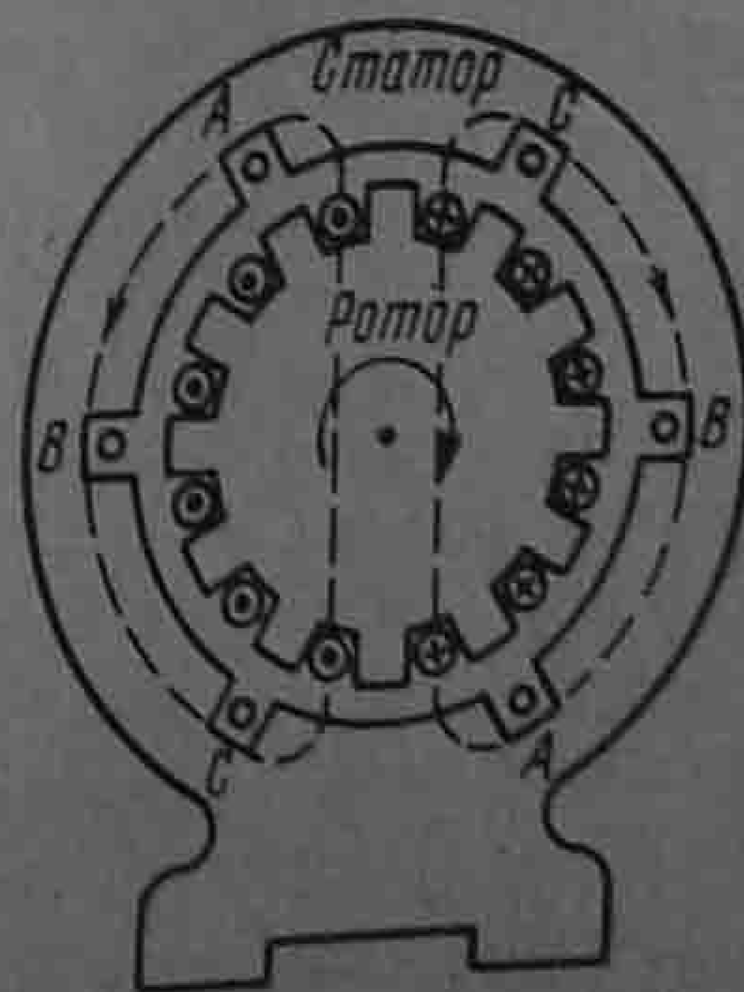



Рис. 6.4

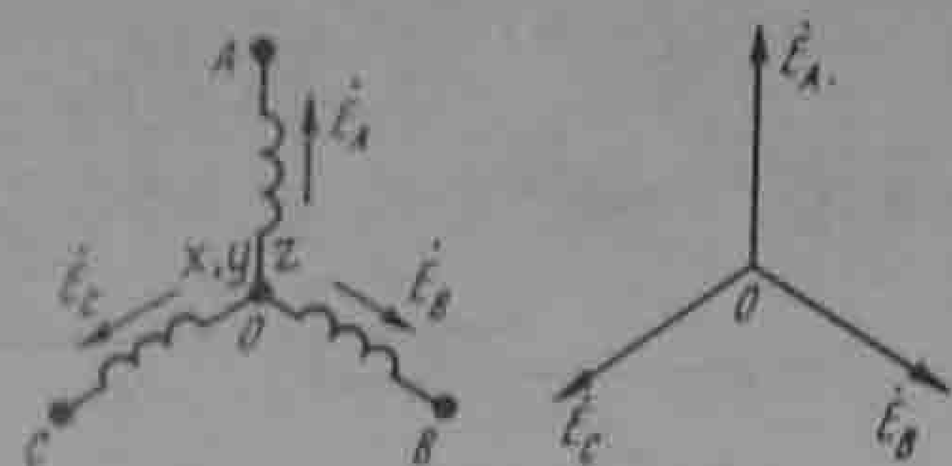


Рис. 6.5

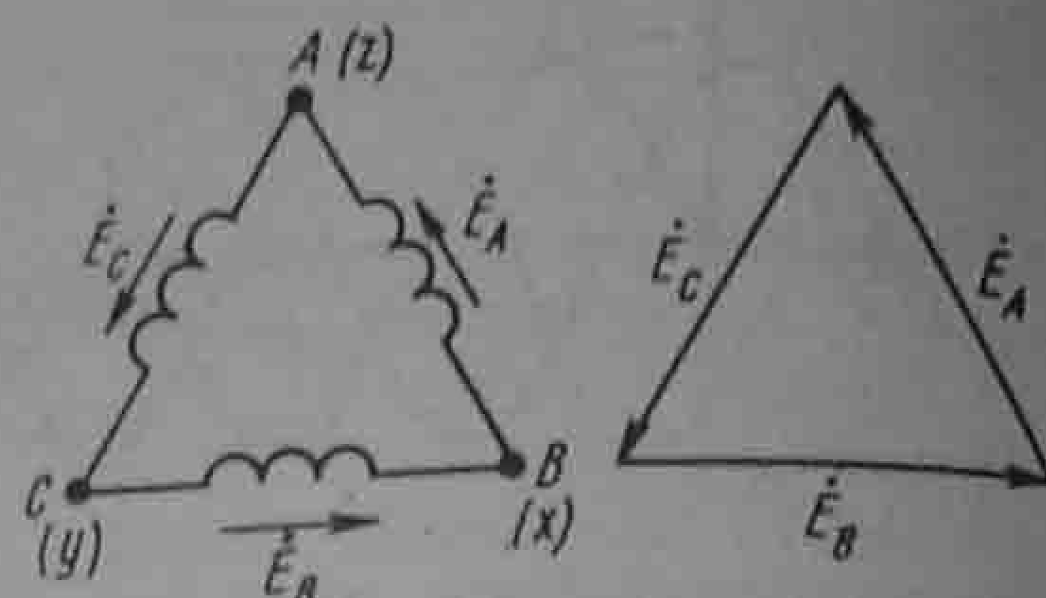


Рис. 6.6

Токи, протекающие по отдельным участкам трехфазных цепей, сдвинуты относительно друг друга по фазе. Под фазой трехфазной цепи понимают участок трехфазной цепи, по которому протекает одинаковый ток. В литературе фазой иногда называют однофазную цепь, входящую в состав многофазной цепи. Под фазой будем также понимать аргумент синусоидально меняющейся величины. Таким образом, в зависимости от рассматриваемого вопроса фаза — это либо участок трехфазной цепи, либо аргумент синусоидально изменяющейся величины.

**§ 6.4. Основные схемы соединения трехфазных цепей, определение линейных и фазовых величин.** Существуют различные способы соединения обмоток генератора с нагрузкой. Самым неэкономичным способом явилось бы соединение каждой обмотки генератора с нагрузкой двумя проводами, на что потребовалось бы шесть соединительных проводов. В целях экономии обмотки трехфазного генератора соединяют в звезду или треугольник. При этом число соединительных проводов от генератора к нагрузке уменьшается с шести до трех или до четырех.

На электрической схеме трехфазный генератор принято изображать в виде трех обмоток, расположенных друг к другу под углом 120°. При соединении звездой одноименные зажимы (например, концы *x*, *y*, *z*) трех обмоток объединяют в одну точку (рис. 6.5), которую называют *нулевой точкой* генератора *O*. Обмотки генератора обозначают буквами *A*, *B*, *C*; буквы ставят: *A* — у начала первой, *B* — у начала второй и *C* — у начала третьей фазы.

При соединении обмоток генератора треугольником (рис. 6.6) конец первой обмотки генератора соединяют с началом второй, конец второй — с началом третьей, конец третьей — с началом первой. Геометрическая сумма ЭДС в замкнутом треугольнике равна нулю. Поэтому если к зажимам *A*, *B*, *C* не присоединена нагрузка, то по обмоткам генератора не будет протекать ток.

Обратим внимание на то, что расположение звезды или треугольника векторов фазовых ЭДС на комплексной плоскости не следует связывать с расположением в пространстве осей трех обмоток генератора.



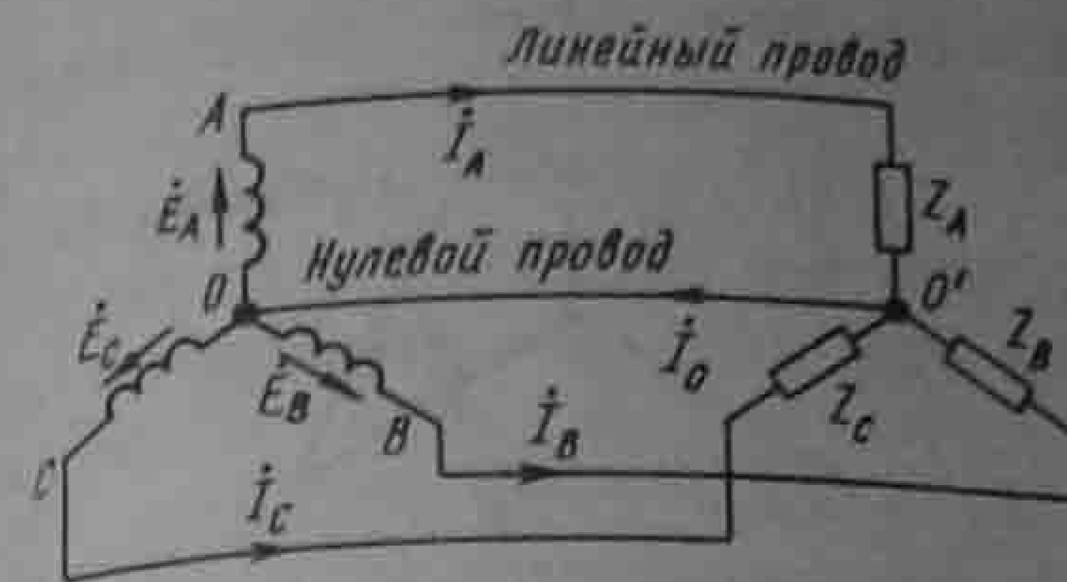



Рис. 6.7

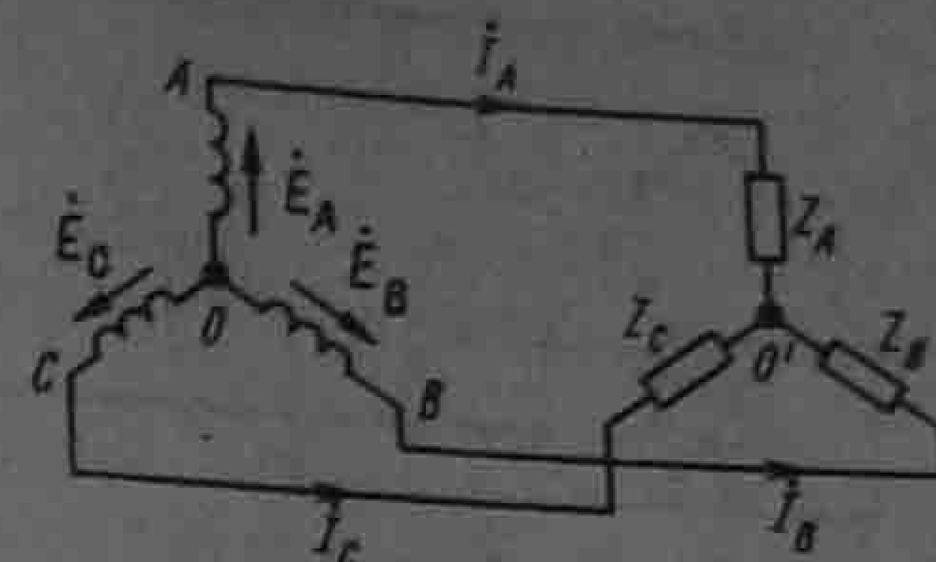


Рис. 6.8

Пять простейших способов соединения трехфазного генератора с трехфазной нагрузкой изображены на рис. 6.7 — 6.10.

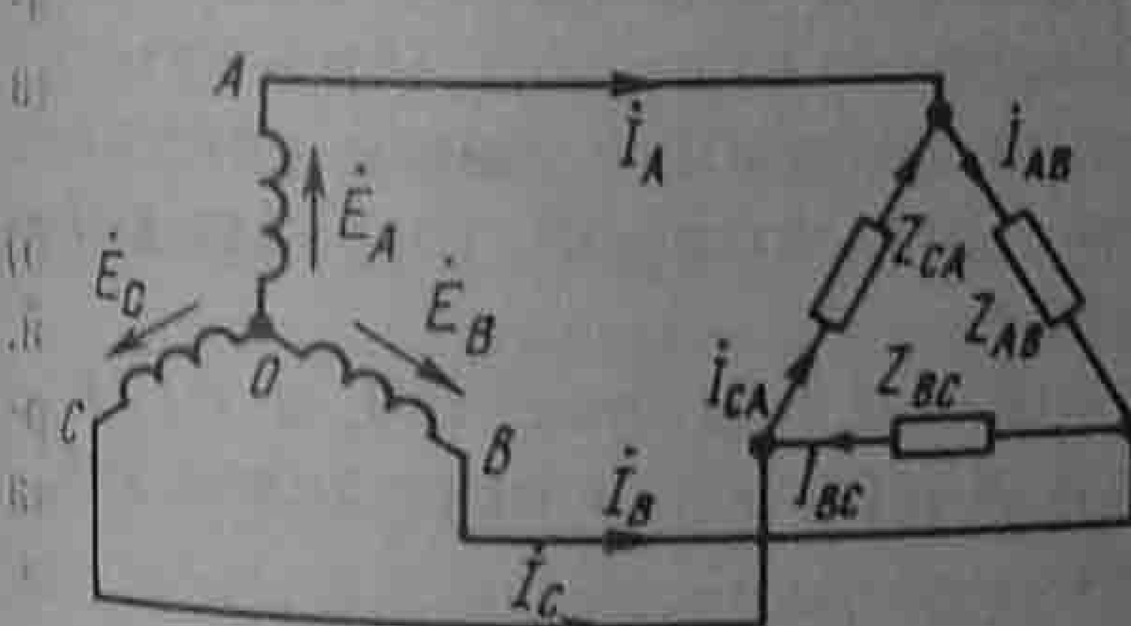
Точку, в которой объединены три конца трехфазной нагрузки при соединении ее звездой, называют *нулевой точкой нагрузки* и обозначают *O′*. *Нулевым проводом* называют провод, соединяющий нулевые точки генератора и нагрузки. Ток нулевого провода назовем $I_0$. Положительное направление тока возьмем от точки *O′* к точке *O*.

Провода, соединяющие точки *A*, *B*, *C* генератора с нагрузкой, называют *линейными*.

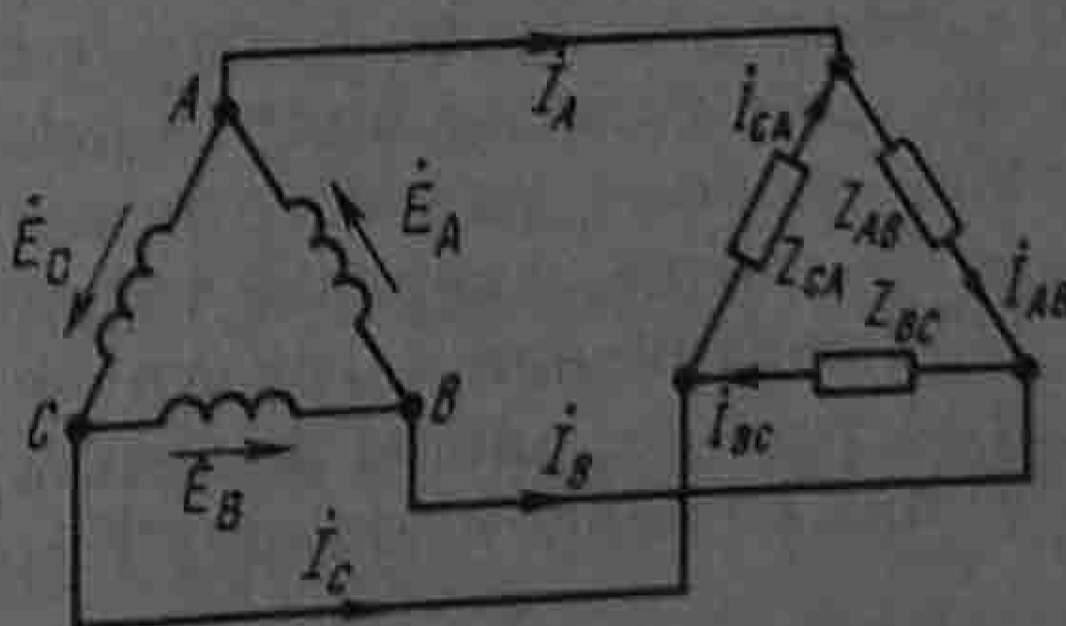
Схему рис. 6.7 называют звезда — звезда с нулевым проводом; схему рис. 6.8 — звезда — звезда без нулевого провода; схему рис. 6.9, *а* — звезда — треугольник; схему рис. 6.9, *б* — треугольник — треугольник; схему рис. 6.10 — треугольник — звезда.

Текущие по линейным проводам токи называют *линейными;* их обозначают $\dot{I}_A$, $\dot{I}_B$, $\dot{I}_C$. Условимся за положительное направление токов принимать направление от генератора к нагрузке. Модули линейных токов часто обозначают $I_л$ (не указав никакого дополнительного индекса), особенно тогда, когда все линейные токи по модулю одинаковы.

Напряжение между линейными проводами называют *линейным* и часто снабжают двумя индексами, например $U_{AB}$ (линейное напряжение между точками *A* и *B*); модуль линейного напряжения обозначают $U_л$.



а)



б)

Рис. 6.9

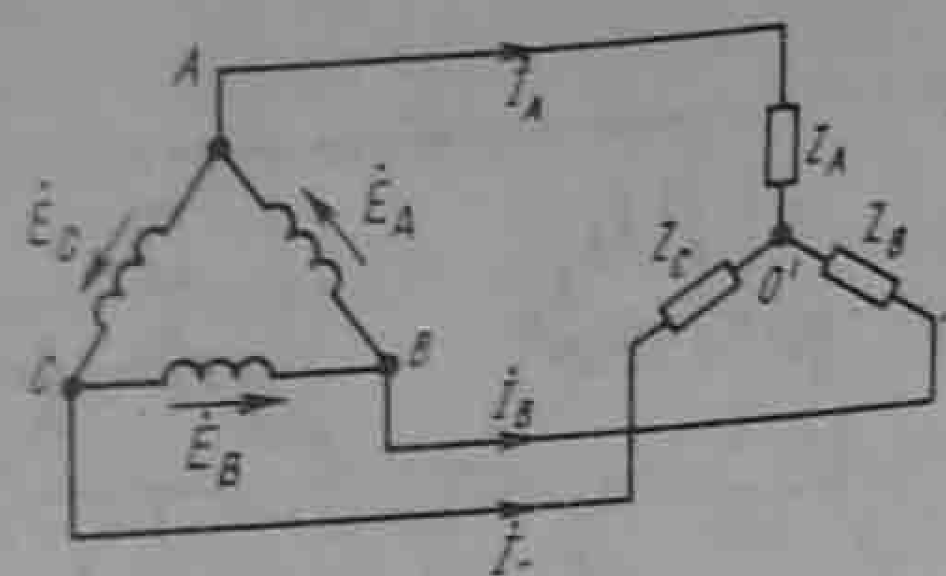



Рис. 6.10

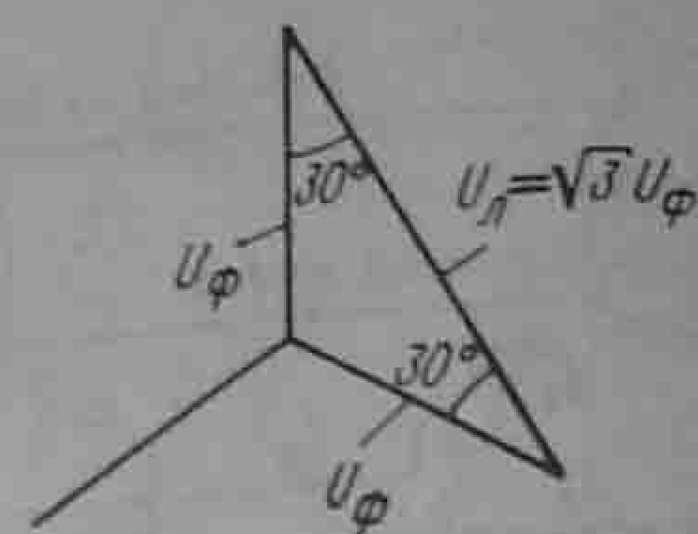



Рис. 6.11

Каждую из трех обмоток генератора называют фазой генератора; каждую из трех нагрузок — фазой нагрузки; протекающие по ним токи — фазовыми токами генератора $I_ф$ или соответственно нагрузки, а напряжения на них — фазовыми напряжениями ($U_ф$).

**§ 6.5. Соотношения между линейными и фазовыми напряжениями и токами.** При соединении генератора в звезду (см. рис. 6.7, 6.8, 6.9, *а*) линейное напряжение по модулю в $\sqrt{3}$ раз больше фазового напряжения генератора ($U_ф$). Это следует из того, что $U_л$ есть основание равнобедренного треугольника с острыми углами по 30° (рис. 6.11):

$$U_л = U_{AB} = U_ф 2\cos 30° = \sqrt{3}\, U_ф. \qquad (6.1)$$

В основу формирования ряда трехфазных напряжений, когда последующее напряжение больше предыдущего в $\sqrt{3}$ раз, положен $\sqrt{3} = 1{,}73$. Приведем часть этого ряда при относительно низких напряжениях: 127, 220, 380, 660 В.

Линейный ток $I_л$ при соединении генератора в звезду равен фазовому току генератора: $I_л = I_ф$.

При соединении генератора в треугольник линейное напряжение равно фазовому напряжению генератора (см. рис. 6.6, 6.9, *б*):

$$U_л = U_ф. \qquad (6.2)$$

При соединении нагрузки в звезду (см. рис. 6.7, 6.8, 6.10) линейный ток равен фазовому току нагрузки: $I_л = I_ф$.

При соединении нагрузки треугольником положительные направления для токов выбирают по часовой стрелке. Индексы у токов соответствуют выбранным для них положительным направлениям: первый индекс отвечает точке, от которой ток утекает, второй — точке, к которой ток притекает.

При соединении нагрузки треугольником (см. рис. 6.9, *а, б*) линейные токи не равны фазовым токам нагрузки и определяются через них по первому закону Кирхгофа:

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{AB} - \dot{I}_{CA};\quad \dot{I}_B = \dot{I}_{BC} - \dot{I}_{AB};$$

$$\dot{I}_C = \dot{I}_{CA} - \dot{I}_{BC}.$$



**§ 6.6. Преимущества трехфазных систем.** Широкое распространение трехфазных систем объясняется главным образом тремя основными причинами:

1) передача энергии на дальние расстояния трехфазным током экономически более выгодна, чем переменным током с иным числом фаз;

2) элементы системы — трехфазный синхронный генератор, трехфазный асинхронный двигатель и трехфазный трансформатор — просты в производстве, экономичны и надежны в работе;

3) система обладает свойствами неизменности значения мгновенной мощности за период синусоидального тока, если нагрузка во всех трех фазах трехфазного генератора одинакова.

**§ 6.7. Расчет трехфазных цепей.** Трехфазные цепи являются разновидностью цепей синусоидального тока, и потому расчет и исследование процессов в них производят теми же методами и приемами, которые рассматривались в гл. 3 и 4. Для цепей трехфазного тока применим также символический метод расчета и можно строить векторные, топографические и круговые диаграммы.

Аналитический расчет трехфазных цепей рекомендуется сопровождать построением векторных и топографических диаграмм. Векторные диаграммы облегчают нахождение углов между токами и напряжениями, делают все соотношения более наглядными и помогают находить ошибки при аналитическом расчете, если последние возникнут.

**§ 6.8. Соединение звезда — звезда с нулевым проводом.** Если нулевой провод в схеме рис. 6.7 обладает весьма малым сопротивлением, то потенциал точки $O'$ практически равен потенциалу точки $O$; точки $O'$ и $O$ фактически представляют собой одну точку. При этом в схеме образуются три обособленных контура, через которые проходят токи $\dot{I}_A = \dot{E}_A/Z_A$; $\dot{I}_B = \dot{E}_B A/Z_B$; $\dot{I}_C = \dot{E}_C/Z_C$.

По первому закону Кирхгофа ток в нулевом проводе равен геометрической сумме фазовых токов:

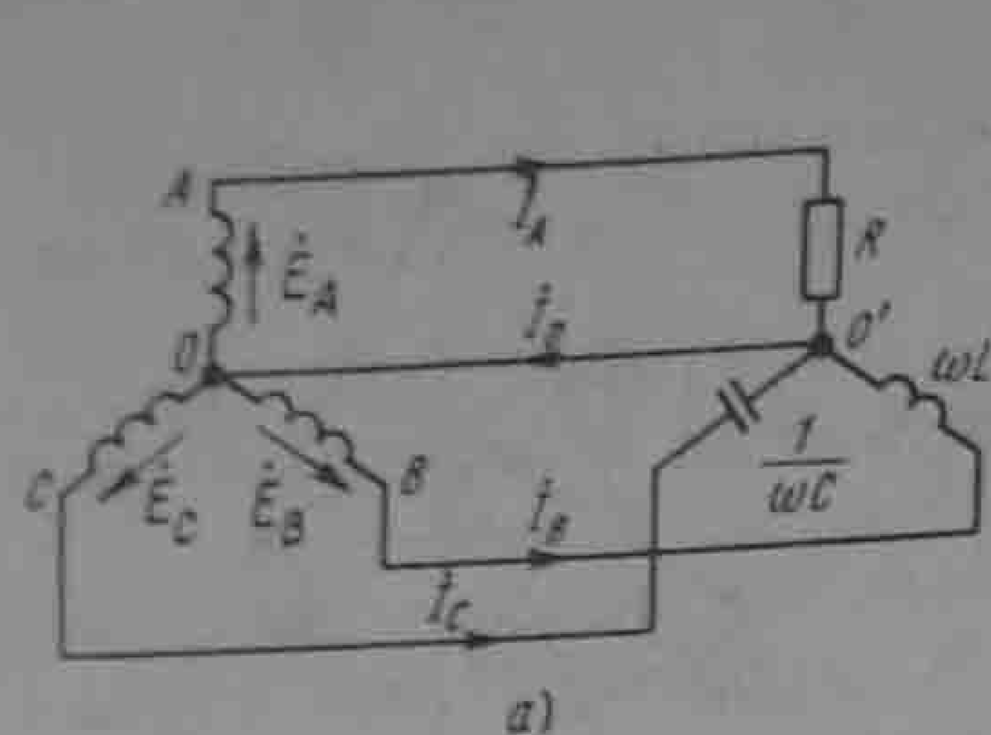
$$\dot{I}_0 = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C. \qquad (6.3)$$

Если $Z_A = Z_B = Z_C$ (такую нагрузку называют равномерной), то ток $I_0$ равен нулю и нулевой провод может быть изъят из схемы без изменения режима ее работы.

При неравномерной нагрузке фаз ток $\dot{I}_0$ в общем случае не равен нулю.

При наличии в нулевом проводе некоторого сопротивления расчет схемы производят методом узловых потенциалов.

**Пример 59.** В схеме рис. 6.12, *а* ЭДС каждой фазы трехфазного генератора равна 127 В. Сопротивления фаз нагрузки равны по модулю (6,35 Ом), но имеют различный характер: $Z_A = R$, $Z_B = j\omega L$; $Z_C = -j/\omega C$. Определить ток в нулевом проводе.



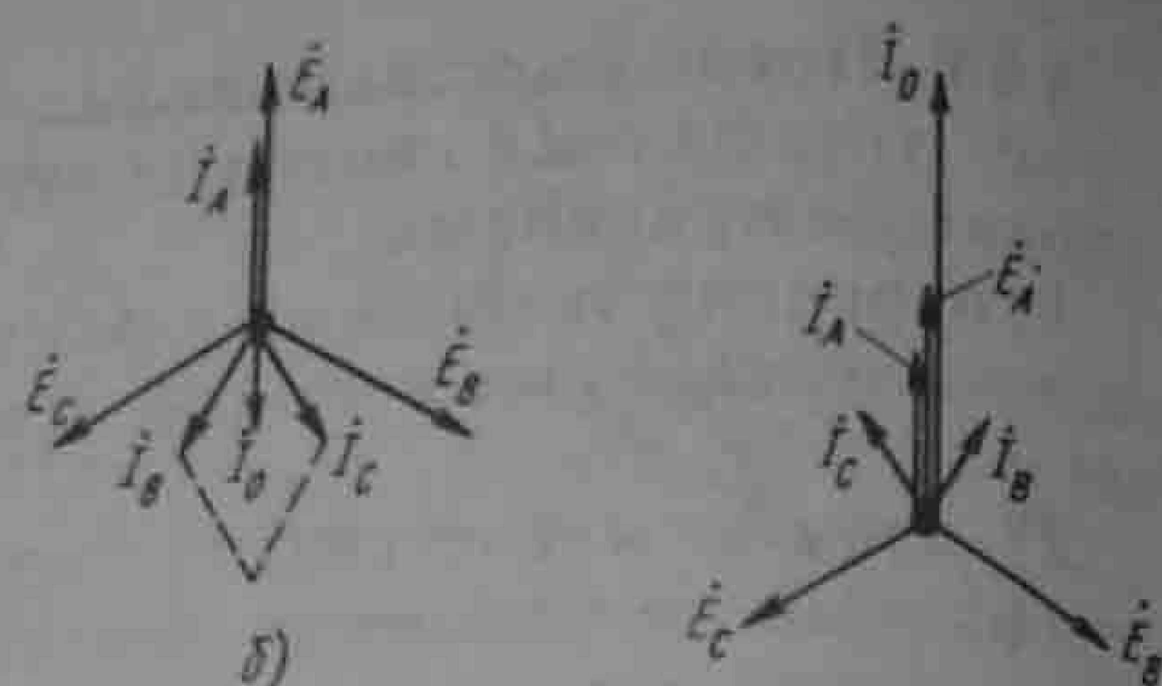




Рис. 6.12

Рис. 6.13

Решение. Построим векторную диаграмму рис. 6.12, *б*. Токи всех фаз по модулю равны $127/6{,}35 = 20$ А. Ток $\dot{I}_A$ совпадает по фазе с $\dot{E}_A$. Ток $\dot{I}_B$ на 90° отстает от $\dot{E}_B$. Ток $\dot{I}_C$ опережает $\dot{E}_C$ на 90°. Сумма $\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C$ дает вектор тока $\dot{I}_0$. По модулю он равен 14,6 А.

**Пример 60.** Какое значение должно иметь сопротивление в фазе *A* схемы рис. 6.12, *а*, чтобы ток в нулевом проводе стал равным нулю?

Решение. Геометрическая сумма токов $\dot{I}_B + \dot{I}_C$ по модулю равна

$$2 \cdot 20 \cos 30^\circ = 20\sqrt{3}\ \text{А}.$$

Ток в нулевом проводе равен нулю, если ток $\dot{I}_A$, направленный противоположно сумме $\dot{I}_B + \dot{I}_C$, по модулю равен $20\sqrt{3}$ А. При этом сопротивление фазы $A$ $R = E/20\sqrt{3} = 127/20\sqrt{3} = 3{,}66$ Ом.

**Пример 61.** Определить ток в нулевом проводе схемы рис. 6.12, *а*, если в фазу *A* включить активное сопротивление 3,66 Ом, а индуктивность и емкость фаз *B* и *C* поменять местами; $\omega L = \frac{1}{\omega C} = 6{,}35$ Ом.

Решение. Векторная диаграмма изображена на рис. 6.13. Из нее следует, что $I = 34{,}6 + 34{,}6 = 69{,}2$ А.

**§ 6.9. Соединение нагрузки треугольником.** Выберем направление токов в фазах треугольника в соответствии с рис. 6.9, *а*. Ток $\dot{I}_{AB}$ вызывается напряжением $\dot{U}_{AB}$. Модуль и фаза его относительно напряжения $\dot{U}_{AB}$ определяются сопротивлением нагрузки $Z_{AB}$. Ток $\dot{I}_{BC}$ вызван напряжением $\dot{U}_{BC}$. Модуль и фаза его относительно $\dot{U}_{BC}$ определяются сопротивлением $Z_{BC}$. Ток $\dot{I}_{CA}$ вызван напряжением $\dot{U}_{CA}$ и зависит от сопротивления $Z_{CA}$. Линейные токи вычислим через фазовые токи по первому закону Кирхгофа:

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{AB} - \dot{I}_{CA};$$
$$\dot{I}_B = \dot{I}_{BC} - \dot{I}_{AB}; \qquad (6.4)$$
$$\dot{I}_C = \dot{I}_{CA} - \dot{I}_{BC}.$$

При равномерной нагрузке фаз линейные токи по модулю в $\sqrt{3}$ раз больше фазовых токов нагрузки. При неравномерной нагрузке линейные токи могут быть и больше и меньше фазовых токов нагрузки.



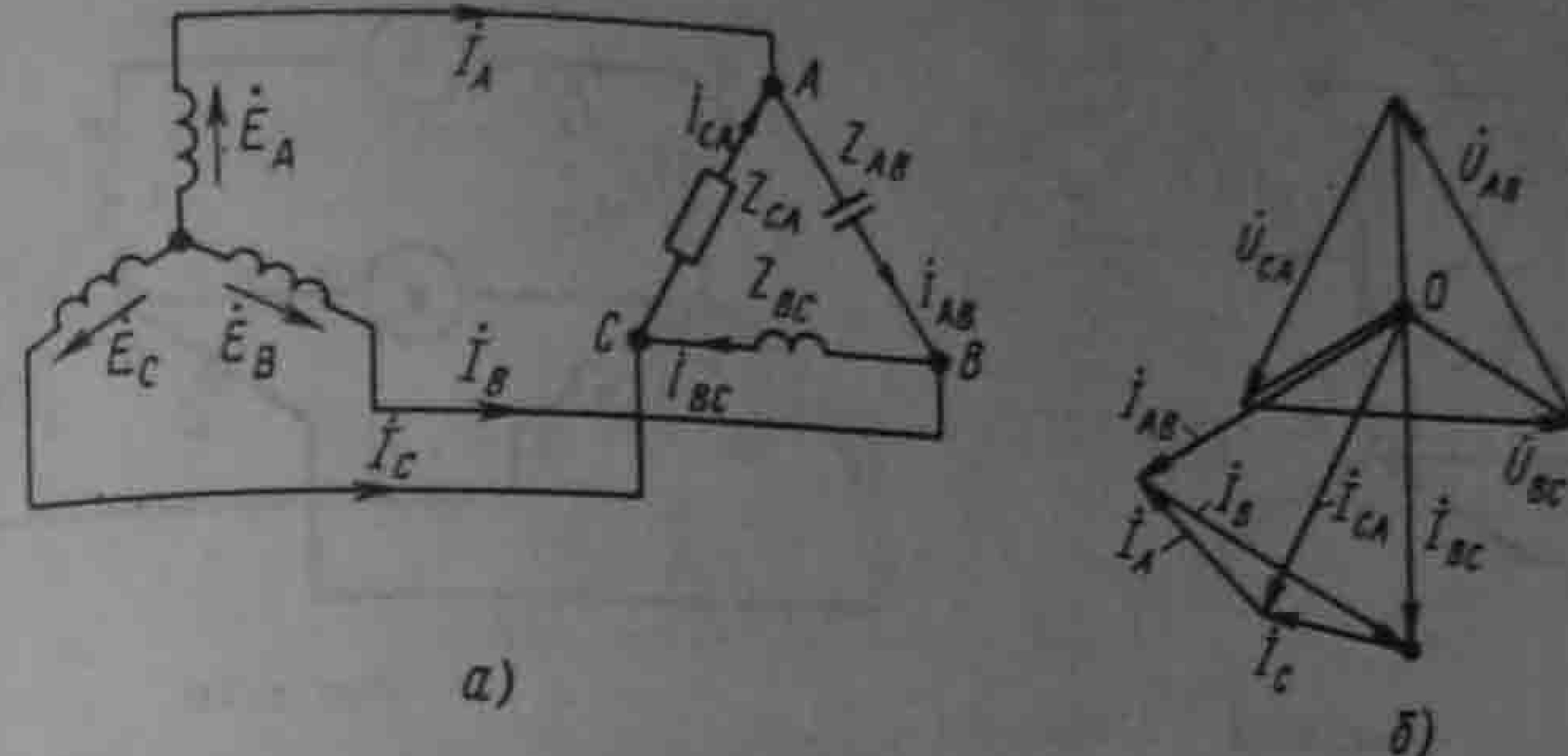



Рис. 6.14

**Пример 62.** В схеме рис. 6.14, *а* $Z_{AB} = -19j$; $Z_{BC} = 19j$; $Z_{CA} = 19$ Ом. ЭДС каждой фазы генератора 220 В. Определить все токи и построить векторную диаграмму.

Решение. Векторная диаграмма построена на рис. 6.14, *б*. Напряжения на фазах нагрузки в $\sqrt{3}$ раз больше фазовых ЭДС генератора и равны $220\sqrt{3} = 380$ В. Ток $\dot{I}_{AB}$ опережает напряжение $\dot{U}_{AB}$ на 90° и равен $30/19 = 20$ А. Ток $\dot{I}_{BC}$ отстает от $\dot{U}_{BC}$ на 90° и также равен 20 А. Ток $\dot{I}_{CA}$ по модулю равен 20 А и совпадает по фазе с напряжением $\dot{U}_{CA}$. Линейные токи $\dot{I}_A$, $\dot{I}_B$, $\dot{I}_C$ найдем графическим путем, используя соотношения (6.4). По модулю, $I_A = I_C \approx 10$ А; $I_B = 20$ А.

**§ 6.10 Оператор *a* трехфазной системы.** Условимся комплексное число $e^{j120^\circ}$, по модулю равное единице, обозначать *a* и называть *оператором* трехфазной системы. Тогда

$$e^{j240^\circ} = (e^{j120^\circ})^2 = a^2.$$

Три вектора: $1$, $a$ и $a^2$ образуют симметричную трехфазную систему (рис. 6.15):

$$1 + a + a^2 = 0. \qquad (6.5)$$

Умножение какого-либо вектора на *a* поворачивает его без изменения модуля на угол 120° против часовой стрелки. Умножение вектора на $a^2$ поворачивает его на угол 240° против часовой стрелки, или, что то же самое, поворачивает его по часовой стрелке на 120°.

С помощью оператора *a* можно выразить ЭДС $E_B$ и $E_C$ симметричной трехфазной системы через ЭДС $\dot{E}_A$:

$$\dot{E}_B = a^2\dot{E}_A; \quad \dot{E}_C = a^2\dot{E}_A. \qquad (6.6)$$

**§ 6.11 Соединение звезда — звезда без нулевого провода.** На рис. 6.8 представлена схема с двумя узлами (точки *O* и *O'*). Для расчета токов в ней целесообразно пользоваться методом двух узлов (см. § 1.21). Напряжение между двумя узлами

$$\dot{U}_{O'O} = \frac{\dot{E}_A Y_A + \dot{E}_B Y_B + \dot{E}_C Y_C}{Y_A + Y_B + Y_C} = \frac{\dot{E}_A (Y_A + a^2 Y_B + a Y_C)}{Y_A + Y_B + Y_C}. \qquad (6.7)$$

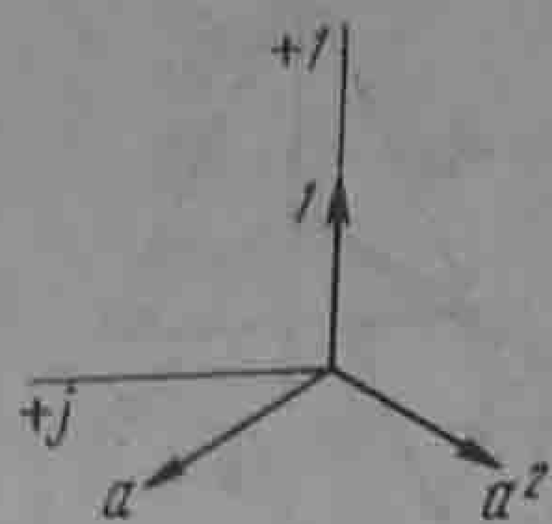



Рис. 6.15

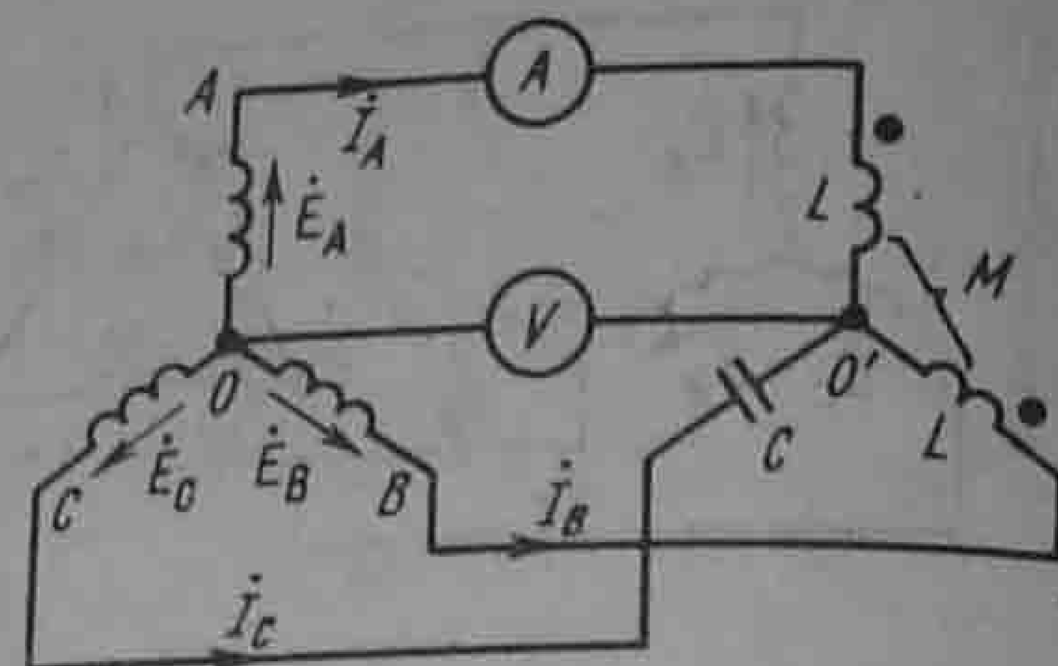



Рис. 6.16

Если нагрузка равномерна ($Y_A = Y_B = Y_C$), то [см. соотношение (6.5)]

$$\dot{U}_{O'O} = \frac{\dot{E}_A Y_A (1 + a + a^2)}{3Y_A} = 0$$

и напряжение на каждой фазе нагрузки равно соответствующей ЭДС:

$$\dot{U}_{AO'} = \dot{E}_A;\ \dot{U}_{BO'} = \dot{E}_B;\ \dot{U}_{CO'} = \dot{E}_C.$$

Если нагрузка неравномерна, то $\dot{U}_{O'O} \neq 0$ и

$$\dot{U}_{AO'} = \dot{E}_A - \dot{U}_{O'O};\ \dot{U}_{BO'} = \dot{E}_B - \dot{U}_{O'O};\ \dot{U}_{CO'} = \dot{E}_C - \dot{U}_{O'O}.$$

Токи в фазах нагрузки:

$$\dot{I}_A = \dot{U}_{AO'}/Z_A;\ \dot{I}_B = \dot{U}_{BO'}/Z_B;\ \dot{I}_C = \dot{U}_{CO'}/Z_C.$$

Если в двух фазах нагрузка одинакова, например $Z_B = Z_C \neq Z_A$, то формула (6.7) после преобразований имеет следующий вид:

$$\dot{U}_{O'O} = \dot{E}_A \frac{Z_B - Z_A}{Z_B + 2Z_A}. \qquad (6.8)$$

**§ 6.12. Трехфазные цепи при наличии взаимоиндукции.** Расчет трехфазных цепей, содержащих магнитно-связанные катушки, осуществляют так же, как и расчет магнитно-связанных цепей однофазного синусоидального тока.

**Пример 63.** Определить показания амперметра и вольтметра в схеме рис. 6.16. Построить топографическую диаграмму, совместив ее с векторной диаграммой токов. Дано: $E_ф = 127$ В; $\omega L = 1/\omega C = 4$ Ом; $\omega M = 2$ Ом.

Р е ш е н и е. Выберем положительные направления токов в соответствии с рис. 6.16. По первому закону Кирхгофа, $\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0$.

Примем ЭДС $\dot{E}_A$, направленной по оси, + 1. Составим уравнение по второму закону Кирхгофа для контура $OAO'BO$:

$$\dot{I}_A j\omega L + \dot{I}_B j\omega M - (\dot{I}_B j\omega L + \dot{I}_A j\omega M) = \dot{U}_{AB}.$$



После подстановки числовых значений получим

$$2j(\dot{I}_A - \dot{I}_B) = 220e^{j30°} \text{ или } \dot{I}_A - \dot{I}_B = \frac{220e^{j30°}}{2e^{j90°}} = 110e^{-j60°} \text{ А.}$$

Для контура $OCO'BO$

$$\dot{I}_C\left(-\frac{j}{\omega C}\right) - (\dot{I}_B j\omega L + \dot{I}_A j\omega M) = \dot{U}_{CB}$$

или

$$-4j\dot{I}_C - 2j\dot{I}_A - 4j\dot{I}_B = 220j.$$

Совместное решение трех уравнений дает

$$\dot{I}_A = 110;\ \dot{I}_B = 110e^{j60°};\ \dot{I}_C = 110\sqrt{3}\,e^{-j150°} \text{ А.}$$

Топографическая диаграмма, совмещенная с векторной диаграммой токов, изображена на рис. 6.17. Амперметр показывает 110 А, вольтметр — приблизительно 640 В. Последний результат получен после подсчета $\varphi_{O'}$ по формуле

$$\varphi_{O'} = \varphi_O + \dot{E}_A - \dot{I}_A j\omega L - \dot{I}_B j\omega M.$$

**§ 6.13. Активная, реактивная и полная мощности трехфазной системы.** Под *активной мощностью* трехфазной системы понимают сумму активных мощностей фаз нагрузки и активной мощности в сопротивлении, включенном в нулевой провод:

$$P = P_A + P_B + P_C + P_0. \qquad (6.9)$$

*Реактивная мощность* трехфазной системы представляет собой сумму реактивных мощностей фаз нагрузки и реактивной мощности в сопротивлении, включенном в нулевой провод:

$$Q = Q_A + Q_B + Q_C + Q_0. \qquad (6.10)$$

Полная мощность

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}. \qquad (6.11)$$

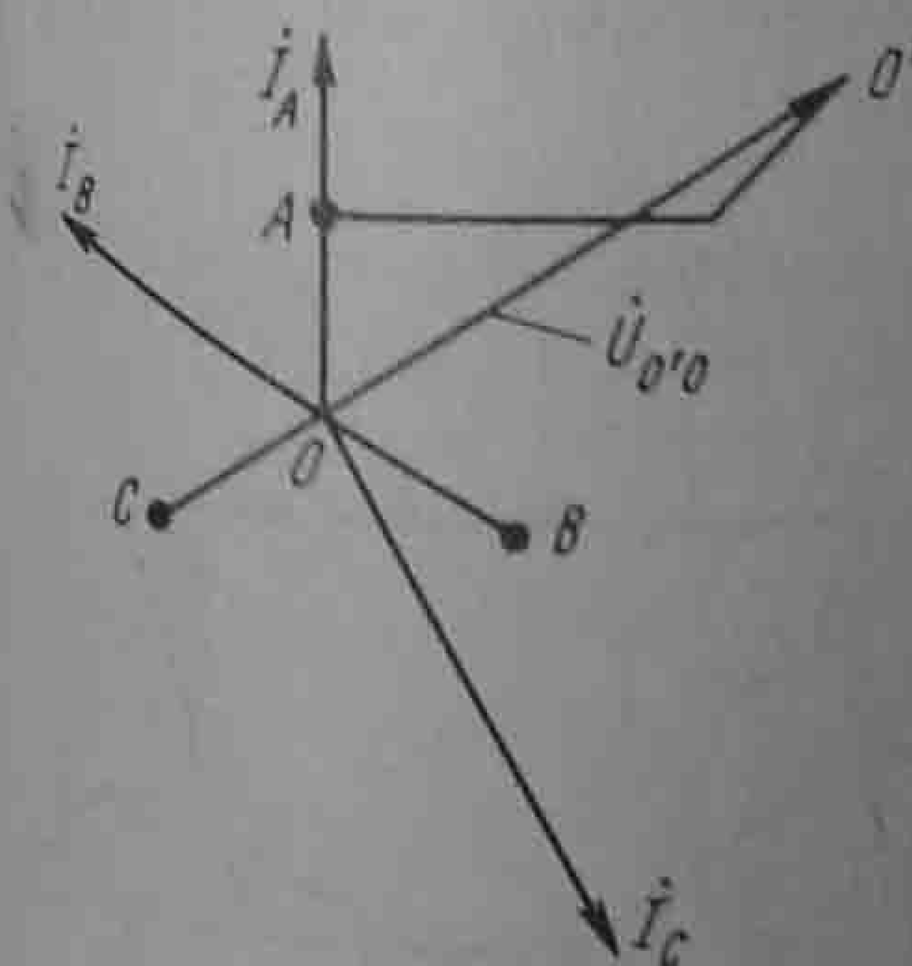



Рис. 6.17

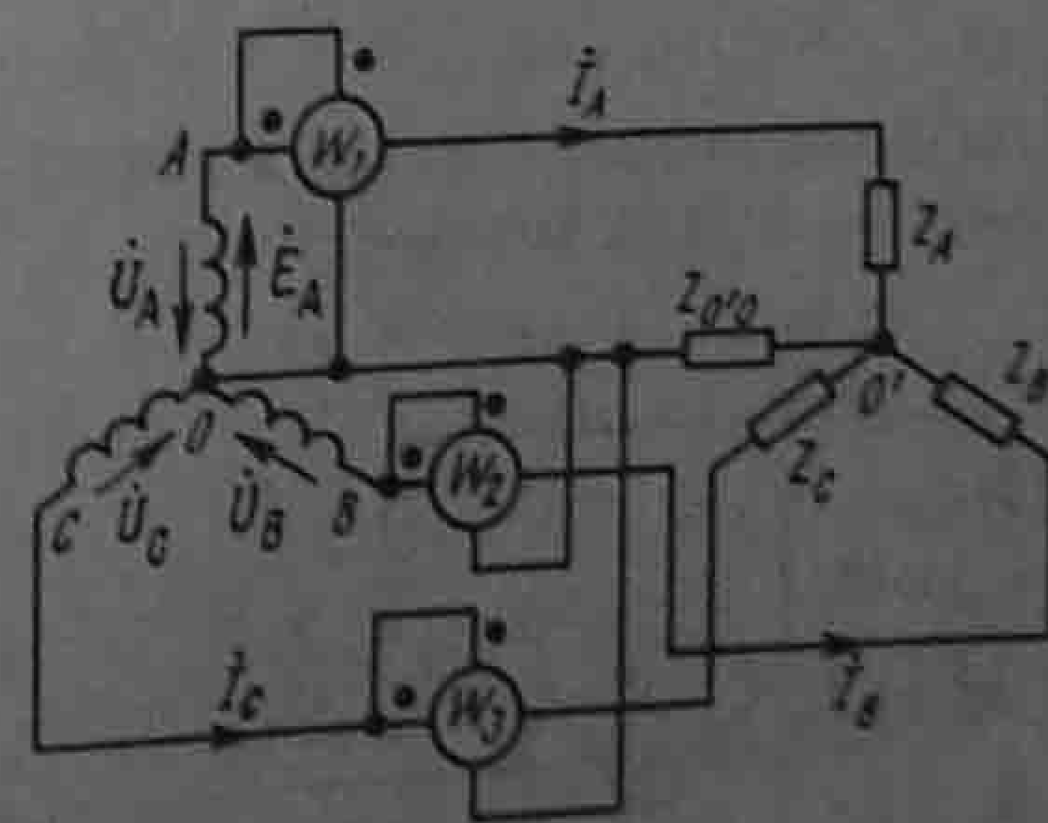



Рис. 6.18

Если нагрузка равномерная, то

$$P_0 = Q_0 = O;\ P_A = P_B = P_C = U_ф I_ф \cos\varphi_ф;$$
$$Q_A = Q_B = Q_C = U_ф I_ф \sin\varphi_ф,$$

где $\varphi_ф$ — угол между напряжением $\dot{U}_ф$ на фазе нагрузки и током $I_ф$ фазы нагрузки.

При равномерной нагрузке фаз

$$P = 3U_ф I_ф \cos\varphi_ф;\quad Q = 3U_ф I_ф \sin\varphi_ф;\quad S = 3U_ф I_ф. \tag{6.12}$$

При равномерной нагрузке фаз независимо от способа ее соединения (звездой или треугольником)

$$3U_ф I_ф = \sqrt{3}\sqrt{3}\,U_ф I_ф = \sqrt{3}\,U_л I_л, \tag{6.13}$$

где $U_л$ — линейное напряжение на нагрузке; $I_л$ — линейный ток нагрузки.

Поэтому вместо формул (6.12) часто используют следующие:

$$P = \sqrt{3}U_л I_л \cos\varphi_ф;$$
$$Q = \sqrt{3}U_л I_л \sin\varphi_ф;$$
$$S = \sqrt{3}U_л I_л. \tag{6.14}$$

**§ 6.14. Измерение активной мощности в трехфазной системе.** Для измерения активной мощности трехфазной системы в общем случае (неравномерная нагрузка и наличие нулевого провода) необходимо включить три ваттметра (рис. 6.18). Активная мощность системы равна сумме показаний трех ваттметров. Если нулевой провод отсутствует, то измерение мощности производят двумя ваттметрами (рис. 6.19). Сумма показаний двух ваттметров при этом определяет активную мощность всей системы независимо от того, звездой или треугольником соединена нагрузка (треугольник нагрузки всегда может быть преобразован в эквивалентную звезду).

Показание первого ваттметра равно $\mathrm{Re}\,\dot{U}_{AC}\overset{*}{I}_A$, второго — $\mathrm{Re}\,\dot{U}_{BC}\overset{*}{I}_B$, но

$$\mathrm{Re}\{\dot{U}_{AC}\overset{*}{I}_A + \dot{U}_{BC}\overset{*}{I}_B\} = \mathrm{Re}\{(\dot{U}_A - \dot{U}_C)\overset{*}{I}_A + (\dot{U}_B - \dot{U}_C)\overset{*}{I}_B\} = \mathrm{Re}(\dot{U}_A\overset{*}{I}_A + \dot{U}_B\overset{*}{I}_B + \dot{U}_C\overset{*}{I}_C),$$

так как $\overset{*}{I}_A + \overset{*}{I}_B = -\overset{*}{I}_B$.

При равномерной нагрузке фаз достаточно измерить мощность одной фазы и результат утроить.

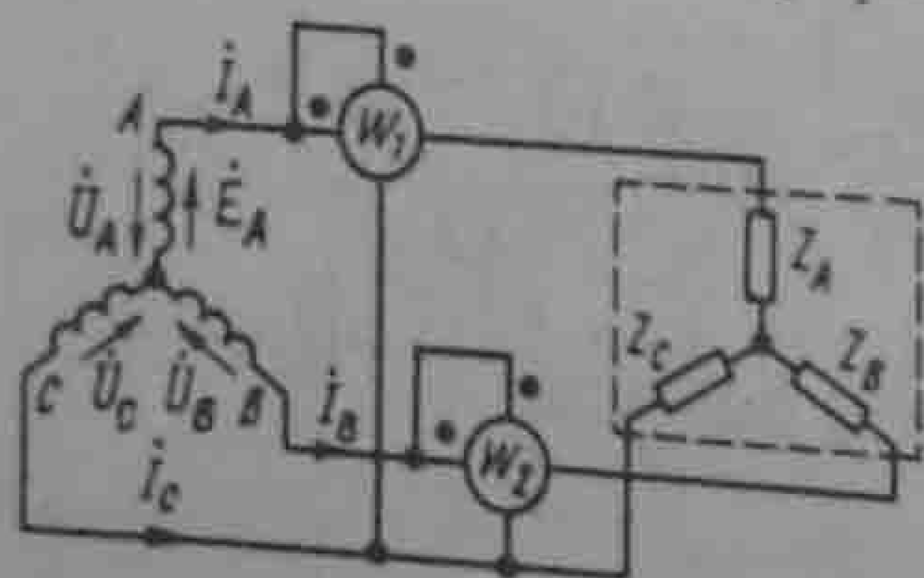



Рис. 6.19

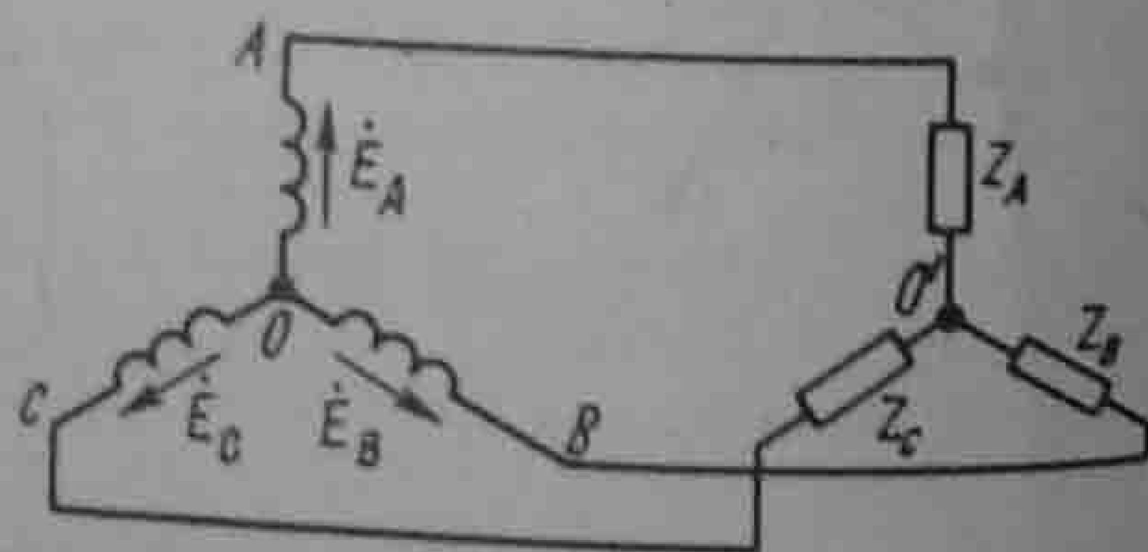



Рис. 6.20



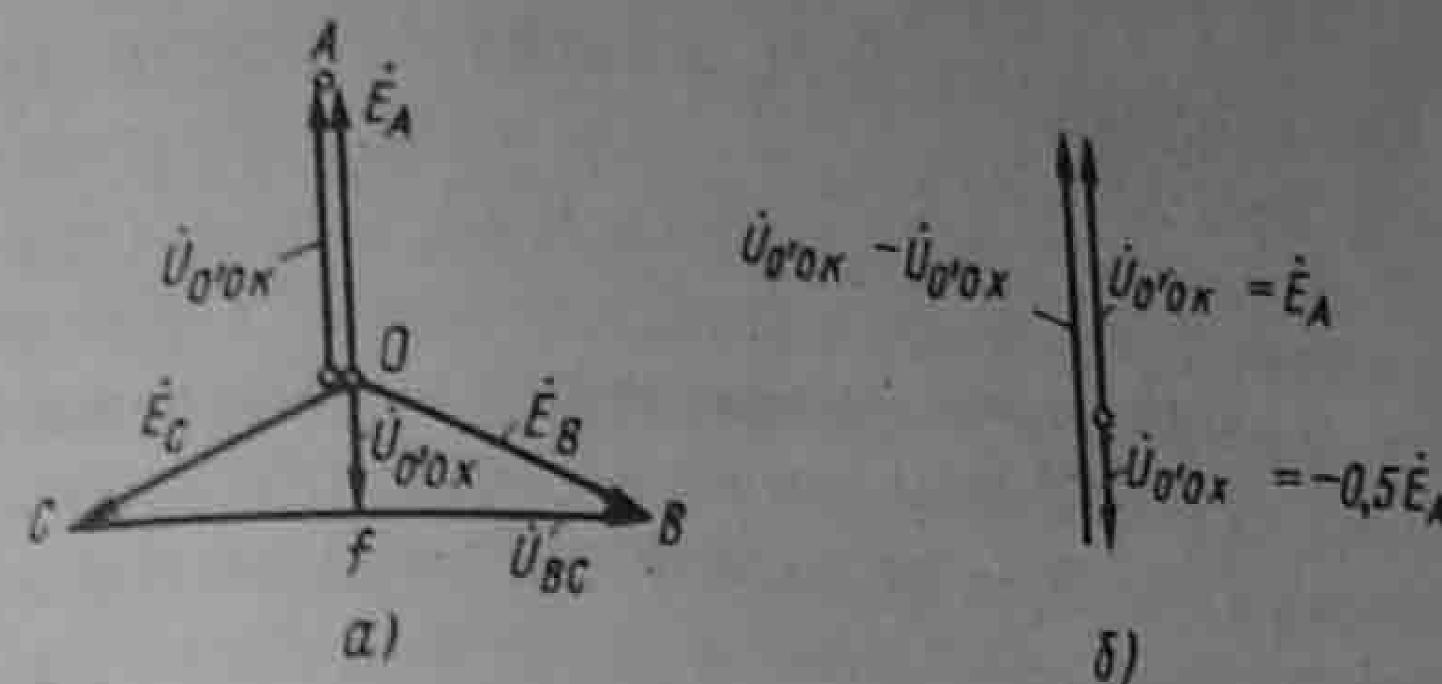


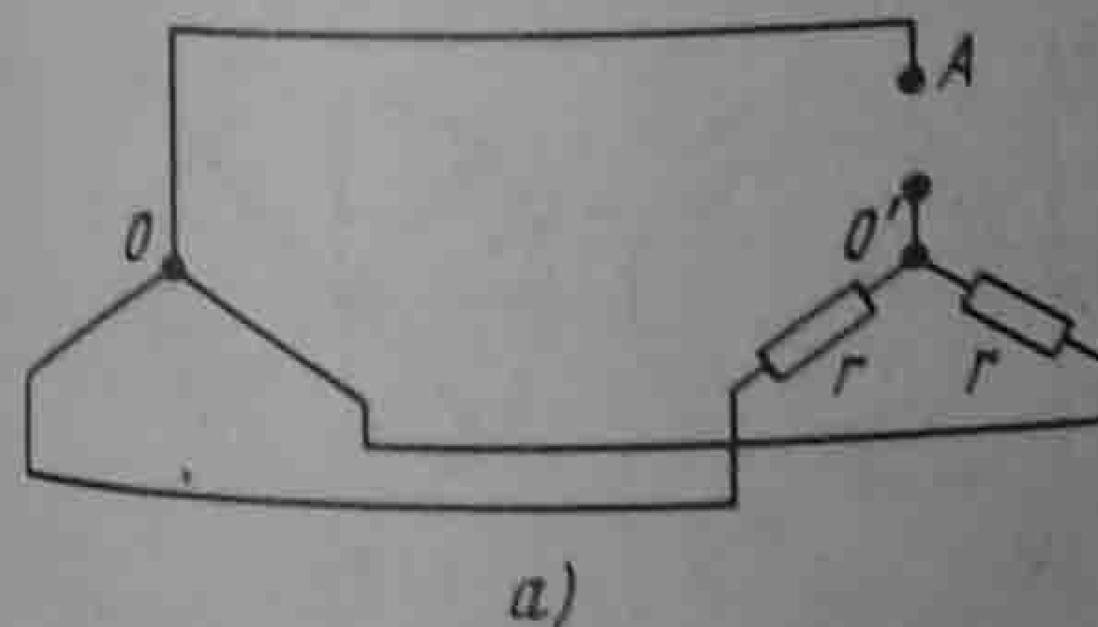

Рис. 6.21

**§ 6.15. Круговые и линейные диаграммы в трехфазных цепях.** Если изменяется модуль сопротивления одной из фаз трехфазной цепи, а аргумент его постоянен, то геометрическим местом концов векторов напряжения (тока) любой фазы цепи является окружность или прямая линия.

Для примера рассмотрим круговую диаграмму напряжений по схеме рис. 6.20, если $Z_B = Z_C = r = \mathrm{const}$ и изменяется только модуль сопротивления фазы $A(Z_A)$.

Используем формулу (4.40), заменив в ней индексы $a$ и $b$ на $O'$ и $O$. В режиме холостого хода ток по фазе $A$ равен нулю, а напряжения на двух сопротивлениях $Z_B = Z_C = r$ равны $\dot{U}_{BC}/2$. При этом точка $O'$ находится посередине вектора $\dot{U}_{BC}$ (точка $f$ на рис. 6.21, $a$); $\dot{U}_{O'Ox} = -0{,}5\,\dot{E}_A$. При коротком замыкании сопротивления $Z_A$ потенциал точки $O'$ равен потенциалу точки $A$. Поэтому $\dot{U}_{O'Ok} = \dot{E}_A$. Хордой искомой окружности является разность векторов (рис. 6.21, б) $\dot{U}_{O'Ok} - \dot{U}_{O'Ox} = \dot{E}_A - (-0{,}5\dot{E}_A) = 1{,}5\dot{E}_A$. Для определения входного сопротивления $Z_{вх}$ относительно точек $A$ и $O'$ служит схема рис. 6.22, $a$ (источники ЭДС закорочены). Два сопротивления $r$ включены параллельно, поэтому $Z_{вх} = r/2$ и $\varphi_{вх} = 0$.

Рассмотрим три случая, отличающихся характером сопротивления $Z_A$.



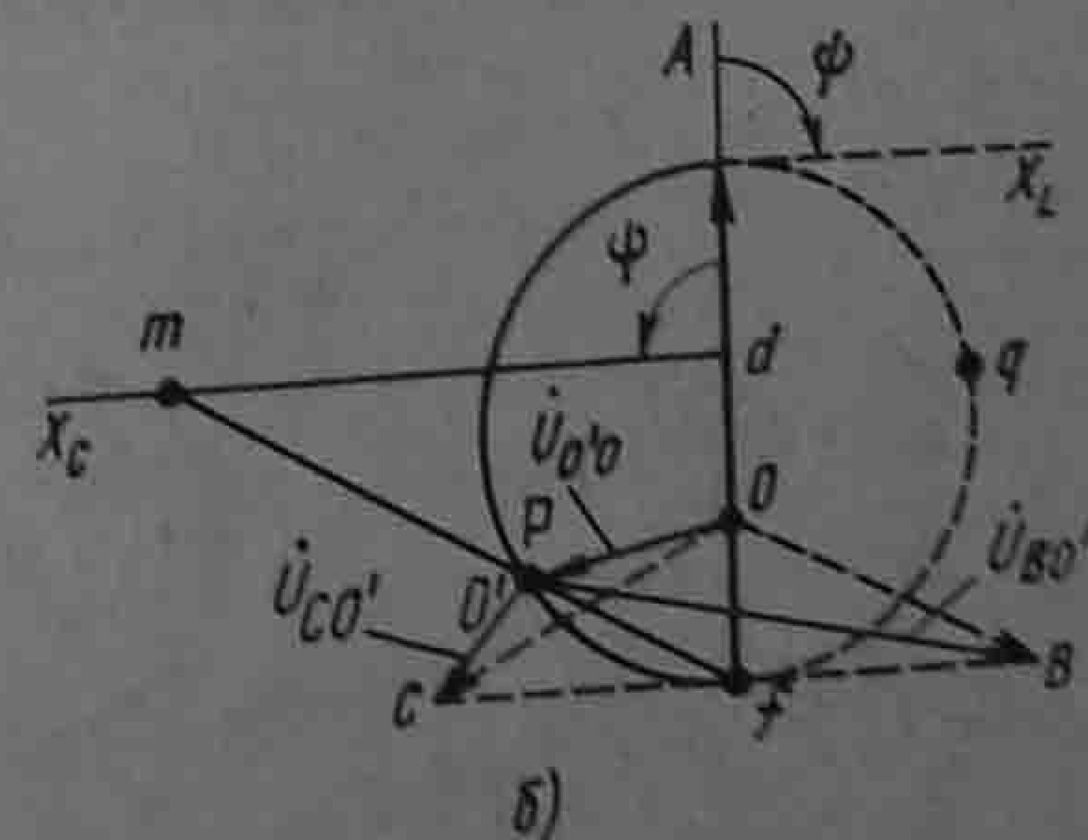




Рис. 6.22

1. Если $Z_A$ — изменяющееся емкостное сопротивление, то $Z_A = -j/\omega C$; $\varphi_н = -90°$; $\psi = \varphi_н - \varphi_{вх} = -90°$. Круговая диаграмма напряжения $\dot{U}_{O'O}$ построена на рис. 6.22, *б*, где линия $X_C$ проведена по отношению к хорде под углом $\psi = 90°$. Масштаб для $X_C$ соответствует масштабу, в котором отрезок $fd$ выражает входное сопротивление $Z_{вх} = r/2$. Геометрическим местом точки $O'$ является полуокружность $fpA$. Для определения модуля и фазы $\dot{U}_{O'O}$ при некотором произвольном значении $X_C$ его следует отложить на линии $md$ и провести луч $fm$. Точка пересечения луча $fm$ с полуокружностью $fpA$ обозначена $p$. Напряжение $\dot{U}_{O'O}$, соответствующее взятому значению $X_C$, изобразится вектором, проведенным из точки $O$ в точку $p$.

2. Если $Z_A$ — изменяющееся индуктивное сопротивление, то $\psi = 90°$ и геометрическим местом концов вектора $\dot{U}_{O'O}$ является полуокружность $fqA$ (изображена пунктиром на рис. 6.22, *б*). Линия переменного параметра в этом случае будет справа от точки $d$.

3. Если $Z_A$ — чисто активное сопротивление, то $\psi = \varphi_н - \varphi_{вх} = 0$ и геометрическим местом концов вектора $\dot{U}_{O'O}$ является прямая $Af$.

**§ 6.16. Указатель последовательности чередования фаз.** Определение последовательности чередования фаз в трехфазной симметричной системе ЭДС (напряжений) осуществляют с помощью указателя последовательности чередования фаз. В простейшем исполнении он состоит из двух одинаковых ламп накаливания и конденсатора (рис. 6.23).

Емкость $C$ берут такой, чтобы емкостное сопротивление равнялось резистивному сопротивлению каждой лампы.

Если три конца указателя подключить к трем концам симметричной трехфазной системы ЭДС, то потенциал нулевой точки схемы на рис. 6.23 будет соответствовать положению точки $O'$ на векторной диаграмме рис. 6.22, *б*.

На диаграмме рис. 6.22, *б* видно, что напряжение на лампах накаливания будет различно. На лампе, включенной в фазу $B$, оно

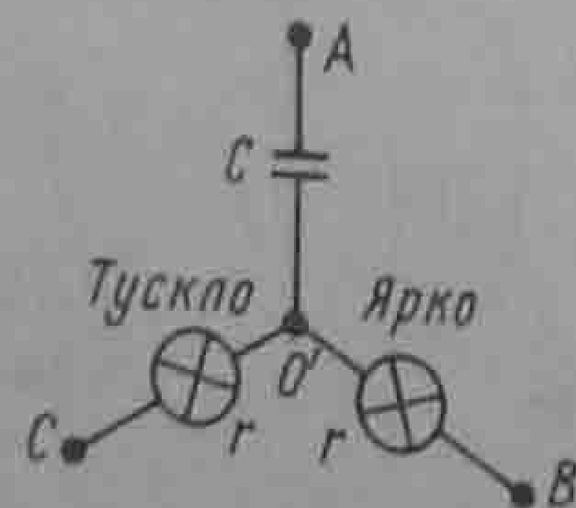


Рис. 6.23

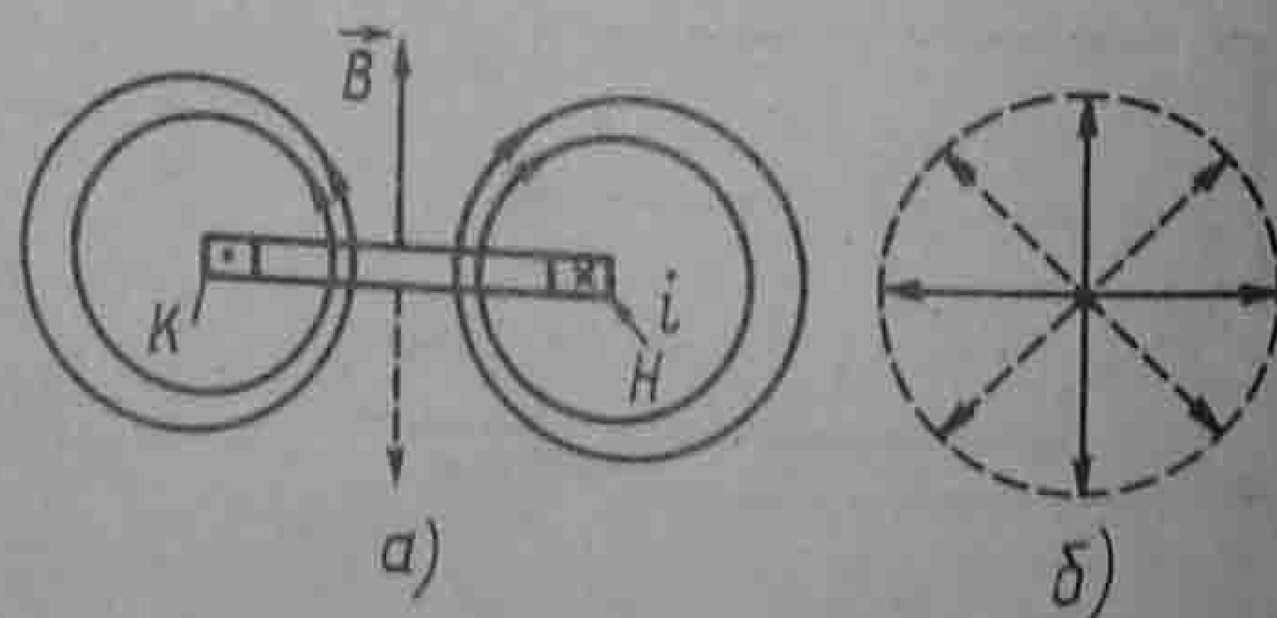


Рис. 6.24



определяется вектором $\dot{U}_{BO'}$; на лампе, включенной в фазу $C$, — вектором $\dot{U}_{CO'}$. Так как $U_{BO'} > U_{CO'}$, то лампа в фазе $B$ будет гореть более ярко, чем лампа в фазе $C$. Следовательно, *если фазу трехфазной системы ЭДС, к которой подключен конденсатор, принять за фазу A, то фаза, к которой окажется подключенной ярко горящая лампа, есть фаза B, а фаза с тускло горящей лампой — фаза C.*

Одним из важнейших свойств многофазных и, в частности, трехфазных токов является их способность создавать круговое вращающееся магнитное поле.

**§ 6.17. Магнитное поле катушки с синусоидальным током.** Магнитное поле одной катушки, по которой протекает синусоидальный ток, представляет собой пульсирующее[1] (не вращающееся) магнитное поле. На рис. 6.24, *а* изображена катушка, по которой проходит синусоидальный ток $i = I_m \sin \omega t$. Магнитное поле характеризуется вектором магнитной индукции $\vec{B}$. Направление $\vec{B}$ определяется направлением намотки катушки и направлением тока в ней в данный момент времени. Пусть буква $H$ означает начало, а $K$ — конец катушки. Если ток входит в зажим $H$ и выходит из зажима $K$ (это направление тока будем считать положительным: ему соответствует интервал времени от 0 до $\pi$), то вектор магнитной индукции направлен вверх по осевой линии катушки. В следующий полупериод, когда ток отрицателен, вектор $\vec{B}$ направлен вниз (пунктир на рис. 6.24, *а*). Таким образом, геометрическим местом концов вектора $\vec{B}$ является ось катушки.

**§ 6.18. Получение кругового вращающегося магнитного поля.** *Круговое вращающееся магнитное поле* представляет собой магнитное поле, вектор результирующей магнитной индукции которого имеет постоянное значение и вращается с постоянной угловой скоростью $\omega$ (рис. 6.24, *б*).

Расположим три одинаковые катушки так, чтобы их оси были смещены на 120° относительно друг друга (рис. 6.25, *а*). Присоединим катушки к симметричной трехфазной системе ЭДС. Пусть токи входят в начале катушек $H$ и изменяются следующим образом:

$$i_1 = I_m \sin \omega t;$$

$$i_2 = I_m \sin (\omega t - 120°);$$

$$i_3 = I_m \sin (\omega t + 120°).$$

[1] Под пульсирующим полем понимают поле, вектор магнитной индукции которого изменяется (пульсирует) вдоль оси, создающей его катушки с током.

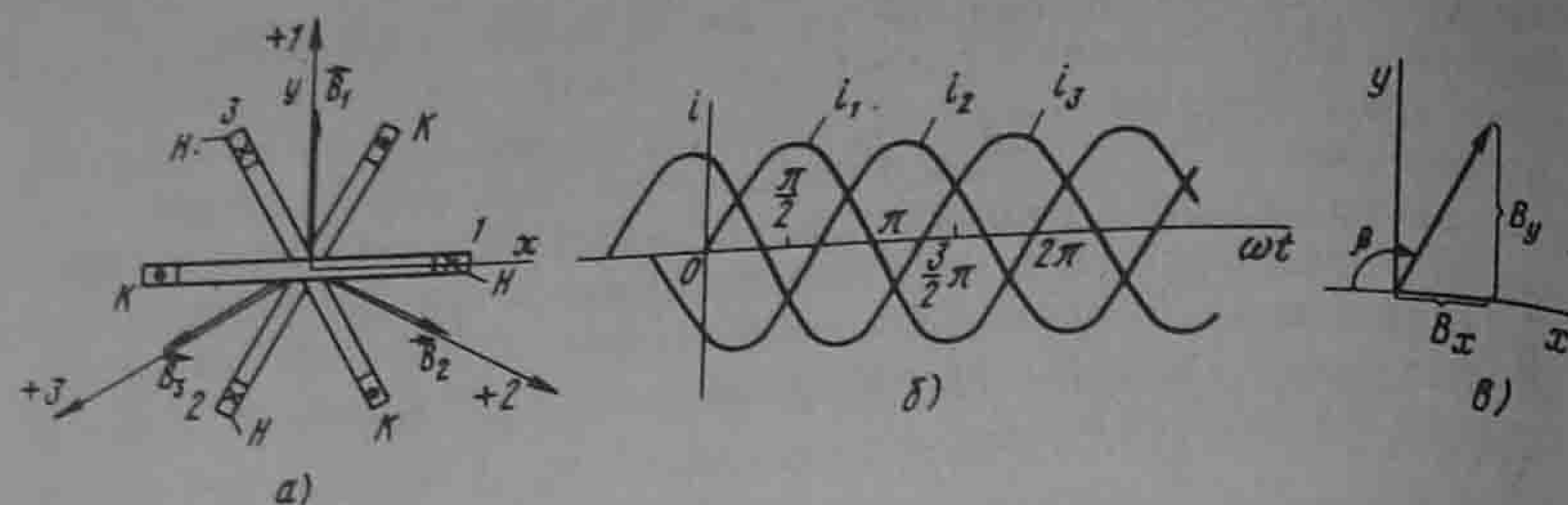



Рис. 6.25

Графики токов изображены на рис. 6.25, *б*. Каждый из токов создает пульсирующее поле, направленное вдоль оси своей катушки.

Положительное направление оси первой катушки обозначим +1, второй — +2, третьей — +3, магнитную индукцию первой катушки обозначим $B_1$, второй — $B_2$, третьей — $B_3$. Тогда

$$B_1 = B_m \sin\omega t;\ B_2 = B_m \sin(\omega t - 120°);$$

$$B_3 = B_m \sin(\omega t + 120°).$$

Изобразим векторами в пространстве мгновенные значения $B_1$, $B_2$, $B_3$ и результирующую индукцию для моментов времени $\omega t = 0$, $\pi/2$, $\pi$, $3\pi/2$ (рис. 6.26, *а — г*). Запишем алгебраическую сумму проекций векторов магнитных индукций $\dot B_1$, $\dot B_2$, $\dot B_3$ на оси *x* и *y* декартовой системы координат (см. рис. 6.25, *в*), совместив ось *x* с осью *l* и ось *y* с осью $+j$:

$$\dot B_x = \dot B_2 \cos 30° - \dot B_3 \cos 30° = 1,5\, \dot B_m j;$$

$$\dot B_y = \dot B_1 - \dot B_2 \cos 60° - \dot B_3 \cos 60° = 1,5\, \dot B_m.$$

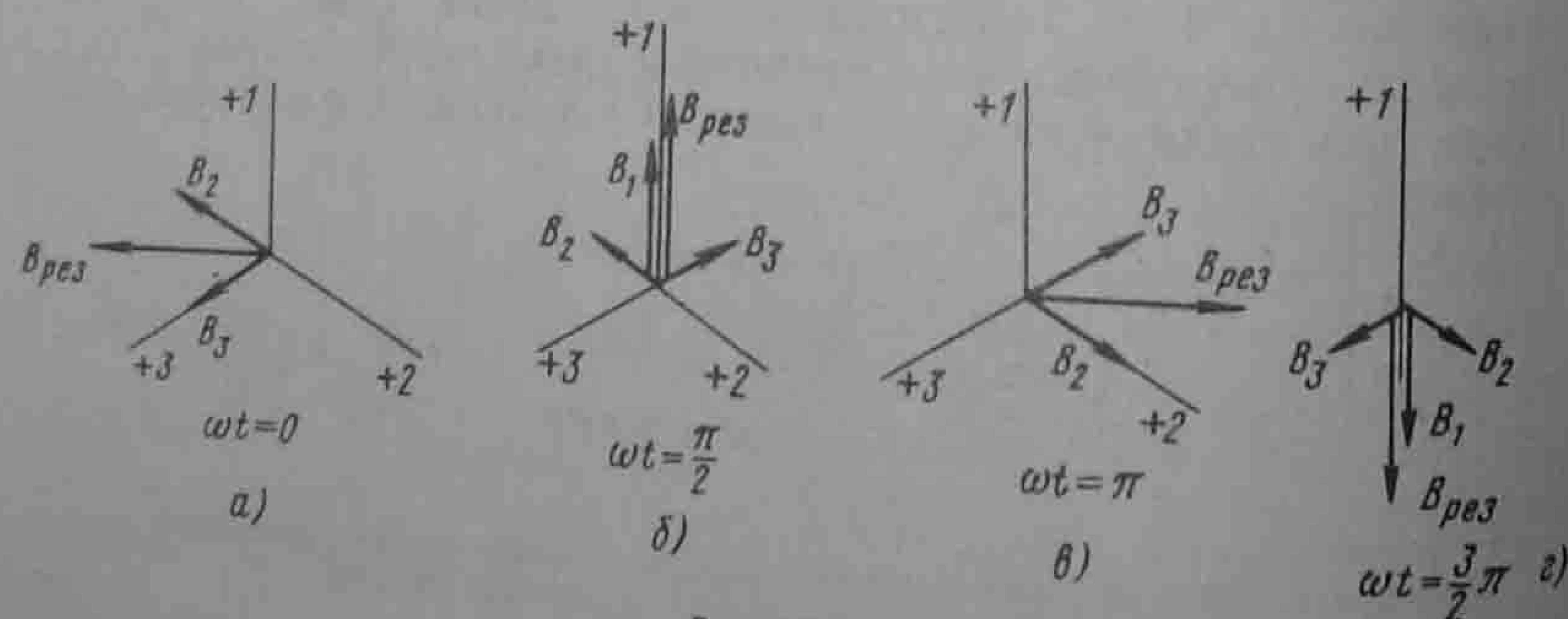



Рис. 6.26



Мгновенные значения проекций векторов магнитной индукции на оси *x* и *y*

$$B_x = -1,5\, B_m \cos\omega t;\ B_y = 1,5\, B_m \sin\omega t.$$

Результирующая индукция по модулю $B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = 1,5 B_m$ и составляет угол β с осью — *x*: $\operatorname{tg}\beta = -B_y/B_x = \operatorname{tg}\omega t$, т. е. угол $\beta = \omega t$.

С увеличением времени вектор результирующей магнитной индукции, оставаясь по модулю равным $3B_m/2$, вращается с угловой скоростью ω по направлению от начала первой катушки с током $I_m \sin\omega t$ к началу второй катушки с током $I_m \sin(\omega t - 120°)$, т. е. вектор результирующей магнитной индукции вращается в сторону катушки с отстающим током.

Если ток $I_m \sin(\omega t - 120°)$ пропустить по третьей, а ток $I_m \sin(\omega t + 120°)$ — по второй катушке, то направление вращения поля изменится на обратное.

Если произойдет обрыв одной из фаз или ток в ней по амплитуде не будет равен току в какой-либо другой фазе или сдвинут по фазе не на 120 °, то образуется *эллиптическое вращающееся поле*. При возникновении его конец вектора результирующей магнитной индукции будет скользить по эллипсу.

Для того чтобы усилить вращающееся магнитное поле, внутрь катушек помещают полый или сплошной ферромагнитный цилиндр, а стороны катушек заключают в пазы внешнего ферромагнитного цилиндра (рис. 6.27).

Вращающееся магнитное поле используют в электрических двигателях.

Обратим внимание на то, что пульсирующее поле (см. § 6.17) можно представить в виде суммы двух вращающихся в противоположные стороны с угловой скоростью ω магнитных полей. Действительно,

$$B_m \sin\omega t = \frac{B_m}{2j}\left(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}\right) = 0,5 B_m \left[e^{j(\omega t - 90°)} + e^{-j(\omega t - 90°)}\right].$$

Вектор $0,5\, B_m\, e^{j(\omega t - 90°)}$ вращается против часовой стрелки, вектор $0,5 B_m\, e^{-j(\omega t - 90°)}$ — по часовой.

**§ 6.19. Принцип работы асинхронного двигателя.** Наиболее распространенным в промышленности типом двигателя переменного тока является трехфазный асинхронный двигатель. В нем имеется неподвижная часть — статор, в пазах которого помещены три катушки, создающие круговое вращающееся магнитное поле, и подвижная часть — ротор, в пазах которого находятся три замкнутые на себя или на внешнее сопротивление катушки (рис. 6.27). Катушки на рис. 6.27 даны вразрез, торцовые части катушек не показаны;

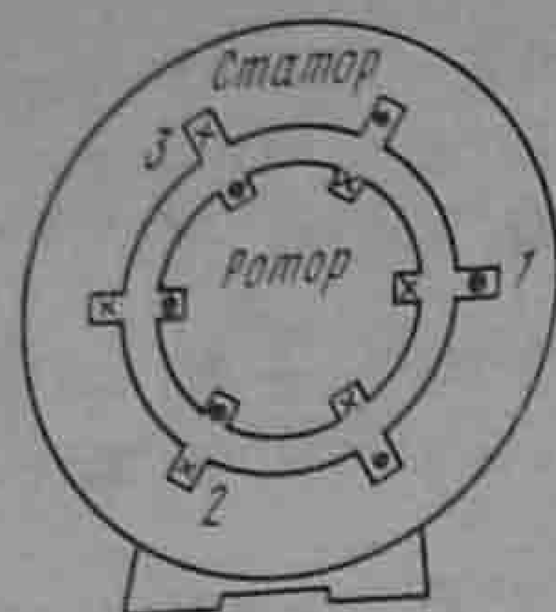



Рис. 6.27

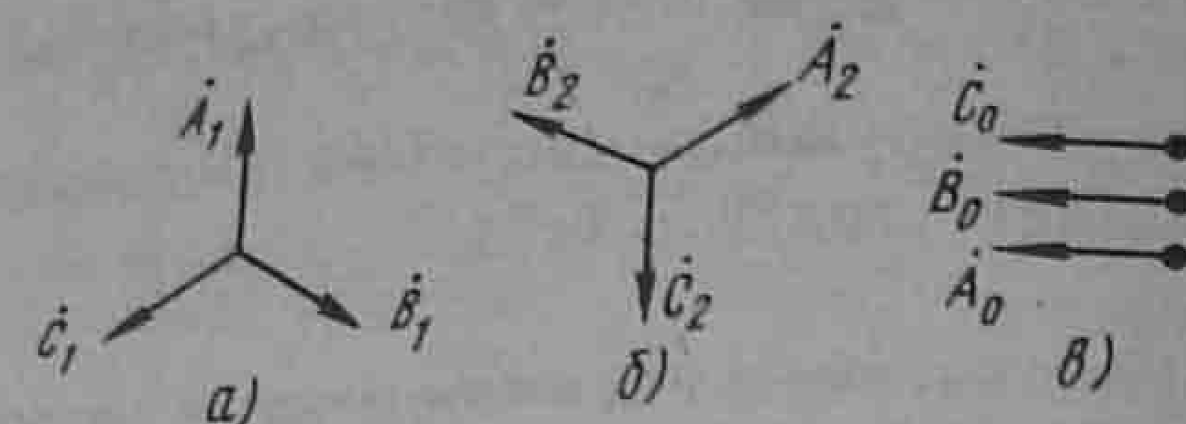



Рис. 6.28

каждая из катушек занимает лишь небольшую часть окружности статора (или ротора). В действительности каждая из катушек (прямые и обратные провода ее) занимает около 1/3 окружности расточки статора (или окружности ротора). Вал ротора двигателя соединен с валом рабочей машины.

Допустим, что сначала ротор неподвижен. При этом вращающееся магнитное поле, созданное обмотками статора, пересекает провода катушек неподвижного ротора с угловой частотой $\omega$ и наводит в них ЭДС. ЭДС вызовут токи в катушках ротора. По закону Ленца, эти токи стремятся своим магнитным полем ослабить вызвавшее их магнитное поле.

Механическое взаимодействие токов ротора с вращающимся магнитным полем приведет к тому, что ротор начнет вращаться в ту же сторону, в какую вращается магнитное поле (в этом можно убедиться, применив правило левой руки).

В установившемся режиме частота вращения ротора $\omega_р$ составляет $(0{,}98 \div 0{,}95)\,\omega$. Двигатель называют асинхронным потому, что ротор его вращается не синхронно с вращающимся полем; $\omega_р$ не может равняться угловой частоте вращающегося поля. Это станет понятно, если учесть, что при $\omega_р = \omega$ вращающееся поле не пересекало бы провода катушек ротора, в них отсутствовал бы ток и ротор не испытывал бы вращающего момента.

В курсе ТОЭ ограничимся качественным рассмотрением основных положений, характеризующих принцип работы асинхронного двигателя. Подробнее эти вопросы изучают в курсе электрических машин.

**§ 6.20. Разложение несимметричной системы на системы прямой, обратной и нулевой последовательностей фаз.** Любую несимметричную систему трех токов, напряжений, потоков одинаковой частоты (обозначим их $\dot A$, $\dot B$, $\dot C$,) можно однозначно представить в виде трех систем: нулевой, прямой и обратной последовательностей фаз.

Система прямой последовательности (рис. 6.28, *а*) состоит из трех векторов $\dot A_1$, $\dot B_1$, $\dot C_1$, равных по модулю и повернутых относительно друг друга на 120 °, причем вектор $\dot B_1$ отстает от вектора $\dot A_1$ на 120 °. Используя оператор $a$ трехфазной системы (см. § 6.10), можно записать:

$$\dot B_1 = a^2 \dot A_1; \tag{6.15}$$



$$\dot C_1 = a \dot A_1.$$

Система обратной последовательности (рис. 6.28, *б*) состоит из векторов $\dot A_2$, $\dot B_2$, $\dot C_2$, равных по модулю и повернутых относительно друг друга на 120 °, причем вектор $\dot B_2$ опережает вектор $\dot A_2$ на 120 °:

$$\dot B_2 = a \dot A_2; \qquad \dot C_2 = a^2 \dot A_2. \tag{6.16}$$

Система нулевой последовательности (рис. 6.28, *в*) образована тремя векторами, совпадающими по фазе:

$$\dot A_0 = \dot B_0 = \dot C_0. \tag{6.17}$$

Выразим заданные три вектора $\dot A$, $\dot B$, $\dot C$ через векторы симметричных систем следующим образом:

$$\dot A = \dot A_0 + \dot A_1 + \dot A_2; \tag{6.18}$$

$$\dot B = \dot B_0 + \dot B_1 + \dot B_2;$$

$$\dot C = \dot C_0 + \dot C_1 + \dot C_2.$$

Перепишем (6.18) с учетом (6.15) и (6.16):

$$\dot A = \dot A_0 + \dot A_1 + \dot A_2; \tag{6.19}$$

$$\dot B = \dot A_0 + a^2 \dot A_1 + a \dot A_2; \tag{6.20}$$

$$\dot C = \dot A_0 + a \dot A_1 + a^2 \dot A_2. \tag{6.21}$$

Из системы уравнений (6.19) — (6.21) найдем $\dot A_0$, $\dot A_1$, $\dot A_2$, через заданные векторы $\dot A$, $\dot B$, $\dot C$. Для определения $\dot A_0$ сложим уравнения (6.19) — (6.21) и учтем, что $1 + a + a^2 = 0$. В результате получим

$$\dot A_0 = \frac{1}{3}(\dot A + \dot B + \dot C). \tag{6.22}$$

Таким образом, для нахождения $\dot A_0$ следует геометрически сложить три заданных вектора и взять одну треть от полученной суммы.

Для нахождения $\dot A_1$ к уравнению (6.19) прибавим уравнение (6.20), умноженное на $a$, и уравнение (6.21), умноженное на $a^2$:

$$\dot A_1 = \frac{1}{3}(\dot A + a\dot B + a^2 \dot C). \tag{6.23}$$

Следовательно, одна треть суммы, состоящей из вектора $\dot A$ плюс вектор $\dot B$ (повернутый против часовой стрелки на 120 °) и плюс вектор $\dot C$ (повернутый по часовой стрелке на 120 °), дает вектор $\dot A_1$.

Для вычисления $\dot A_2$ к уравнению (6.19) прибавим уравнение (6.20), предварительно умноженное на $a^2$, и уравнение (6.11), умноженное на $a$:

$$\dot A_2 = \frac{1}{3}(\dot A + a^2 \dot B + a \dot C). \tag{6.24}$$

**§ 6.21. Основные положения метода симметричных составляющих.** Трехфазные системы передачи электрической энергии состоят из источников энергии, линий передачи, трансформаторов и электродвигателей. В результате какой-либо аварии (например, короткого замыкания или обрыва провода) или при несимметричной нагрузке на элементах системы (электродвигателях, трансформаторах, самой линии передачи) возникают несимметричные напряжения.

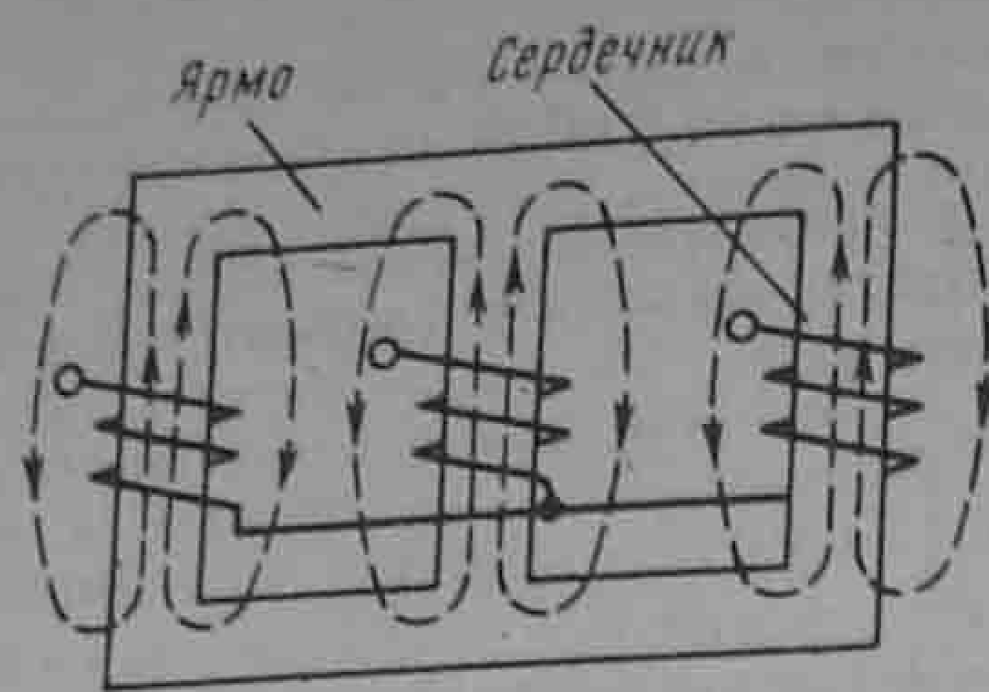



Рис. 6.29

Расчет токов и напряжений в таких системах производят с помощью схем замещения, на которых все элементы системы должны быть представлены комплексными сопротивлениями. Но сопротивление на фазу одного и того же элемента не одинаково для разных последовательностей. Поэтому расчет следует вести для каждой из последовательностей отдельно, а затем искомую величину (ток или напряжение) определить как сумму токов или соответственно напряжений нулевой, прямой и обратной последовательностей.

Рассмотрим причины, обусловливающие различные значения сопротивления одного и того же элемента для разных последовательностей фаз (при относительно низких частотах).

Сопротивление на фазу трехфазной линии передачи для прямой, обратной и нулевой последовательностей фаз обозначим соответственно $Z_{1л}$, $Z_{2л}$, $Z_{0л}$. Сопротивление на фазу линии передачи для прямой последовательности $Z_{1л}$ равно сопротивлению на фазу линии для обратной последовательности $Z_{2л}$, но не равно сопротивлению на фазу линии для нулевой последовательности фаз вследствие различных значений индуктивности на фазу трехфазной линии для систем прямой и нулевой последовательностей фаз.

Различные значения индуктивностей на фазу линии для прямой и нулевой последовательностей фаз объясняются двумя причинами. Во-первых, индуктивность на фазу линии для прямой и обратной последовательностей определяется только геометрическими размерами петель, образованных линейными проводами, тогда как индуктивность на фазу линии для нулевой последовательности зависит не только от геометрических размеров петель, образованных линейными проводами, но и от геометрических размеров петель, образованных линейными проводами и нулевым проводом. Во-вторых, ЭДС, наводимые в петлях провода линии для прямой и обратной последовательностей, представляют собой геометрическую сумму ЭДС, наводимых сдвинутыми по фазе на 120° токами в линейных проводах, тогда как ЭДС, наводимые в петлях проводов линии для нулевой последовательности, созданы совпадающими по фазе токами нулевой последовательности.

В трехфазном трехстержневом трансформаторе (магнитная система его изображена на рис. 6.29) сопротивление на фазу для нулевой последовательности $Z_{0т}$ не равно сопротивлению на фазу для прямой последовательности $Z_{1т}$, но $Z_{1т} = Z_{2т}$, где $Z_{2т}$ — сопротивление на фазу для обратной последовательности.

Объясняется это главным образом тем, что магнитные потоки нулевой последовательности $\Phi_0$ всех трех фаз находятся в фазе и поэтому не могут замыкаться по соседним стержням магнитной системы и замыкаются по воздуху (рис. 6.29). Магнитные потоки трех фаз прямой $\Phi_1$ и соответственно обратной последовательностей по фазе сдвинуты на 120° и поэтому могут замыкаться по соседним стержням магнитной системы. Так как магнитное сопротивление по пути в воздухе много больше магнитного сопротивления по пути в стали, то при одинаковых токах нулевой и прямой последовательностей $\Phi_0 < \Phi_1$. Поэтому $Z_{0т} < Z_{1т}$. Еще большее различие имеют сопротивления прямой $Z_{1д}$, обратной $Z_{2д}$ и нулевой $Z_{0д}$ последовательностей асинхронного двигателя.



Если к выходным зажимам трехфазного асинхронного двигателя (см. рис. 6.27) одновременно подвести напряжения прямой, нулевой и обратной последовательностей фаз, то входное сопротивление на фазу двигателя для прямой последовательности $Z_{1д}$ не будет равно входному сопротивлению на фазу для обратной последовательности $Z_{2д}$ и оба они будут отличны от входного сопротивления для нулевой последовательности $Z_{0д}$. Разберем, чем это объясняется.

Под действием напряжения прямой последовательности в двигателе создается круговое вращающееся магнитное поле. Оно увлекает за собой ротор двигателя. Ротор вращается с угловой частотой $\omega_р$. Система напряжений обратной последовательности также создает круговое вращающееся поле, но направление вращения его обратно направлению вращения поля прямой последовательности.

Система напряжений нулевой последовательности вращающегося магнитного поля не создает. Вокруг статорных обмоток ею создаются пульсирующие потоки, замыкающиеся по воздушному зазору между статором и ротором, подобно тому как в трехстержневом трехфазном трансформаторе (рис. 6.29) потоки от нулевой последовательности, выходя из сердечника, замыкались по воздуху.

Входное сопротивление на фазу двигателя для данной последовательности зависит не только от активного и реактивного сопротивлений фазы статорной обмотки, но и от активного и реактивного сопротивлений роторной обмотки [подобно тому как в трансформаторе входное сопротивление определяется не только собственным сопротивлением первичной обмотки, но и сопротивлением, вносимым вторичной обмоткой (см. § 3.39)]. Индуктивное сопротивление фазы ротора прямо пропорционально частоте. ЭДС прямой последовательности создают в роторе токи частоты $(\omega - \omega_р)$, что составляет примерно от 0,02 до 0,05 $\omega$, тогда как токи ротора от обратно вращающегося поля имеют частоту $\omega + \omega_р \approx (1{,}98 \div 1{,}95)\omega$. Так как частоты токов в роторе, создаваемые прямой и обратной последовательностями, различны, то различны и входные сопротивления на фазу для прямой ($Z_{1д}$) и обратной ($Z_{2д}$) последовательностей.

Магнитные потоки нулевой последовательности фаз замыкаются, минуя ротор, а потоки прямой и обратной последовательностей фаз проходят через ротор. При одном и том же токе прямой и нулевой последовательностей соответствующие им потоки различны. Поэтому для асинхронного двигателя $Z_{0д} \neq Z_{1д} \neq Z_{2д}$.

Расчет по методу симметричных составляющих состоит в следующем. На основании принципа наложения, применимого к линейным цепям, заданный несимметричный режим работы схемы представляют как результат наложения трех симметричных режимов.

В первом симметричном режиме все токи, ЭДС и напряжения содержат только составляющие прямой последовательности фаз, а линии передач, вращающиеся машины и трехфазные трансформаторы представлены на схемах их сопротивлениями для прямой последовательности.

Во втором симметричном режиме все токи, ЭДС и напряжения содержат составляющие только обратной последовательности, а машины и трансформаторы представлены их сопротивлениями обратной последовательности.

В третьем симметричном режиме все токи, ЭДС и напряжения содержат только составляющие нулевой последовательности, а машины и трансформаторы представлены соответствующими сопротивлениями нулевой последовательности.

Для того чтобы от симметричной исходной схемы прийти к трем симметричным схемам, поступают следующим образом: в том месте схемы, где создается несимметрия, в схему вводят сумму трех несимметричных напряжений $\dot{U}_A$, $\dot{U}_B$, $\dot{U}_C$. Система этих напряжений (ЭДС) на основании теоремы компенсации заменяет три неодинаковых сопротивления, образовавшихся в месте аварии и приведших к несимметрии во всей схеме. Далее три несимметричных напряжения в соответствии с § 6.20 раскладывают на три симметричных, основные векторы которых $\dot{U}_0$, $\dot{U}_1$, $\dot{U}_2$ надлежит определить. Точно так же три несимметричных тока $\dot{I}_A$, $\dot{I}_B$, $\dot{I}_C$ раскладывают на три симметричные системы токов, основные векторы которых $\dot{I}_0$, $\dot{I}_1$, $\dot{I}_2$ следует найти.

В методе симметричных составляющих неизвестными являются шесть величин: три напряжения ($\dot{U}_0$, $\dot{U}_1$, $\dot{U}_2$) и три тока ($\dot{I}_0$, $\dot{I}_1$, $\dot{I}_2$), через которые могут быть выражены любые напряжения и токи в цепи.

Для определения шести неизвестных составляют шесть уравнений: по одному уравнению составляют для каждой из трех симметричных систем; остальные три уравнения записывают для того участка схемы, где создается несимметрия. Вид трех последних уравнений зависит от характера несимметрии в схеме.

**Вопросы для самопроверки**

1. Дайте определение трехфазной симметричной системы ЭДС. Какими достоинствами объясняется широкое распространение систем в энергетике? 2. Что понимают под линейным и нулевым проводами, линейными и фазовыми напряжениями и токами? 3. Как вы объясните, что напряжения, которые получают от трехфазных цепей, могут быть представлены следующим рядом: 127, 220, 380, 660 В? 4. Каковы функции нулевого провода в системе звезда — звезда при несимметричной нагрузке?.5. При каких способах соединения генератора с нагрузкой линейный ток равняется фазовому? 6. При каких способах соединения генератора с нагрузкой линейное напряжение равняется фазовому? 7. На распределительном щитке выведены три конца симметричной трехфазной системы ЭДС. Как определить зажимы фаз *A*, *B*, *C*? 8. Что понимают под активной и полной мощностями трехфазной системы? 9. Почему при симметричной нагрузке расчет можно вести на одну фазу? 10. Почему активную мощность трехфазной системы при наличии нулевого провода нельзя измерять с помощью схемы рис. 6.19? 11. Охарактеризуйте условия получения трехфазного кругового вращающегося магнитного поля. 12. Начертите кривую, по которой будет перемещаться конец вектора результирующей магнитной индукции вращающегося магнитного поля, которое образуется при обрыве фазы *A* трехфазной симметричной системы рис. 6.25, *а*. 13. Что свойственно прямой, нулевой и обратной последовательностям фаз? 14. Как разложить несимметричную трехфазную систему на три симметричных? 15. Объясните, почему сопротивление на фазу элементов трехфазных систем (линии передачи, трехстержневого трансформатора, асинхронного двигателя) неодинаково для различных последовательностей. 16. Решите задачи 6.4; 6.13; 6.15; 6.21; 6.28.

## Глава седьмая

# ПЕРИОДИЧЕСКИЕ НЕСИНУСОИДАЛЬНЫЕ ТОКИ В ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

**§ 7.1. Определение периодических несинусоидальных токов и напряжений.** *Периодическими несинусоидальными токами и напряжениями* называют токи и напряжения, изменяющиеся во времени по периодическому несинусоидальному закону.

Они возникают при четырех различных режимах работы электрических цепей (и при сочетаниях этих режимов):

1) когда источник ЭДС (источник тока) дает несинусоидальную ЭДС (несинусоидальный ток), а все элементы цепи — резистивные, индуктивные и емкостные — линейны, т. е. от тока не зависят;

2) если источник ЭДС (источник тока) дает синусоидальную ЭДС (синусоидальный ток), но один или несколько элементов цепи нелинейны;

3) когда источник ЭДС (источник тока) дает несинусоидальную ЭДС (несинусоидальный ток), а в состав электрической цепи входят один или несколько нелинейных элементов;

4) если источник ЭДС (тока) дает постоянную или синусоидальную ЭДС (ток), а один или несколько элементов цепи периодически изменяются во времени.



В данной главе рассматриваются методика расчета и особенности работы линейных электрических цепей при воздействии на них несинусоидальных ЭДС и токов — первый из перечисленных режимов работы. Второй и частично третий режимы работы обсуждаются в гл. 15, четвертый — в гл. 18.

**§ 7.2. Изображение несинусоидальных токов и напряжений с помощью рядов Фурье.** Из курса математики известно, что любую периодическую функцию $f(x)$ с периодом $2\pi$, удовлетворяющую условиям Дирихле[1], можно разложить в ряд Фурье.

Переменная величина $x$ связана со временем $t$ соотношением

$$x = \omega t = 2\pi t / T,$$

где $T$ — период функции во времени.

Таким образом, период функции по $x$ равен $2\pi$, а период той же функции по времени равен $T$.

Ряд Фурье записывают так:

$$f(x) = A_0 + A'_1\sin x + A'_2\sin 2x + A'_3\sin 3x + A'_4\sin 4x + \ldots$$

$$\ldots + A''_1\cos x + A''_2\cos 2x + A''_3\cos 3x + A''_4\cos 4x + \ldots, \quad (7.1)$$

где $A_0$ — постоянная составляющая; $A'_1$ — амплитуда синусной (изменяющейся по закону синуса) составляющей первой гармоники; $A''_1$ — амплитуда косинусной составляющей первой гармоники; $A'_2$ — амплитуда синусной составляющей второй гармоники и т. д.

Здесь

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{d}x; \quad (7.2)$$

$$A' = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin x\mathrm{d}x; \; A''_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos x\mathrm{d}x; \quad (7.3)$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$A'_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx\mathrm{d}x; \; A''_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\mathrm{d}x.$$

Так как

$$A'_k\sin kx + A''_k\cos kx = A_k\sin(kx + \psi_k),$$

где

$$A_k = \sqrt{(A'_k)^2 + (A''_k)^2} \text{ и } \mathrm{tg}\psi_k = A''_k / A'_k,$$

[1] Все периодические функции, с которыми имеют дело в электротехнике, условиям Дирихле удовлетворяют. Поэтому производить проверку на выполнение условий Дирихле не требуется.

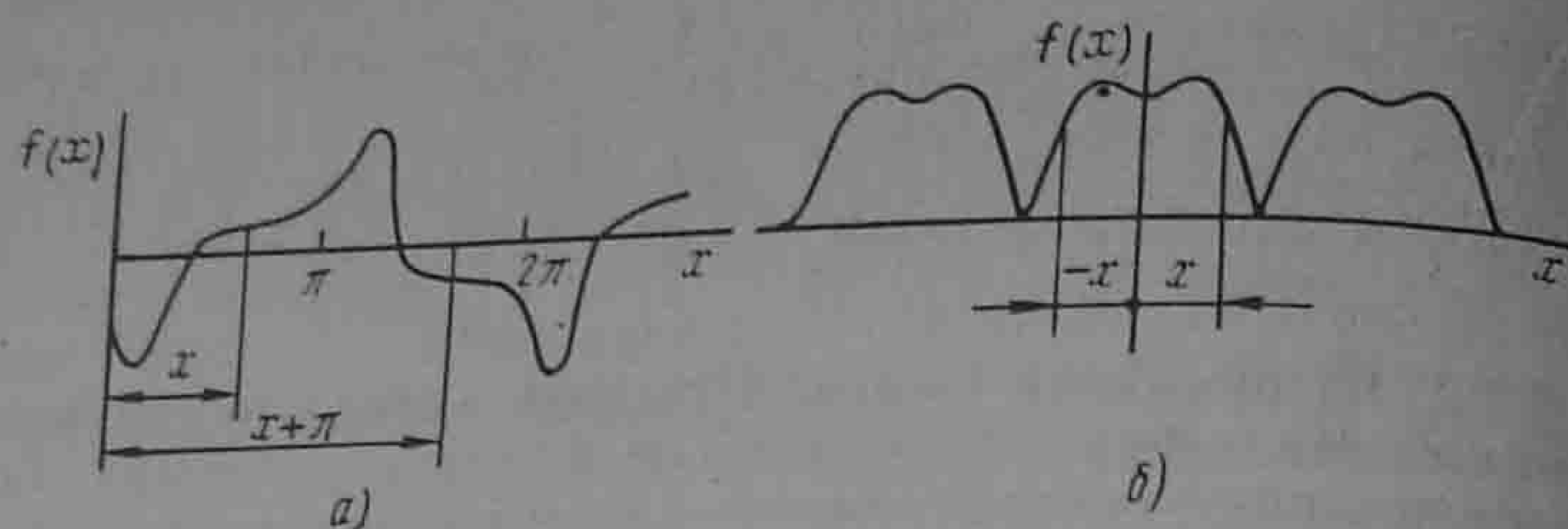



Рис. 7.1

то ряд Фурье (7.1) можно записать в другой форме:

$$f(x) = A_0 + A_1\sin(x+\psi_1) + A_2\sin(2x+\psi_2) + \ldots = \\ = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(kx+\psi_k), \qquad (7.4)$$

где $A_k$ — амплитуда $k$-гармоники ряда Фурье.

Гармоники, для которых $k$ — нечетное число, называют *нечетными*; для которых $k$ — четное число, — *четными*.

**§ 7.3. Некоторые свойства периодических кривых, обладающих симметрией.** На рис. 7.1 и 7.2 изображены три кривые, обладающие некоторыми специфическими свойствами. Кривая рис. 7.1, *а* удовлетворяет условию $-f(x+\pi) = f(x)$.

Кривые, для которых выполнимо это условие, называют *симметричными относительно оси абсцисс*. Если кривую рис. 7.1, *а* сместить по оси $x$ на полпериода и зеркально отразить относительно оси $x$, то полученная кривая совпадает с кривой $f(x)$.

При разложении таких кривых в ряд Фурье отсутствуют постоянная составляющая и четные гармоники, т. е. равны нулю коэффициенты $A_0 = A'_2 = A''_2 = A'_4 = A''_4 = \ldots = 0$.

Поэтому кривые типа кривой рис. 7.1, *а* раскладывают в ряд

$$f(x) = A'_1\sin x + A''_1\cos x + A''_3\sin 3x + A''_3\cos 3x + \ldots$$

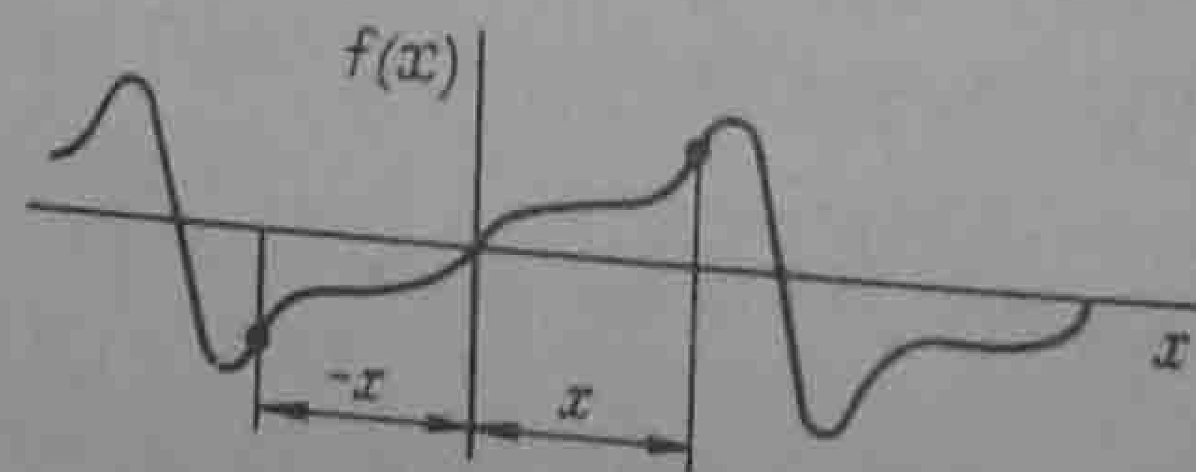



Рис. 7.2



Каждое слагаемое этого ряда удовлетворяет условию $-f(x+\pi) = f(x)$, например $-\sin(x+\pi) = \sin x$.

Кривая, подобная кривой рис. 7.1, *б*, обладает *симметрией относительно оси ординат* и удовлетворяет условию $-f(-x) = f(x)$.

Если кривую, лежащую левее оси ординат, зеркально отразить относительно оси ординат, то полученная кривая совпадает с кривой, лежащей правее оси ординат. При разложении таких кривых в ряд Фурье отсутствуют синусные ($A'_1 = A'_2 = A'_3 = \ldots = 0$) составляющие, т. е. присутствуют лишь косинусные и постоянная составляющие.

Таким образом, кривые типа кривой рис. 7.1, *б* можно разложить в ряд

$$f(x) = A_0 + A''_1\cos x + A''_2\cos 2x + A''_3\cos 3x + \ldots$$

Кривые типа кривой рис. 7.2 удовлетворяют условию $-f(-x) = f(x)$, их называют кривыми, *симметричными относительно начала координат*. Разложение их в ряд Фурье имеет такой вид:

$$f(x) = A'_1\sin x + A'_2\sin 2x + A'_3\sin 3x + \ldots$$

**§ 7.4. О разложении в ряд Фурье кривых геометрически правильной и неправильной форм.** Встречающиеся в электротехнике периодические кривые можно подразделить на две группы: 1) кривые геометрически правильной формы, например трапецеидальной, треугольной, прямоугольной и т. п.; разложение их в ряд Фурье дано в табл. 7.1, где вместо $x$ записано $\omega t$; 2) кривые произвольной (геометрически неправильной) формы; чаще всего они заданы в виде графика; разложение их в ряд Фурье производят графически (графоаналитически).

**§ 7.5. Графический (графоаналитический) метод определения гармоник ряда Фурье.** Графический метод определения гармоник ряда Фурье основан на замене определенного интеграла суммой конечного числа слагаемых. С этой целью период функции $f(x)$, равный $2\pi$, разбивают на $n$ равных частей $\Delta x = \dfrac{2\pi}{n}$ и интегралы заменяют суммами.

По определению, постоянная составляющая

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx \approx \frac{1}{2\pi}\sum_{p=1}^{p=n} f_p(x)\Delta x = \frac{1}{2\pi}\sum_{p=1}^{n} f_p(x)\frac{2\pi}{n},$$

или

$$A_0 = \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n} f_p(x). \qquad (7.5)$$

где $p$ — текущий индекс, принимающий значения от 1 до $n$; $f_p(x)$ — значение функции $f(x)$ при $x = (p-0{,}5)\Delta x$, т. е. в середине $p$-го интервала.

Таблица 7.1

| | |
|---|---|
| | $f(\omega t)=\frac{4a_m}{\alpha\pi}(\sin\alpha\sin\omega t+\frac{1}{9}\sin3\alpha\sin3\omega t+\frac{1}{25}\sin5\alpha\sin5\omega t+\ldots)$ |
| | $f(\omega t)=\frac{8a_m}{\pi^2}(\sin\omega t-\frac{1}{9}\sin3\omega t+\frac{1}{25}\sin5\omega t-\frac{1}{49}\sin7\omega t+\ldots)$ |
| | $f(\omega t)=\frac{4a_m}{\pi}(\sin\omega t+\frac{1}{3}\sin3\omega t+\frac{1}{5}\sin5\omega t+\frac{1}{7}\sin7\omega t+\ldots)$ |
| | $f(\omega t)=\frac{4a_m}{\pi}(\sin\frac{\alpha\pi}{2}\cos\omega t+\frac{1}{3}\sin\frac{3\alpha\pi}{2}\cos3\omega t+\frac{1}{5}\sin\frac{5\alpha\pi}{2}\cos5\omega t+\ldots)$ |
| | $f(\omega t)=\frac{2a_m}{\pi}(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}\cos\omega t+\frac{1}{1\cdot3}\cos2\omega t-\frac{1}{3\cdot5}\cos4\omega t+\frac{1}{5\cdot7}\cos6\omega t-\ldots)$ |
| | $f(\omega t)=\frac{4a_m}{\pi}(\frac{1}{2}+\frac{1}{1\cdot3}\cos2\omega t-\frac{1}{3\cdot5}\cos4\omega t+\frac{1}{5\cdot7}\cos6\omega t-\ldots)$ |
| | $f(\omega t)=\frac{3\sqrt{3}a_m}{\pi}(\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot4}\cos3\omega t-\frac{1}{5\cdot7}\cos6\omega t+\frac{1}{8\cdot10}\cos9\omega t-\ldots)$ |
| | $f(\omega t)=\frac{3a_m}{\pi}(1+\frac{2\cos6\omega t}{5\cdot7}-\frac{2\cos12\omega t}{11\cdot13}+\frac{2\cos18\omega t}{17\cdot19}-\ldots)$ |

Амплитуда синусной составляющей $k$-гармоники ряда

$$A'_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin kx\,dx\approx\frac{2}{2\pi}\sum_{p=1}^{n}f_p(x)\frac{2\pi}{n}\sin_p kx,$$

или

$$A'_k=\frac{2}{n}\sum_{p=1}^{n}f_p(x)\sin_p kx, \qquad (7.6)$$

амплитуда косинусной составляющей $k$-гармоники

$$A''_k=\frac{2}{n}\sum_{p=1}^{n}f_p(x)\cos_p kx, \qquad (7.7)$$



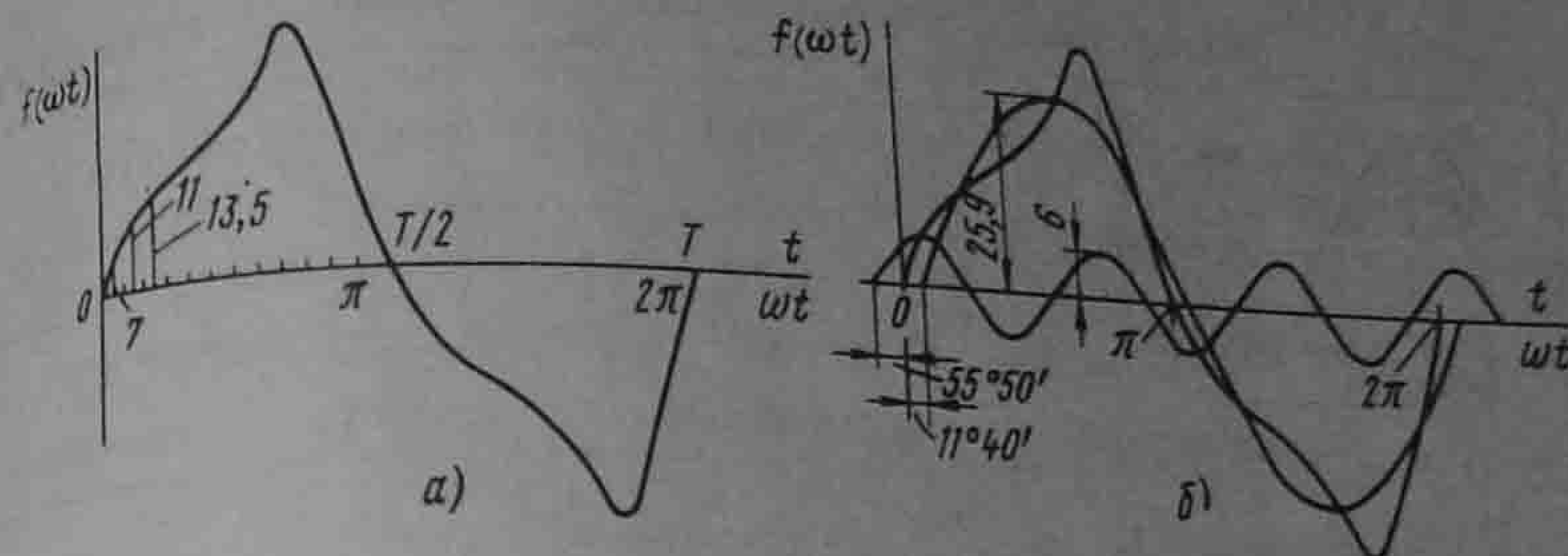



Рис. 7.3

где $\sin_p kx$ и $\cos_p kx$ — соответственно значения функций $\sin kx$ и $\cos kx$ при $x=(p-0{,}5)\Delta x$, т. е. в середине $p$-го интервала.

При расчетах по (7.5) — (7.7) обычно достаточно разделить период на $n=24$ или 18 частей, а в некоторых случаях и на меньшее число.

Перед тем как производить графическое разложение в ряд, необходимо выяснить, не обладает ли раскладываемая функция симметрией относительно осей координат (см. § 7.3). Наличие того или иного вида симметрии позволяет до проведения разложения предсказать, какие гармоники следует ожидать. Так, если кривая $f(x)$ симметрична относительно оси абсцисс, то постоянная составляющая $A_0$ и все четные гармоники отсутствуют, а вычисляя $A'_k$ и $A''_k$ при нечетных $k$, следует учесть, что $\sum f_p(x)\sin_p kx$ за первый полупериод равна сумме $\sum f_p(x)\sin_p kx$ за второй полупериод.

Знак углов $\psi_k$ в формуле (7.4) зависит от знаков $A'_k$ и $A''_k$. При построении гармоник на общем графике необходимо учитывать, что масштаб по оси абсцисс для $k$-гармоники должен быть взят в $k$ раз большим, чем для первой гармоники.

Так, например, если некоторый отрезок на оси абсцисс для первой гармоники выражает собой угол $\pi/3$, то тот же отрезок для третьей гармоники выражает собой угол, в 3 раза больший, т. е. $3(\pi/3)=\pi$.

**Пример 64.** Найти первую и третью гармоники функции $f(x)$, изображенной на рис. 7.3, *а*. Значения ординат функции $f(x)$ за первый полупериод при разбивке периода на $n=24$ части следующие:

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p$ . . . . . . . . . . . | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| $f_p(x)$ . . . . . . . . | 7 | 11 | 13,5 | 15,4 | 17,4 | 20,5 | 25,4 | 32,5 | 27,7 | 19,2 | 10 | 5 |

Решение. Так как кривая симметрична относительно оси абсцисс, то $A=0$ и ряд будет состоять только из нечетных гармоник.

Амплитуда синусной составляющей первой гармоники

$$A'_1=\frac{2}{n}\sum_{p=1}^{n}f_p(x)\sin_p x=\frac{4}{n}\sum_{p=1}^{n/2}f_p(x)\sin_p x,$$

$$A_1=\frac{4}{24}(7\sin7°30'+11\sin22°30'+13{,}5\sin37°30'+15{,}4\sin52°30'+17{,}4\sin67°30'+20{,}5\sin82°30'+25{,}4\sin97°30'+32{,}5\sin112°30'+27{,}7\sin127°30'+19{,}2\sin142°30'+10\sin157°30'+5\sin172°30')\approx25{,}3.$$

Амплитуда косинусной составляющей первой гармоники

$$A'_1 = \frac{4}{n}\sum_{p=1}^{n/2} f_p(x)\cos_p x \approx -5{,}23.$$

Амплитуда синусной составляющей третьей гармоники

$$A'_3 = \frac{4}{24}\sum_{p=1}^{12} f_p(x)\sin_p 3x \approx 3{,}47.$$

Амплитуда косинусной составляющей третьей гармоники

$$A''_3 = \frac{1}{6}\sum_{p=1}^{12} f_p(x)\cos_p 3x \approx 5{,}1.$$

Амплитуда первой гармоники $A_1 = \sqrt{(A'_1)^2 + (A''_1)^2} = 25{,}9$. Тангенс угла $\psi_1$, на который начало первой гармоники смещено относительно начала кривой $f(x)$,

$$\operatorname{tg}\psi_1 = A''_1 / A'_1 = -5{,}23 / 25{,}3 = -0{,}206;\ \ \psi_1 = -11°40'.$$

Амплитуда третьей гармоники

$$A_3 = \sqrt{(A'_3)2 + (A''_3)^2} = 6;\ \operatorname{tg}\psi_3 = A''_3 / A'_3 = 1{,}47;\ \ \psi_3 = 55°50'.$$

Следовательно, если ограничиться третьей гармоникой, то $f(\omega t) = 25{,}9\sin(\omega t - 11°40') + 6\sin(3\omega t + 55°50')$.

На рис. 7.3, *б* изображены первая и третья гармоники полученного ряда, а также результирующая (суммарная) кривая. Ее можно сопоставить с кривой на рис. 7.3, *а*.

**§ 7.6. Расчет токов и напряжений при несинусоидальных источниках питания.** До проведения расчета вынуждающие силы (ток источника тока или ЭДС источника ЭДС) должны быть представлены рядами Фурье.

Согласно принципу наложения, мгновенное значение тока любой ветви схемы равно сумме мгновенных значений токов отдельных гармоник. Аналогично, мгновенное значение напряжения на любом участке схемы равно сумме мгновенных значений напряжений отдельных гармоник на этом участке. Расчет производят для каждой из гармоник в отдельности с помощью уже известных приемов. Сначала рассчитывают токи и напряжения, возникающие от действия постоянной составляющей ЭДС или источника тока, затем — токи и напряжения от действия первой гармоники, после чего от второй, третьей и т. д.

При расчете токов и напряжений, возникающих от действия постоянной составляющей ЭДС, необходимо иметь в виду, что падение напряжения на $L$ при постоянном токе равно нулю, а также что постоянный ток через конденсатор $C$ не проходит.

При расчете следует учитывать, что индуктивное сопротивление $X_L$ растет прямо пропорционально частоте. Поэтому для $k$-гармоники $X_{Lk}$ в $k$ раз больше, чем для первой гармоники $X_{L1}$:

$$X_{Lk} = k\omega L = kX_{L1}; \qquad (7.8)$$

$$X_{L1} = \omega L.$$



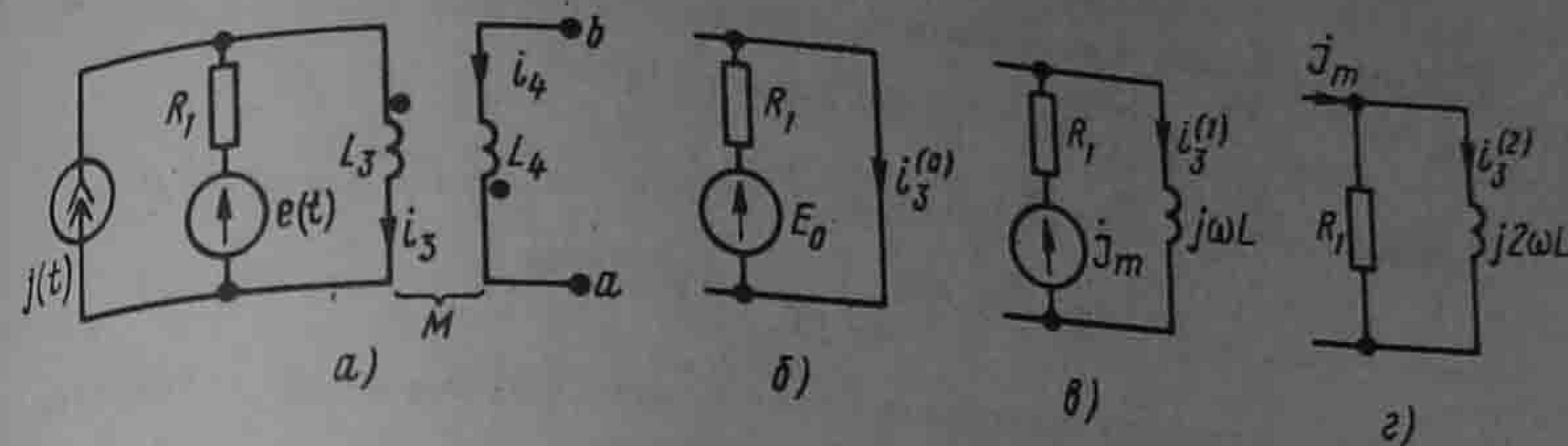



Рис. 7.4

Емкостное сопротивление уменьшается с ростом частоты, поэтому для $k$-гармоники $X_{Ck}$ в $k$ раз меньше, чем для первой гармоники $X_{C1}$:

$$X_{Ck} = 1/(k\omega C) = X_{C1}/k; \qquad (7.9)$$

$$X_{C1} = 1/(\omega C).$$

Для каждой гармоники можно построить векторную диаграмму. Однако откладывать на векторной диаграмме токи и падения напряжения *различных* частот и тем более векторно складывать токи и падения напряжения различных частот недопустимо, поскольку угловые скорости вращения векторов разных частот неодинаковы.

Резистивные сопротивления, если частоты не очень велики, полагают от частоты не зависящими.

При расчете каждую гармонику выражают комплексным числом. Суммирование одноименных гармоник производят путем сложения комплексных чисел или векторов на комплексной плоскости, т. е. так же, как это делалось в гл. 3.

**Пример 65.** В левой ветви схемы рис. 7.4, *а* имеется источник тока $j(t) = I_{km}\cos 2\omega t$, в средней (второй) — источник ЭДС $e(t) = E_0 + E_m\sin\omega t$. Катушка индуктивностью $L_4$ магнитно связана с катушкой индуктивностью $L_3$. Взаимная индуктивность между ними $M$. Определить мгновенное значение тока $i_3$ и напряжения $u_{ba}$ на зажимах $L_4$. Дано: $I_{km} = 5$ А; $\omega = 1000$ рад/с; $E_0 = 3$ В; $E_m = 6$ В; $R_1 = 3$ Ом; $L_3 = 3$ мГн; $M = 1$ МГн.

Р е ш е н и е. Положительные направления для токов выберем в соответствии с рис. 7.4, *а*. По второму закону Кирхгофа

$$u_{ba} - L_4\frac{di_4}{dt} + M\frac{di_3}{dt} = 0, \text{ но } i_4 = 0, \text{ поэтому } u_{ba} = -M\frac{di_3}{dt}.$$

Воспользуемся принципом наложения и найдем составляющие тока $i_3$ от каждого источника в отдельности.

Схема рис. 7.4, *б* служит для расчета токов от действия постоянной составляющей ЭДС. Левая ветвь схемы разомкнута, так как в ней включен источник тока с бесконечным сопротивлением. Правая ветвь короткозамкнута, так как индуктивность для постоянного тока имеет нулевое сопротивление. При этом $i_3^{(0)} = E_0 / R_1 = 1$ А.

Первую гармонику тока $i_3^{(1)}$ найдем, используя схему рис. 7.4, *в*:

$$\dot{I}_{3m}^{(1)} = 6 / (3+3j) = 1{,}41 e^{-j45^\circ}.$$

Вторую гармонику тока $i_3^{(2)}$ вычислим в соответствии со схемой рис. 7.4, *г*:

$$\dot{I}_{3m}^{(2)} = 5e^{j90^\circ}\frac{3}{3+j6} = 2{,}23e^{j26^\circ 40'}.$$

Мгновенное значение тока $i_3$ равно сумме мгновенных значений:

$$i_3 = i_3^{(0)} + i_3^{(1)} + i_3^{(2)} = 1 + 1{,}41\sin(\omega t - 45^\circ) + 2{,}23\sin(2\omega t + 26^\circ 40')\ \text{А}.$$

Напряжение

$$u_{ba} = -M\frac{di_3}{dt} = 1{,}41\cos(\omega t - 45^\circ) - 4{,}46\cos(2\omega t + 26^\circ 40')\ \text{В}.$$

**§ 7.7. Резонансные явления при несинусоидальных токах.** Как известно из гл. 3, *резонансным режимом работы электрической цепи*, содержащей один или несколько индуктивных и один или несколько емкостных элементов, называют такой режим, при котором ток на входе совпадает по фазе с действующей на входе ЭДС.

Если действующая ЭДС несинусоидальна, то в электрической цепи могут возникать резонансные режимы (резонансы токов или напряжений) не только на первой, но и на высших гармониках.

Условимся под резонансом на *k*-гармонике понимать такой режим работы, при котором ток *k*-гармоники на входе цепи по фазе совпадает с *k*-гармоникой, действующей на входе ЭДС (но при этом токи остальных гармоник не совпадают по фазе с вызвавшими их ЭДС).

Если учитывать активные сопротивления индуктивных катушек, то условие возникновения резонанса для какой-либо гармоники заключается в том, что реактивная составляющая входного сопротивления для этой гармоники должна быть равна нулю.

Исследование резонансных явлений при несинусоидальных токах часто производят, полагая активные сопротивления индуктивных катушек равными нулю. В этом случае входное сопротивление при резонансе токов равно бесконечности, а входное сопротивление при резонансе напряжений равно нулю.

При возникновении резонансного и близкого к нему режима на какой-либо высшей гармонике токи и (или) напряжения этой гармоники могут оказаться бо́льшими, чем токи и напряжения первой гармоники на этих участках цепи, несмотря на то что амплитуда соответствующей высшей гармоники ЭДС на входе схемы может быть в несколько раз меньше амплитуды первой гармоники ЭДС.

**Пример 66.** В схеме рис. 7.5 катушка обладает индуктивностью $L_2$. Полагая активное сопротивление индуктивной катушки равным нулю, найти, при каких значениях емкостей $C_1$ и $C_2$ входное сопротивление схемы для первой гармоники равняется нулю, а для девятой — бесконечности.



Решение:

$$Z_1 = \frac{-j}{\omega C_1} + \frac{j\omega L_2\left(-\frac{j}{\omega C_2}\right)}{j\left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}\right)} = 0,$$

$$Z_9 = \frac{-j}{9\omega C_1} + \frac{j9\omega L_2\left(-\frac{j}{9\omega C_2}\right)}{j\left(9\omega L_2 - \frac{1}{9\omega C_2}\right)} = \infty.$$

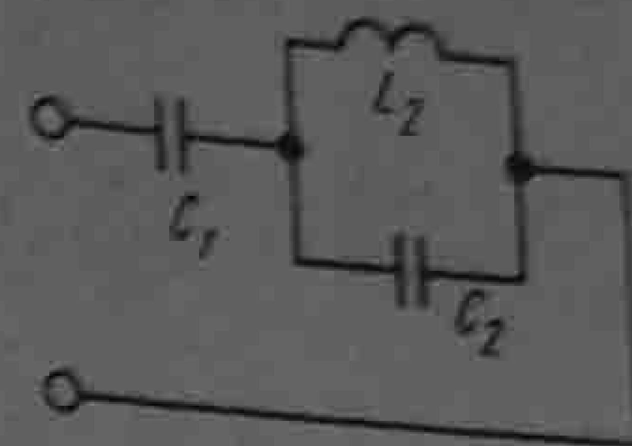



Рис. 7.5

Совместное решение дает $1/\omega C_2 = 81\omega L_2$; $\dfrac{1}{\omega C_1} = \dfrac{81}{80}\omega L_2$.

**§ 7.8. Действующие значения несинусоидального тока и несинусоидального напряжения.** По определению (см. § 3.2), квадрат действующего значения тока $I$ выражают через мгновенное значение тока $i$ следующим образом:

$$I^2 = \frac{1}{T}\int_0^T i^2 dt.$$

Если ток

$$i = I_0 + I_{1m}\sin(\omega t + \psi_1) + I_{2m}\sin(2\omega t + \psi_2) + \ldots,$$

то

$$i^2 = I_0^2 + \sum_{k=0}^{\infty} I_{km}^2 \sin^2(k\omega t + \psi_k) +$$

$$+ \sum_{\substack{p=0 \\ q=0,\ p\neq q}}^{\infty} I_{pm} I_{qm} \sin(p\omega t + \psi_p)\sin(q\omega t + \psi_q).$$

Но

$$\int_0^T \sin^2(k\omega t + \psi_k)dt = \frac{T}{2};$$

$$\int_{\substack{0 \\ p\neq q}}^{T} \sin(p\omega t + \psi_p)\sin(q\omega t + \psi_q)dt = 0. \qquad (7.10)$$

Поэтому

$$I^2 = I_0^2 + I_{1m}^2/2 + I_{2m}^2/2 + I_{3m}^2/2 + \ldots$$

или

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_{1m}^2/2 + I_{2m}^2/2 + \dots} \quad (7.10а)$$

Так как амплитуда $k$-гармоники тока $I_{km}$ в $\sqrt{2}$ раз больше действующего значения тока $k$-гармоники $I_k$, то

$$\frac{I_{km}^2}{2} = \frac{I_{km}}{\sqrt{2}}\frac{I_{km}}{\sqrt{2}} = I_k^2;$$

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 + \dots} \quad (7.11)$$

Следовательно, действующее значение несинусоидального тока равно корню квадратному из суммы квадратов постоянной составляющей тока и действующих значений отдельных гармоник. От углов сдвига фаз $\psi_k$ действующее значение тока не зависит.

Аналогично, действующее значение несинусоидального напряжения $U$ равно корню квадратному из суммы квадратов постоянной составляющей и действующих значений отдельных гармоник:

$$U = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + \dots} \quad (7.11а)$$

Пример 67. На входе двухполюсника $u = 100 + 80\sin(\omega t + 30°) + 60\sin(3\omega t + 20°) + 50\sin(5\omega t + 45°)$ В; $i = 33{,}3 + 17{,}87 \times \sin(\omega t - 18°) + 5{,}59\sin(5\omega t + 120°)$ А. Найти их действующие значения.

Решение:

$$U = \sqrt{100^2 + 80^2/2 + 60^2/2 + 50^2/2} = 127{,}1 \text{ В}.$$

$$I = \sqrt{33{,}2^2 + 17{,}87^2/ + 5{,}59^2/2} = 35{,}6 \text{ А}.$$

**§ 7.9. Среднее по модулю значение несинусоидальной функции.** Под *средним по модулю значением функции* понимают среднее значение модуля этой функции за период:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(\omega t)|\, d\omega t. \quad (7.12)$$

В отличие от действующего значения оно зависит от значений $\psi_k$.

**Пример 68.** Дана функция, не содержащая постоянной составляющей и четных гармоник и не изменяющая знака в течение каждого полупериода. Определить ее среднее по модулю значение.

Решение. Разложим заданную функцию в ряд Фурье:

$$i = I_{1m}\sin(\omega t + \psi_1) + I_{3m}\sin(3\omega t + \psi_3) + I_{5m}\sin(5\omega t + \psi_5) + \dots$$

После интегрирования получим

$$I_{\text{ср.по.мод.}} = \frac{2}{\pi}\left(I_{1m}\cos\psi_1 + \frac{1}{3}I_{3m}\cos\psi_3 + \frac{1}{5}I_{5m}\cos\psi_5 + \dots\right). \quad (7.13)$$

**§ 7.10. Величины, которые измеряют амперметры и вольтметры при несинусоидальных токах.** Несинусоидальные токи и напряжения измеряют приборами различных систем. Принципы действия



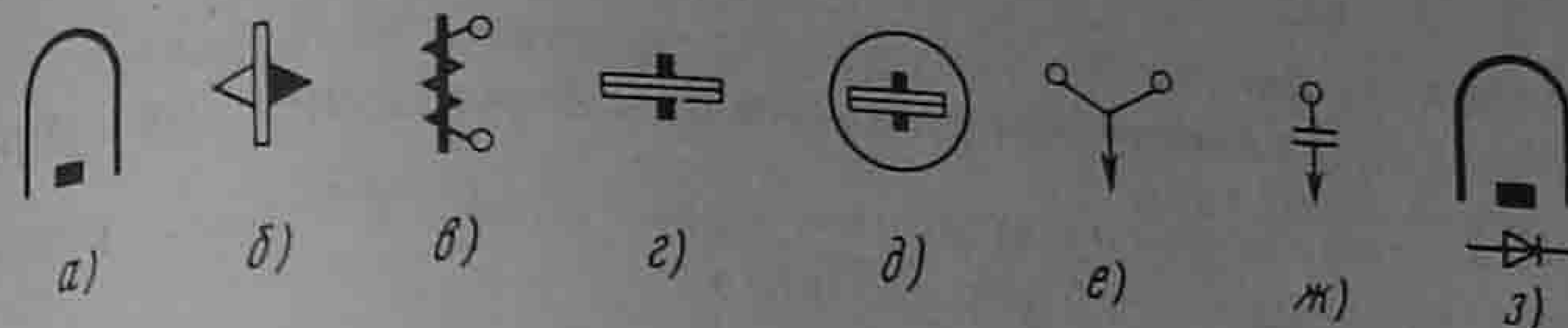



Рис. 7.6

этих приборов рассматривают в курсе электрических измерений. Поэтому здесь упомянем лишь, какие величины измеряют вольтметры и амперметры различных систем.

Приборы электромагнитной, электродинамической и тепловой систем реагируют на действующее значение, магнитоэлектрические приборы с выпрямителем — на среднее по модулю значение величины, магнитоэлектрические без выпрямителя — на постоянную составляющую, амплитудные электронные вольтметры — на максимальное значение функции.

Напомним, что на лицевой стороне измерительного прибора всегда имеется условный значок, свидетельствующий о том, к какой системе относится данный прибор. На рис. 7.6 приведены некоторые из них: *а* — магнитоэлектрическая с подвижной рамкой; *б* — магнитоэлектрическая с подвижным магнитом; *в* — электромагнитная; *г* — электродинамическая; *д* — ферродинамическая; *е* — тепловая; *ж* — электростатическая; *з* — магнитоэлектрическая с выпрямителем.

**§ 7.11. Активная и полная мощности несинусоидального тока.** Под *активной мощностью* $P$ несинусоидального тока понимают среднее значение мгновенной мощности за период первой гармоники:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T ui\,dt.$$

Если представить напряжение $u$ и ток $i$ рядами Фурье:

$$u = U_0 + U_{1m}\sin(\omega t + \psi_1) + U_{2m}\sin(2\omega t + \psi_2) + U_{3m}\sin(3\omega t + \psi_3) + \dots,$$

$$i = I_0 + I_{1m}\sin(\omega t + \psi_1 - \varphi_1) + I_{2m}\sin(2\omega t + \psi_2 - \varphi_2) + I_{3m}\sin(3\omega t + \psi_3 - \varphi_3) + \dots,$$

подставить эти ряды под знак интеграла и проинтегрировать, учтя соотношения (7.10), то можно получить

$$P = U_0 I_0 + U_1 I_1\cos\varphi_1 + U_2 I_2\cos\varphi_2 + U_3 I_3\cos\varphi_3 + \dots \quad (7.14)$$

*Таким образом, активная мощность несинусоидального тока равна сумме активных мощностей отдельных гармоник.*

*Полная мощность* $S$ равна произведению действующего значения несинусоидального напряжения на действующее значение несинусоидального тока:

$$S = UI, \tag{7.15}$$

где

$$U = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + \dots};$$

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 + \dots}.$$

**Пример 69.** Определить $P$ и $S$, если

$$U = 25{,}9\sin(\omega t - 11°46') + 6\sin(3\omega t + 53°50')\ \text{В};$$

$$i = 3\sin(\omega t - 40°) + 0{,}9\sqrt{2}\sin(3\omega t + 125°)\ \text{А}.$$

Решение:

$$U_1 = 25{,}9/\sqrt{2} = 18{,}3\ \text{В};\ U_3 = 6/\sqrt{2} = 4{,}26\ \text{В};\ I_1 = 2{,}13\ \text{А};$$

$$I_3 = 0{,}9\ \text{А};\ \varphi_1 = 11°40' - (-40°) = 28°30';\ \varphi_3 = 71°10'.$$

$$P = 18{,}3 \cdot 2{,}13\cos 28°20' + 4{,}26 \cdot 0{,}9\cos(71°10') = 35{,}5\ \text{Вт};$$

$$U = \sqrt{U_1^2 + U_3^2} = 18{,}55\ \text{В};\ I = \sqrt{2{,}13^2 + 0{,}9^2} = 2{,}13\ \text{А};$$

$$S = UI = 18{,}55 \cdot 2{,}31 = 42{,}8\ \text{ВА}.$$

**§ 7.12. Замена несинусоидальных токов и напряжений эквивалентными синусоидальными.** При изучении некоторых простейших свойств нелинейных электрических цепей (см. гл. 15) несинусоидальные токи и напряжения, не содержащие постоянных составляющих и в которых высшие гармоники выражены слабо, заменяют эквивалентными синусоидальными. Действующее значение синусоидального тока принимают равным действующему значению заменяемого несинусоидального тока, а действующее значение синусоидального напряжения — равным действующему значению несинусоидального напряжения.

Сдвиг фаз $\varphi_{эк}$ между эквивалентными синусоидами напряжения и тока берут таким, чтобы активная мощность эквивалентного синусоидального тока была равна активной мощности несинусоидального тока, т. е.

$$\cos\varphi_{эк} = P / (UI). \tag{7.16}$$

**Пример 70.** Заменить несинусоидальный ток и напряжение примера 69 эквивалентными и найти сдвиг фаз $\varphi_{эк}$ между ними.

Решение. Действующее значение синусоидального напряжения $U = 18{,}55$ В; действующее значение синусоидального тока $I = 2{,}31$ А; $\cos\varphi_{эк} = 35{,}5/(18{,}55 \cdot 2{,}31) = 0{,}828$; $\varphi_{эк} = 34°$.

**§ 7.13[1] Особенности работы трехфазных систем, вызываемых гармониками, кратными трем.** ЭДС каждой фазы трехфазного трансформатора или трехфазного генератора часто оказываются несинусоидальными. Каждая ЭДС ($e_A$, $e_B$, $e_C$) повторяет по форме остальные со сдвигом на одну треть периода ($T/3$) и может быть разложена на гармоники. Постоянная составляющая обычно отсутствует.

Пусть $k$-гармоника ЭДС фазы $A$

$$e_{kA} = E_{km}\sin(k\omega t + \varphi_k).$$

[1] Материал § 7.13 особенно необходим студентам электроэнергетических и электромеханических специальностей.



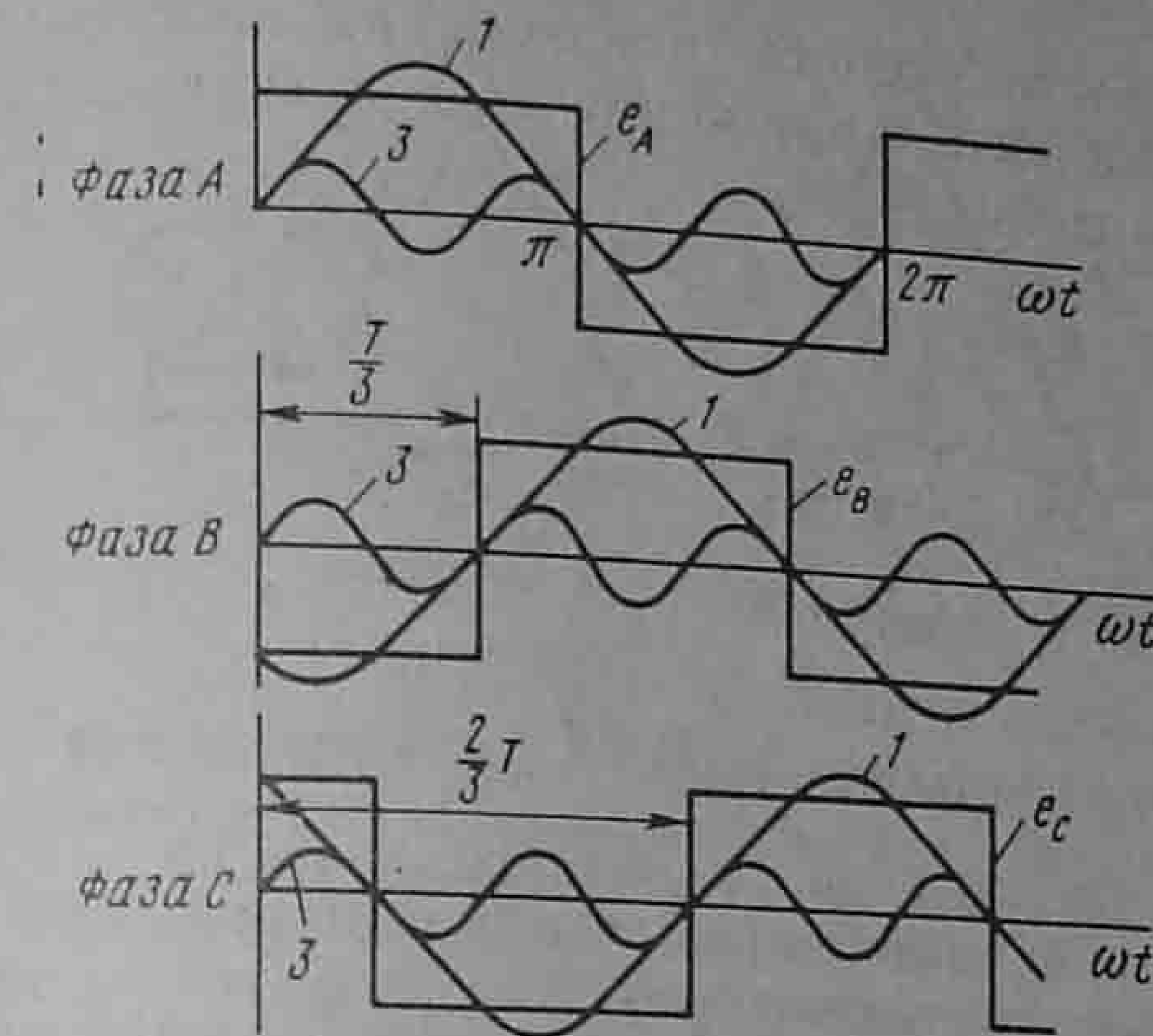



Рис. 7.7

Так как ЭДС фазы $B$ отстает от ЭДС фазы $A$ на $T/3$, а ЭДС фазы $C$ опережает ЭДС фазы $A$ на $T/3$, то $k$-гармоники ЭДС фаз $B$ и $C$ соответственно

$$e_{kB} = E_{km}\sin[k\omega(t - \frac{T}{3}) + \psi_k] =$$

$$= E_{km}\sin(k\omega t - 120°k + \psi_k);$$

$$e_{kC} = E_{km}\sin(k\omega t + 120°k + \psi_k);$$

$$k\omega T_3 = k\frac{2\pi T}{T\,3} = k\frac{2\pi}{3} = 120°k.$$

Если $k = 1, 4, 7, 10$, то $k$-гармоника ЭДС фазы $B$ отстает на 120° от $k$-гармоники ЭДС фазы $A$. Следовательно, 1-, 4-, 7-, 10-я гармоники образуют систему прямой последовательности фаз (что понимают под прямой последовательностью фаз, см. § 6.20).

Если $k = 2, 5, 8, 11$, то $k$-гармоника ЭДС фазы $B$ опережает $k$-гармонику ЭДС фазы $A$ на 120°. Следовательно, 2-, 5-, 8-я и т. д. гармоники образуют системы обратной последовательности.

Гармоники, кратные трем ($k = 3, 6, 9, \dots$), образуют систему нулевой последовательности, т. е. третьи гармоники ЭДС всех трех фаз совпадают по фазе ($3 \cdot 120° = 360°$):

$$e_{3A} = e_{3B} = e_{3C} = E_{3m}\sin(3\omega t + \psi_3).$$

Шестые гармоники ЭДС также совпадают по фазе и т. д.

Совпадение по фазе третьих гармоник ЭДС всех трех фаз проиллюстрируем графически.

На рис. 7.7 ЭДС $e_A$, $e_B$, $e_C$ представляют собой три фазные ЭДС трехфазного генератора. Они имеют прямоугольную форму и сдвинуты относительно друг друга на одну треть периода основной частоты. На том же рисунке показаны первая и третья гармоники каждой ЭДС. Из рисунка видно, что третьи гармоники ЭДС действительно находятся в фазе.

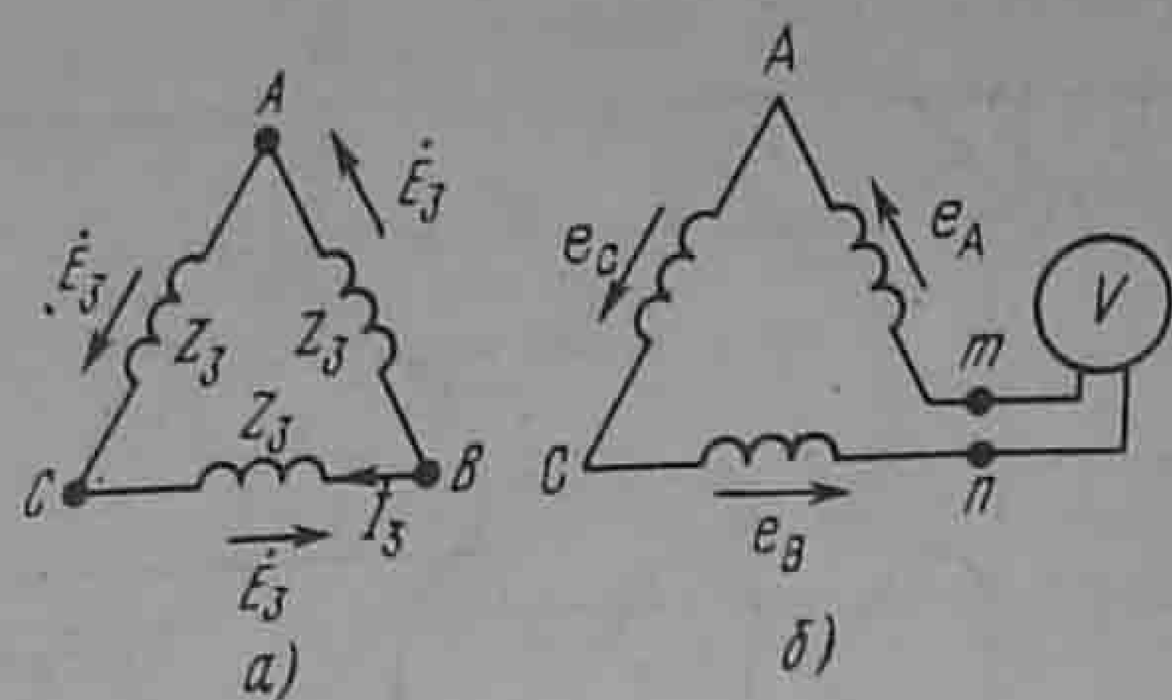



Рис. 7.8

Рассмотрим особенности работы трехфазных систем, вызываемые гармониками, кратными трем.

1. При соединении обмоток трехфазного генератора (трехфазного трансформатора) треугольником (рис. 7.8, *а*) по ним протекают токи гармоник, кратных трем, даже при отсутствии внешней нагрузки. Алгебраическая сумма третьих гармоник ЭДС равна $3\dot{E}_3$[1]. Обозначим сопротивление обмотки каждой фазы для третьей гармоники $Z_3$, тогда ток третьей гармоники в треугольнике $\dot{I}_3 = 3\dot{E}_3 / 3Z_3 = \dot{E}_3 / Z_3$. Аналогично, ток шестой гармоники $\dot{I}_6 = \dot{E}_6 / Z_6$, где $\dot{E}_6$ — действующее значение шестой гармоники фазовой ЭДС; $Z_6$ — сопротивление фазы для шестой гармоники.

Действующее значение тока, протекающего по замкнутому треугольнику в схеме на рис. 7.8, *а*:

$$I = \sqrt{I_3^2 + I_6^2 + I_9^2 + \ldots}.$$

2. Если соединить обмотки трехфазного генератора (трехфазного трансформатора) в открытый треугольник (рис. 7.8, *б*), то при наличии в фазовых ЭДС гармоник, кратных трем, на зажимах $m$ и $n$ будет напряжение, равное сумме ЭДС гармоник, кратных трем:

$$u_{mn} = 3E_{3m}\sin(3\omega t + \psi_3) + 3E_{6m}\sin(6\omega t + \psi_6) + \ldots.$$

Показание вольтметра в схеме рис. 7.8,*б*

$$U = 3\sqrt{E_3^2 + E_6^2 + \ldots}.$$

3. В линейном напряжении независимо от того, звездой или треугольником соединены обмотки генератора (трансформатора), гармоники, кратные трем, отсутствуют, если нагрузка равномерна.

Рассмотрим сначала схему соединения трехфазного источника ЭДС треугольником (рис. 7.8, *а*) при отсутствии внешней нагрузки. Обозначив $\dot\varphi_{A3}$ потенциал точки $A$, $\dot\varphi_{B3}$ — потенциал точки $B$ по третьей гармонике, получим $\dot\varphi_{A3} = \dot\varphi_{B3} + \dot{E}_3 - \dot{I}_3 Z_3$. Но $\dot{E}_3 = \dot{I}_3 Z_3$; следовательно, $\dot\varphi_{A3} = \dot\varphi_{B3}$. При наличии равномерной нагрузки, соединенной треугольником, каждая фаза генератора (трансформатора) и параллельно ей присоединенная нагрузка могут быть заменены эквивалентной ветвью, с некоторой ЭДС $\dot{E}'_3$ и сопротивлением $Z'_3$. На полученную схему можно распространить вывод, сделанный для случая отсутствия внешней нагрузки.

[1] Алгебраическая сумма первых гармоник ЭДС и всех гармоник ЭДС, не кратных трем, равна нулю, поэтому от перечисленных гармоник при отсутствии нагрузки по замкнутому треугольнику ток протекать не будет.



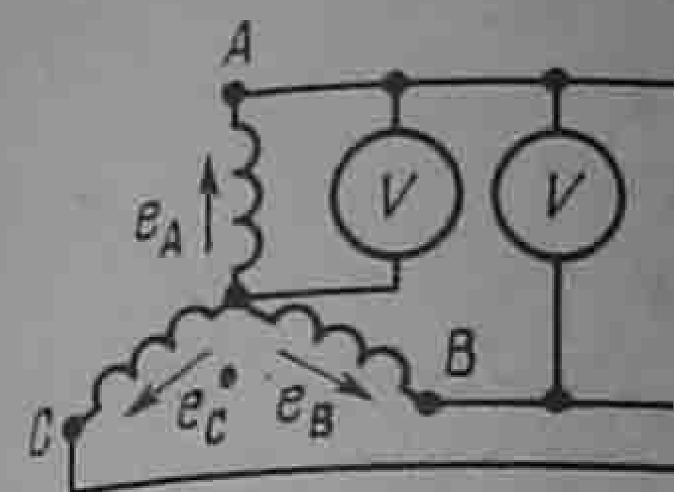



Рис. 7.9

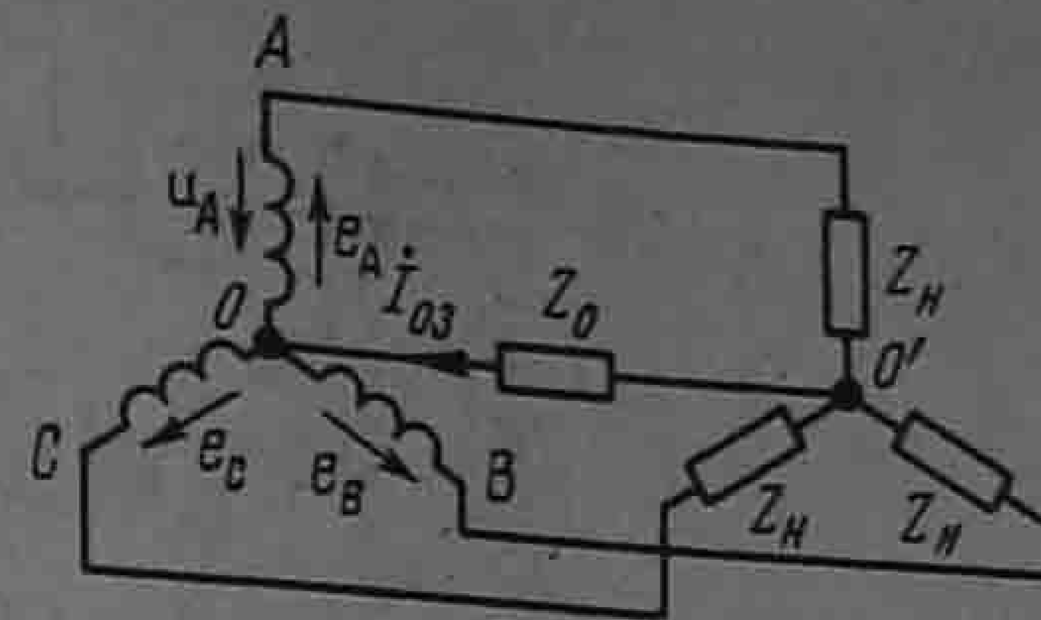



Рис. 7.10

При соединении звездой трехфазного источника ЭДС (рис. 7.9) линейное напряжение третьей гармоники равно разности соответствующих фазовых напряжений. Так как третьи гармоники в фазовых напряжениях совпадают по фазе, то при составлении этой разности они вычитаются.

В фазовом напряжении могут присутствовать все гармоники (постоянная составляющая обычно отсутствует). Следовательно, действующее значение фазового напряжения

$$U_ф = \sqrt{U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + U_4^2 + \ldots}.$$

В линейном напряжении схемы (рис. 7.9) отсутствуют гармоники, кратные трем, поэтому

$$U_л = \sqrt{3}\,\sqrt{U_1^2 + U_2^2 + U_4^2}.$$

Отношение $U_л / U_ф < \sqrt{3}$, если есть гармоники, кратные трем.

4. При соединении генератора и равномерной нагрузки звездой и отсутствии нулевого провода токи третьих и других гармоник нулевой последовательности не могут протекать по линейным проводам. Поэтому между нулевыми точками приемника $O'$ и генератора $O$ (рис. 7.10 при $Z_0 = \infty$) действует напряжение

$$u_{O'O} = E_{3m}\sin(3\omega t + \psi_3) + E_{6m}\sin(6\omega t + \psi_6) + \ldots,$$

действующее значение которого

$$U_{O'O} = \sqrt{E_{3m}^2 / 2 + E_{6m}^2 / 2 + \ldots}.$$

5. Если в схеме звезда — звезда при равномерной нагрузке фаз сопротивление нагрузки для третьей гармоники обозначить $Z_{н3}$, а сопротивление нулевого провода для третьей гармоники — $Z_{03}$ (рис. 7.10), то по нулевому проводу будет протекать ток третьей гармоники

$$\dot{I}_{03} = \frac{\dot{E}_3}{Z_{03} + \dfrac{Z_{н3}}{3}}.$$

По каждому из линейных проводов будет протекать ток третьей гармоники $\dot{I}_{03} / 3$.

Аналогично находят токи и других гармоник, кратных трем.

**Пример 71.** Мгновенное значение напряжения фазы $A$ трехфазного генератора

$$u_A = 127\sin(\omega t + 10°) + 30\sin(3\omega t + 20°) + 20\sin(11\omega t + 15°)\text{В}.$$

Определить мгновенное значение линейного напряжения при соединении генератора звездой

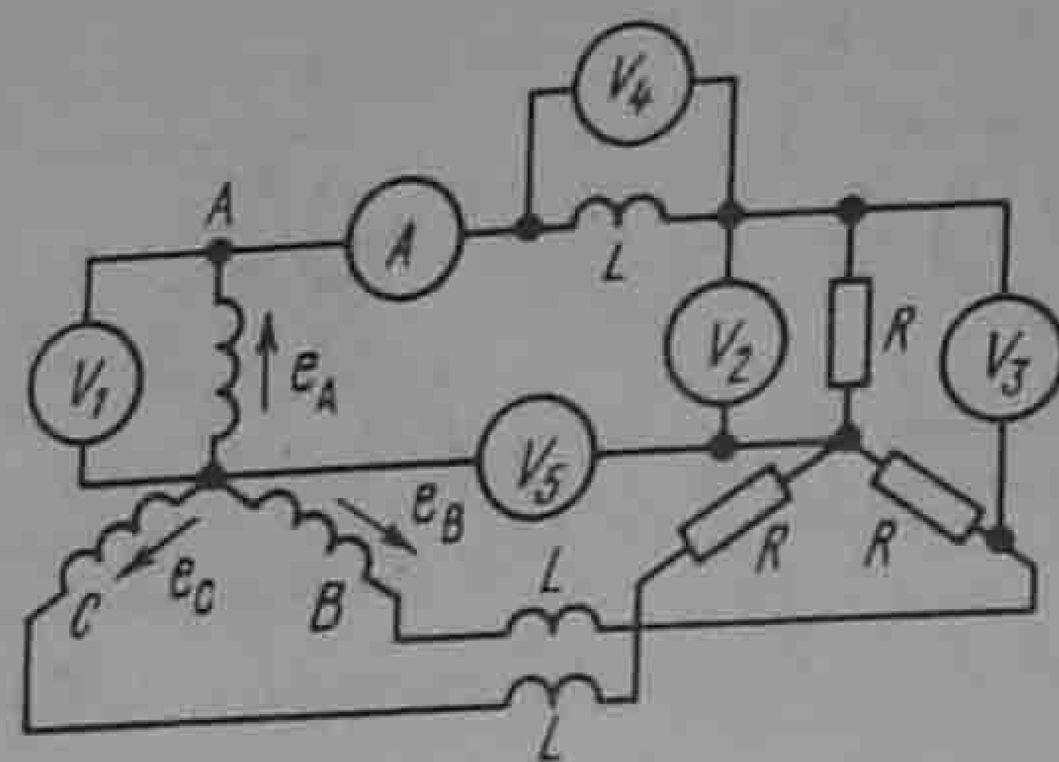


Рис. 7.11

Решение. В линейном напряжении третья гармоника отсутствует. Первые гармоники фаз $A$ и $B$ по фазе сдвинуты на 120°. Поэтому линейное напряжение $\dot{U}_{AB}$ первой гармоники в $\sqrt{3}$ раз больше фазового напряжения первой гармоники $\dot{U}_A$ и на 30° опережает его по фазе.

Одиннадцатая гармоника (обратная последовательность фаз) линейного напряжения отстает по фазе от одиннадцатой гармоники напряжения фазы $A$ на 30° и в $\sqrt{3}$ раз больше ее:

$$u_{AB} = 127\sqrt{3}\sin(\omega t + 40°) + 20\sqrt{3}\sin(11\omega t - 15°)\ \text{В}.$$

**Пример 72.** ЭДС фазы $A$ в схеме (рис. 7.11) $e_A = 170\sin\omega t + 80\cos3\omega t + 34\cos9\omega t$ В; $R = 9$ Ом; $\omega L = 2$ Ом.

Определить показания всех приборов. Приборы электродинамической системы.

Решение. Действующие значения ЭДС

$$E_1 = 170/\sqrt{2} = 121\ \text{В};\ E_3 = 56{,}5\ \text{В};\ E_9 = 24{,}2\ \text{В}.$$

По линейным проводам течет первая гармоника тока

$$I_1 = E_1/\sqrt{R^2 + (\omega L)^2} = 121/9{,}2 = 13{,}2\ \text{А}.$$

Показание вольтметра $V_1 = \sqrt{E_1^2 + E_3^2 + E_9^2} = 136$ В; $V_2 = I_1R_1 = 13{,}2\cdot9 = 118{,}5$ В; $V_3 = \sqrt{3\cdot118{,}5} = 205$ В; $V_4 = I_1\omega L = 26{,}4$ В; $V_5 = \sqrt{E_3^2 + E_9^2} = 61{,}4$ В.

**Пример 73.** ЭДС каждой фазы генератора (рис. 7.12) изменяется по трапецеидальному закону: $a_m = 220$ В; $\alpha = T/36$; нагрузка равномерная; $R = 6$ Ом; $\omega L = 0{,}5$ Ом; $1/\omega C = 12$ Ом. Определить мгновенное значение тока по нулевому проводу, пренебрегая гармониками тока выше седьмой.

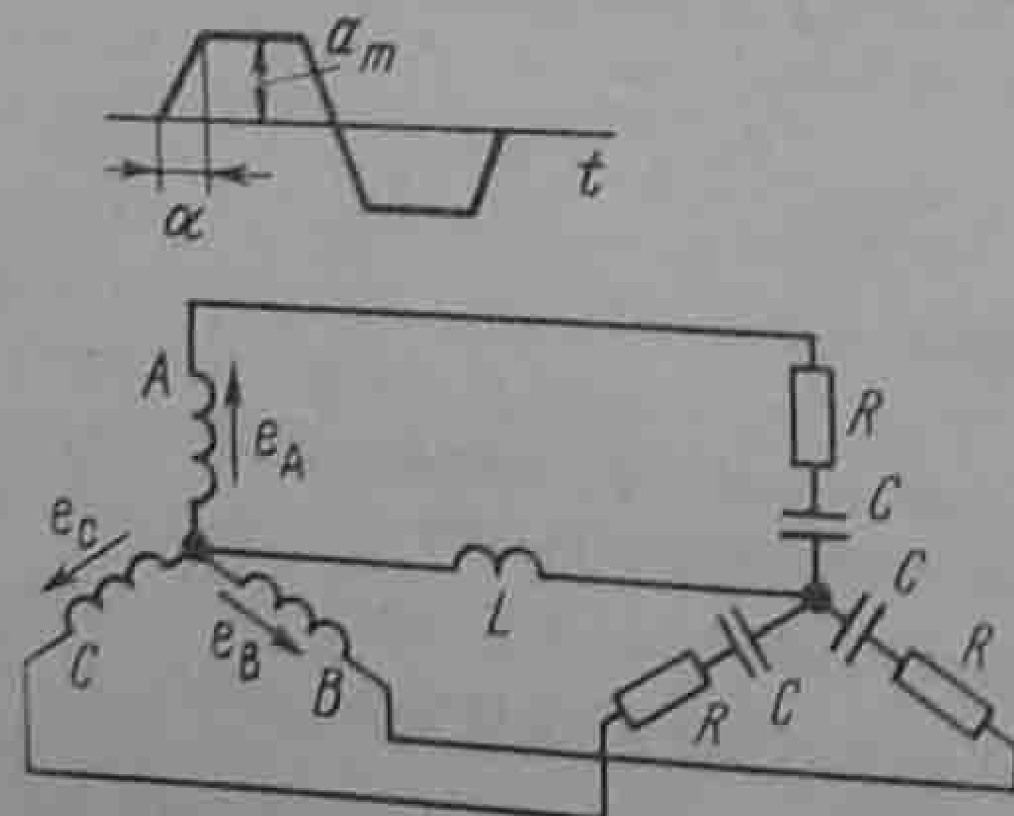


Рис. 7.12

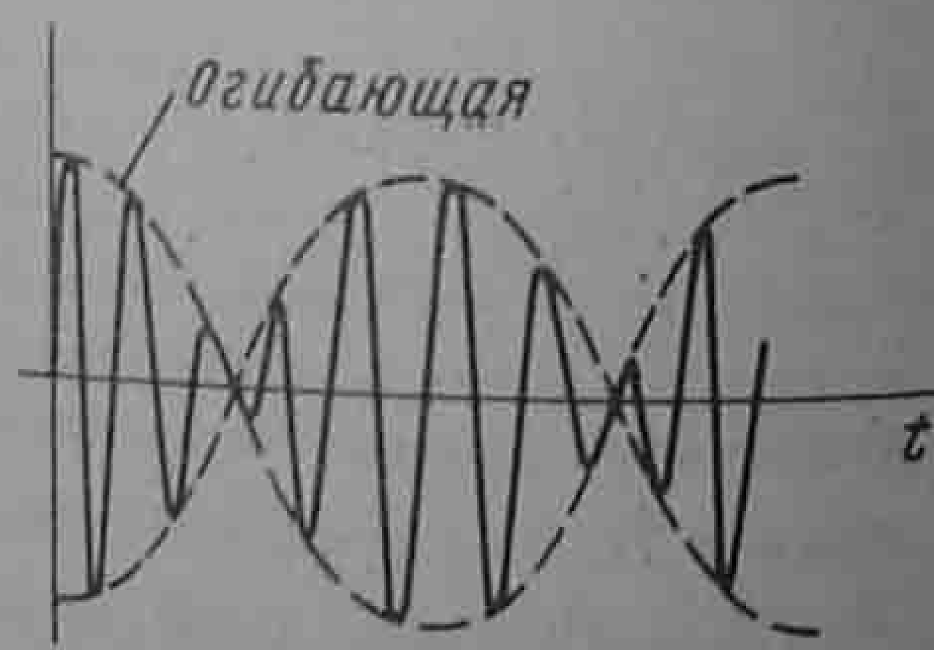


Рис. 7.13



Решение. С помощью табл. 7.1 запишем разложение трапецеидальной ЭДС:

$$e_A = \frac{4\cdot220}{\frac{\pi}{18}\pi}\left(\sin10°\sin\omega t + \frac{1}{9}\sin30°\sin3\omega t + \frac{1}{25}\sin50°\sin5\omega t + \frac{1}{49}\sin70°\sin7\omega t\right).$$

Следовательно,

$$e_A = 274\sin\omega t + 89{,}3\sin3\omega t + 49{,}5\sin5\omega t + 30{,}9\sin7\omega t.$$

По нулевому проводу протекает только третья гармоника тока

$$\dot{I}_{03} = \frac{\dot{E}_3}{Z_{03} + Z_{н3/3}},$$

где $E_3 = 89{,}3/\sqrt{2} = 63{,}3$ В; $Z_{03} = 1{,}5j$; $Z_{н3} = 6 - 4j$; $Z_н/3 = 2 - j1{,}33$; $I_{03} = 63{,}3/(1{,}5 + 2 - j1{,}33) = 31{,}8\,e^{-4°40'}$ А. Мгновенное значение тока $i_{03} = 44{,}8\sin(3\omega t - 4°40')$ А.

§ 7.14. **Биения.** Колебательный процесс, получающийся в результате сложения двух синусоидальных колебаний с равными амплитудами $A$ и близкими, но не равными частотами $\omega_1$ и $\omega_2$, дает колебание, которое называют *биением*. Пусть $f(t) = A\sin\omega_1 t + A\sin\omega_2 t$.

Воспользуемся известным тригонометрическим преобразованием

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha - \beta}{2}\sin\frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Следовательно, $f(t)$ можно представить следующим образом:

$$f(t) = 2A\cos\Omega t\sin\omega t,$$

где $\Omega = (\omega_1 - \omega_2)/2$, $\omega = (\omega_1 + \omega_2)/2\ (\Omega \ll \omega)$.

График результирующего колебания изображен на рис. 7.13. Амплитуда колебания изменяется по закону $2A\cos\Omega t$. Огибающая колебаний нанесена пунктиром.

Возникновение биений при сложении двух синусоидальных колебаний с равными амплитудами и близкими (но не равными) частотами используется на практике в различных целях, в частности для того, чтобы установить, что складываемые колебания имеют неодинаковые частоты.

§ 7.15. **Модулированные колебания.** При передаче информации широко применяют модулированные колебания. Модулированным колебанием $f(t) = A\sin(\omega t + \psi)$ называют колебание, в котором амплитуда $A$, частота $\omega$, фаза $\psi$ или и те и другие вместе изменяются во времени.

Колебание, в котором изменяется только амплитуда $A$, а угловая частота $\omega$ и фаза $\psi$ неизменны, называют *колебанием, модулированным по амплитуде*.

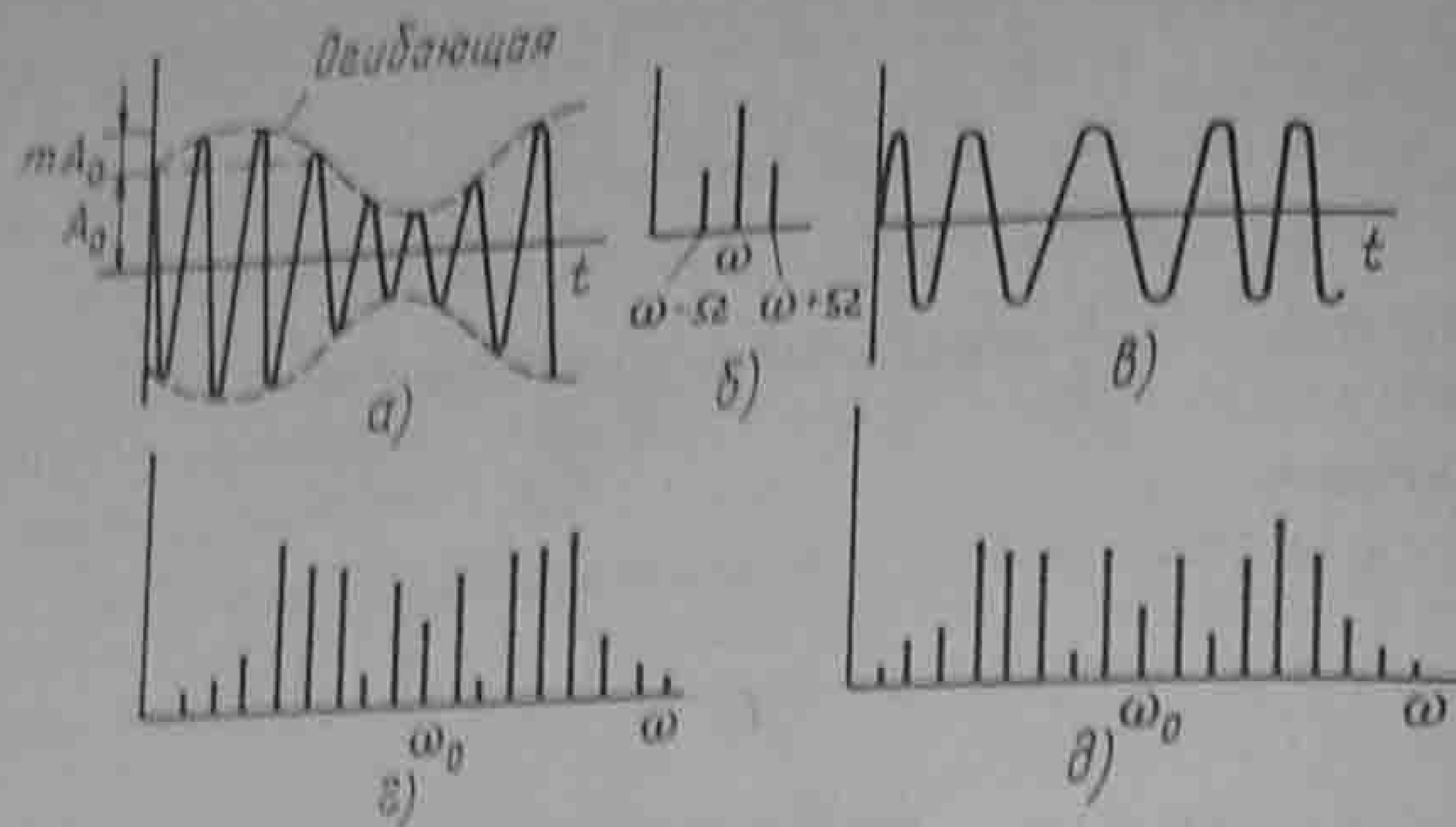



Рис. 7.14

Колебание с изменяющейся угловой частотой ω, но неизменными амплитудой $A$ и фазой ψ, называют *колебанием, модулированным по частоте.*

Колебание, в котором изменяется только фаза ψ, а амплитуда $A$ и угловая частота ω неизменны, называют *колебанием, модулированным по фазе.*

Простейшим амплитудно-модулированным (АМ) является колебание, в котором амплитуда модулирована по закону синуса:

$$f(t) = A_0(1 + m\sin\Omega t)\sin(\omega t + \psi),$$

где $m$ — глубина модуляции (как правило, $m < 1$); Ω — частота модуляции ($\Omega \ll \omega$).

График АМ-колебания показан на рис. 7.14,*а* (огибающая дана пунктиром).

Если воспользоваться известным из тригонометрии тождеством

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\cos(\alpha - \beta) - \frac{1}{2}\cos(\alpha + \beta),$$

то колебание $A_0(1 + m\sin\Omega t)\sin(\omega t + \psi)$ можно представить в виде суммы трех колебаний:

$$f(t) = A_0\sin(\omega t + \psi) + \frac{mA_0}{2}\cos[(\omega - \Omega)t +$$

$$+ \psi] - \frac{mA_0}{2}\cos[(\omega + \Omega)t + \psi].$$

Частоту ω называют *несущей*, а частоты $(\omega - \Omega)$ и $(\omega + \Omega)$ — боковыми. Спектр АМ-колебания изображен на рис. 7.14,*б*. Действующее значение функции $f(t)$ в соответствии с формулой (7.11) равно $\frac{A_0}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + (m^2/2)}$.



**Пример 74.** Разложить на составляющие функцию $f(t) = 20(1 + 0{,}6\sin 10^3 t)\sin 10^5 t$.

Решение. Боковые частоты $\omega - \Omega = 99 \cdot 10^3$; $\omega + \Omega = 101 \cdot 10^3$; $mA_0/2 = 6$.

Следовательно, $f(t) = 20\sin 10^5 t + 6\cos(99 \cdot 10^3 t) - 6\cos(101 \cdot 10^3 t)$.

Амплитуды колебания боковых частот при АМ-колебании зависят от глубины модуляции $m$, но не зависят от частоты модуляции Ω.

Ширина полосы частот, занимаемой АМ-колебанием, не зависит от $m$ и равна $(\omega + \Omega) - (\omega - \Omega) = 2\Omega$.

Рассмотрим спектры частотно-модулированных (ЧМ) и фазомодулированных (ФМ) колебаний. Форма колебаний качественно показана на рис. 7.14, *в*.

Аргумент синусоидально изменяющейся функции $f(t)$ обозначим $\alpha(t)$. Тогда

$$f(t) = A\sin[\alpha(t)], \tag{а}$$

$\alpha(t)$ можно интерпретировать как угол, на который повернется вращающийся вектор на комплексной плоскости за время $t$. Угловая частота поворота этого вектора $\omega = d\alpha(t)/dt$. В том случае, когда $\omega = \omega_0 = \text{const}$,

$$\alpha(t) = \int\omega_0 dt = \omega_0 t; \quad f(t) = A\sin\omega_0 t.$$

При частотной модуляции частота ω изменяется и равна $\omega_0 + \Delta\omega\varphi(t)$. При этом

$$\alpha(t) = \int[\omega_0 + \Delta\omega\varphi(t)]dt = \omega_0 t + \Delta\omega\int\varphi(t)dt.$$

При $\psi(t) = \cos\Omega t$

$$\alpha(t) = \omega_0 t + \gamma\sin\Omega t, \tag{б}$$

где $\gamma = \Delta\omega/\Omega$ — глубина модуляции.

Таким образом,

$$f(t)/A = \sin(\omega_0 t + \gamma\sin\Omega t) = \sin\omega t\cos(\gamma\sin\Omega t) +$$

$$+ \cos\omega_0 t\sin(\gamma\sin\Omega t),$$

но

$$\sin(\gamma\sin\Omega t) = 2\sum_{n=0}^{\infty} J_{2n+1}(\gamma)\sin(2n + 1)\Omega t;$$

$$\cos(\gamma\sin\Omega t) = J_0(\gamma) + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(\gamma)\cos 2n\Omega t,$$

где $J_k(\gamma)$ — бесселева функция $k$ — порядка от действительного ар-

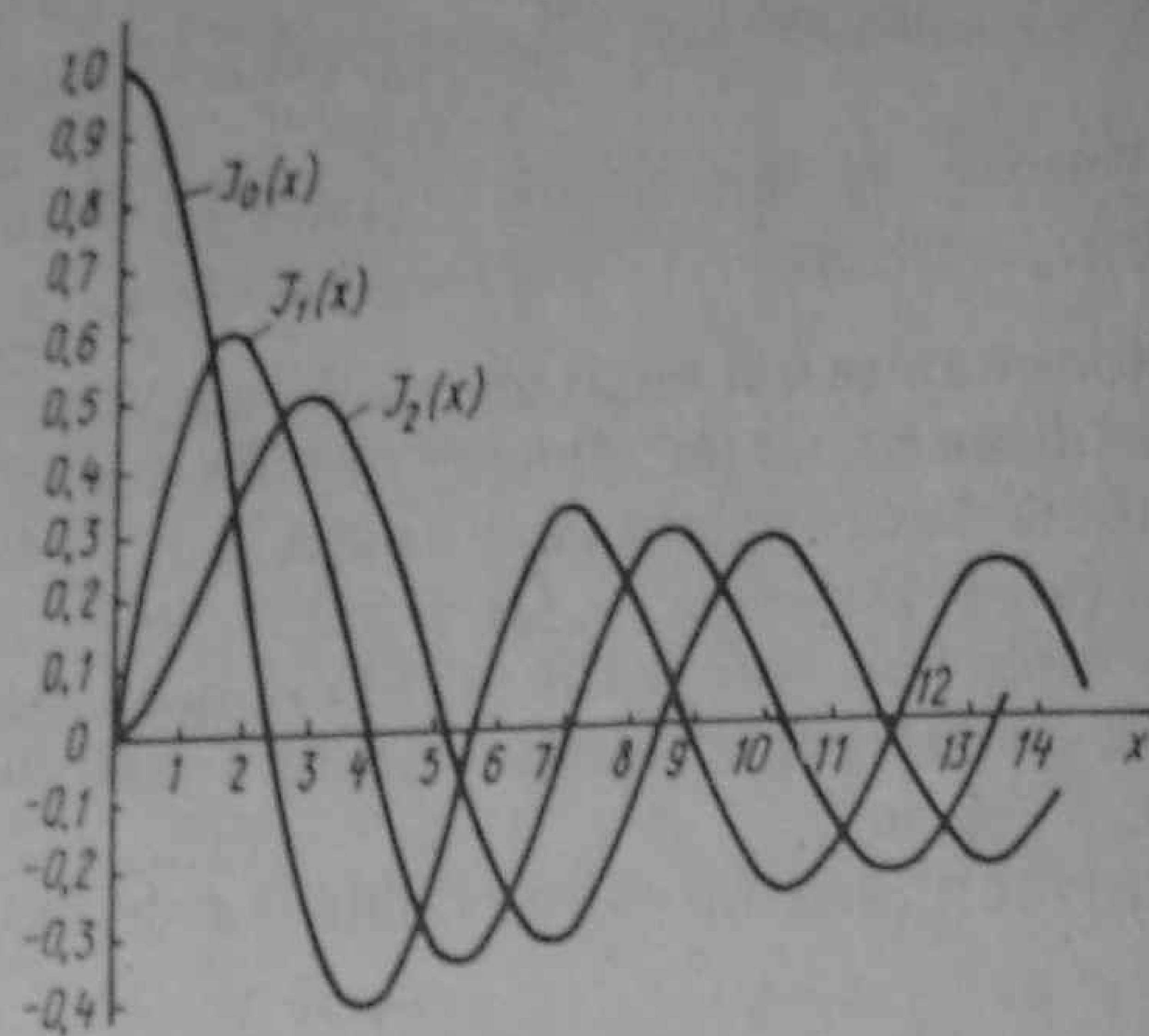



Рис. 7.15

гумента $\gamma$[1]. Графики трех бесселевых функций при $k = 0, 1, 2$ изображены на рис. 7.15.

После преобразований

$$f(t)/A = J_0(\gamma)\sin\omega_0 t + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k J_k(\gamma)\times$$

$$\times\sin(\omega_0 - k\Omega)t + \sum_{k=1}^{\infty} J_k(\gamma)\sin(\omega_0 + k\Omega)t. \qquad \text{(в)}$$

Теоретически полоса частот, занимаемых ЧМ-колебанием, равна бесконечности. Однако если учесть, что с ростом $k$ значение $J_k(\gamma)$ быстро уменьшается, и в равенстве (в) отбросить слагаемые рядов, амплитуды которых меньше 0,01, чему соответствует $k \geqslant \gamma$, то ЧМ-колебание практически занимает полосу частот

$$(\omega_0 + k\Omega) - (\omega_0 - k\Omega) = 2k\Omega \approx 2\gamma\Omega =$$

$$= 2(\Delta\omega/\Omega)\Omega = 2\Delta\omega.$$

Ширина ее зависит от глубины модуляции $\Delta\omega$ и не зависит от частоты модуляции $\Omega$. Амплитуды боковых частот зависят от $\Delta\omega$ и $\Omega$. Спектр ЧМ-колебания при $\gamma = 5$ показан на рис. 7.14, *г*.

При фазовой модуляции угловая частота $\omega_0$ неизменна и меняется только фаза $\psi(t)$. Следовательно, $\alpha(t) = \omega_0 t + \psi(t)$. Приняв $\psi(t) = \psi_m\cos\Omega t$, получим $f(t) = A\sin(\omega_0 t + \psi_m\cos\Omega t)$.

Амплитуда фазы $\psi_m$ от частоты модуляции $\Omega$ не зависит.

[1]Общее выражение для бесселевых функций приведено в § 15.14.



Опустив выкладки, определим, что амплитуды боковых частот зависят от $\psi_m$, а ширина полосы частот $2k\Omega \approx 2\psi_m\Omega$ — от $\psi_m$ и $\Omega$. Спектр ФМ-колебания при $k\Omega = 5$ изображен на рис. 7.14, *д*.

Из рис. 7.15 видно, что если $x \ll 1$, то $J_0(x) \approx 1$, а $J_1(x) \approx x/2$. Отсюда следует, что в ЧМ-колебании при $\gamma \ll 1$, а в ФМ-колебании при $\psi_m \ll 1$ можно ограничиться только основной гармоникой $\omega_0$ и двумя боковыми $\omega_0 \pm \Omega$, т. е. в этом случае имеет место почти такая же ситуация, что и в АМ-колебании.

Различие будет в том, что при ЧМ и ФМ модуляции на комплексной плоскости два вращающихся вектора боковых частот дают в сумме вектор, направленный перпендикулярно неподвижному вектору частоты $\omega_0$, тогда как при АМ модуляции векторная сумма двух вращающихся векторов боковых частот будет направлена вдоль неподвижного вектора частоты $\omega_0$. Это различие вызвано разными знаками у временных компонент гармоники частоты $\omega_0 - \Omega$.

**§ 7.16. Расчет линейных цепей при воздействии модулированных колебаний.** Расчет токов и напряжений в линейных электрических цепях при воздействии на них модулированных колебаний производят для мгновенных значений величин либо для мгновенного значения огибающей. В первом случае расчет проводят путем разложения модулированных колебаний на составляющие, вычисления токов и напряжений от каждой из них в отдельности и последующего суммирования соответствующих токов и напряжений на основании принципа наложения. При этом ограничиваются теми составляющими, которые существенны в формировании выходной величины.

При воздействии АМ - колебания на какую-либо систему точный расчет огибающей выходной величины может быть осуществлен по формуле интеграла Дюамеля для огибающей (см. § 8.67).

**Вопросы для самопроверки**

1. В каких случаях следует ожидать возникновения несинусоидальных токов и напряжений в электрических цепях? 2. Какие виды симметрии несинусоидальных кривых вы знаете и как они сказываются на гармоническом составе? 3. Изложите

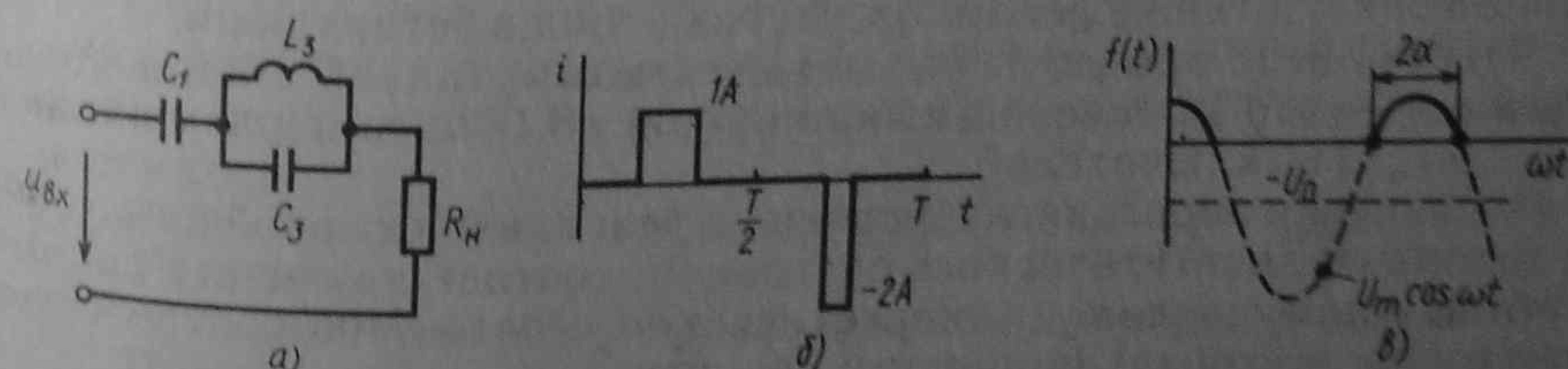



Рис. 7.16

основные положения, на которых основывается методика расчета линейных цепей при периодических несинусоидальных воздействиях. 4. Входное напряжение $u_{вх}(t)$ (рис. 7.16, *а*) содержит постоянную составляющую, первую и третью гармоники. Определите $C_1$ и $C_3$ через $\omega$ и $L_3$, чтобы в нагрузку $R_н$ проходила неизменной только первая гармоника, а остальные отсутствовали. (*Ответ:* $C_1=\frac{8}{9\omega^2 L_3}$, $C_3=\frac{1}{9\omega^2 L_3}$.) 5. Охарактеризуйте физический смысл действующего значения несинусоидального тока. 6. Всегда ли самым коротким расчетным путем при определении действующего значения несинусоидального тока $I$ является нахождение его по гармоническому составу, по формуле (7.10)? Определить $I$ на рис. 7.16, *б*. (*Ответ*: 0,707 А.) 7. Приборами каких систем можно измерить: а) действующее значение несинусоидального тока; б) среднее по модулю значение; в) амплитудное значение? 8. Определить действующее значение тока $i=5(1-0{,}8\sin 100t)\sin 1000t$. (*Ответ*: 4,075 А.) 9. Почему нельзя складывать действующие значения токов различных частот? 10. Могут ли отдельные слагаемые в формуле активной мощности (7.14) быть отрицательными? 11. При каких ограничениях несинусоидальные токи и напряжения приближенно могут быть заменены эквивалентными синусоидальными? 12. Чем можно объяснить, что при равномерной нагрузке трехфазной системы звезда—звезда для протекания токов третьих гармоник необходим нулевой провод? 13. В каком случае возникают колебания, называемые биениями? 14. Охарактеризуйте виды модулированных колебаний и занимаемые ими полосы частот. 15. Нарисуйте графики колебаний, модулированных по: а) амплитуде; б) частоте; в) фазе. 16. На рис. 7.16, *в* изображена функция $f(t)=(-U_0+U_m\cos\omega t)>0$ $(U_m>U_0)$. Она имеет вид положительных косинусоидальных импульсов. Угол отсечки $\alpha=\arccos\frac{U_0}{U_m}$. Вывести формулы для постоянной составляющей и амплитуды $k$-гармоники ряда Фурье. [*Ответы:* $A_0=\frac{U_m}{\pi}(\sin\alpha-\alpha\cos\alpha)$; $A^m_k=\frac{2U_m}{\pi k(k^2-1)}(\sin k\alpha\cos\alpha-k\cos k\alpha\sin\alpha)$].

17. Решите задачи 9.8; 9.12; 9.13; 9.15; 9.16; 9.19; 9.21; 9.25.

Глава восьмая

# ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

**§ 8.1. Определение переходных процессов.** Под *переходными процессами* понимают процессы перехода от одного режима работы электрической цепи (обычно периодического) к другому (обычно также периодическому), чем-либо отличающемуся от предыдущего, например амплитудой, фазой, формой или частотой, действующей в схеме ЭДС, значениями параметров схемы, а также вследствие изменения конфигурации цепи.

Периодическими являются режимы синусоидального и постоянного тока, а также режим отсутствия тока в ветвях цепи.

Переходные процессы вызываются коммутацией в цепи. *Коммутация* — это процесс замыкания (рис. 8.1, *а*) или размыкания (рис. 8.1, *б*) выключателей.

Физически переходные процессы представляют собой процессы перехода от энергетического состояния, соответствующего докоммутационному режиму, к энергетическому состоянию, соответствующему послекоммутационному режиму.



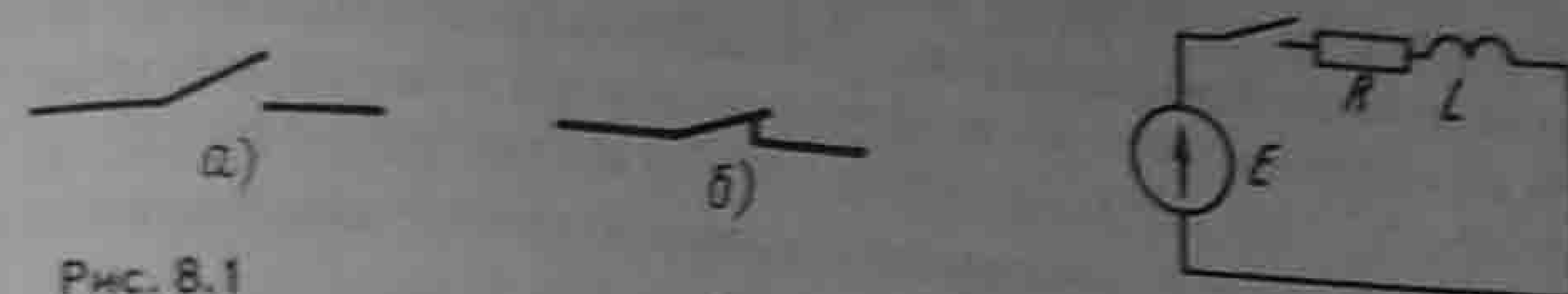



Рис. 8.1

Рис. 8.2

Переходные процессы обычно являются быстро протекающими: длительность их составляет десятые, сотые, а иногда даже миллиардные доли секунды; сравнительно редко длительность переходных процессов достигает секунд и десятков секунд. Тем не менее изучение переходных процессов важно, так как оно дает возможность установить, как деформируются по форме и амплитуде сигналы при прохождении их через усилители и другие устройства, позволяет выявить превышения напряжения на отдельных участках цепи, которые могут оказаться опасными для изоляции установки, увеличения амплитуд токов, которые могут в десятки раз превышать амплитуду тока установившегося периодического процесса (и вызвать недопустимые механические усилия), а также определить продолжительность переходного процесса.

**§ 8.2. Приведение задачи о переходном процессе к решению линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.** Запишем уравнение по второму закону Кирхгофа для схемы рис. 8.2 при замкнутом ключе. Сумма падений напряжений на элементах $L$ и $R$ равна ЭДС $E$:

$$u_L + Ri = E,$$

или

$$L\frac{di}{dt} + Ri = E. \qquad (8.1)$$

Как известно из курса математики, уравнение, содержащее неизвестную функцию (в нашем случае $i$) и ее производные (в нашем случае $L\frac{di}{dt}$), называют *дифференциальным уравнением*.

Таким образом, определение тока как функции времени, по сути дела, есть решение дифференциального уравнения.

Известно, что решение дифференциального уравнения — это отыскание функции, удовлетворяющей ему. Подстановка этой функции и ее производных превращает дифференциальное уравнение в тождество.

Решение линейных дифференциальных уравнений будем проводить в основном четырьмя методами: классическим, операторным, методом интеграла Дюамеля и методом пространства состояний.

Перед тем как изучать эти методы, необходимо рассмотреть общие свойства линейных цепей при переходных процессах, а так-

же общие законы, которым подчиняются переходные процессы в
линейных электрических цепях. § 8.3 — 8.25 посвящены вопросам,
имеющим отношение ко всем перечисленным методам расчета переходных процессов; однако часть этих параграфов (см. § 8.3, 8.8,
8.10 и 8.12) следует рассматривать так же, как введение к классическому методу расчета переходных процессов.

**§ 8.3. Принужденные и свободные составляющие токов и напряжений.** Известно, что общий интеграл линейного дифференциального уравнения равен сумме частного решения неоднородного уравнения плюс общее решение однородного уравнения. Частное решение уравнения (8.1) равно $E/R$ ($E$ — постоянная ЭДС).

Однородное уравнение получаем из исходного, если в нем возьмем правую часть равной нулю. В нашем случае

$$L\frac{di}{dt} + Ri = 0. \tag{8.2}$$

Решением однородного уравнения является показательная функция вида $Ae^{pt}$.

Для всех переходных процессов условимся, что момент $t = 0$ соответствует моменту коммутации.

Постоянные $A$ и $p$ не зависят от времени. Без вывода дадим их значения для рассматриваемого примера: $A = -E/R$ и $p = -R/L$. Следовательно, решение уравнения (8.1) запишется так:

$$i = \frac{E}{R} - \frac{E}{R}e^{-\frac{R}{L}t}, \tag{8.3}$$

где $E/R$ — частное решение неоднородного уравнения (8.1); $-\frac{E}{R}e^{-\frac{R}{L}t}$ — общее решение однородного уравнения (8.2). Подстановка (8.3) в (8.1) дает тождество

$$L\frac{d}{dt}\left(\frac{E}{R} - \frac{E}{R}e^{-\frac{R}{L}t}\right) + R\left(\frac{E}{R} - \frac{E}{R}e^{-\frac{R}{L}t}\right) =$$
$$= -L\frac{E}{R}\left(-\frac{R}{L}\right)e^{-\frac{R}{L}t} + E - Ee^{-\frac{R}{L}t} = E.$$

Следовательно, (8.3) действительно является решением уравнения (8.1).

Частное решение неоднородного дифференциального уравнения будем называть *принужденной составляющей тока* (напряжения), а полное решение однородного уравнения — *свободной составляющей*. Применительно к рассмотренному примеру принужденная составляющая тока $i_{пр} = E/R$, а свободная составляющая $i_{св} = -\frac{E}{R}e^{-\frac{R}{L}t}$. Полный ток $i = i_{пр} + i_{св}$.



Кроме индексов «пр» (принужденный) и «св» (свободный) токи и напряжения могут иметь и дополнительные индексы, соответствующие номерам ветвей на схеме.

Принужденная составляющая тока (напряжения) физически представляет собой составляющую, изменяющуюся с той же частотой, что и действующая в схеме принуждающая ЭДС. Если в схеме действует принуждающая синусоидальная ЭДС частоты $\omega$, то принужденная составляющая любого тока и любого напряжения в схеме является соответственно синусоидальным током (синусоидальным напряжением) частоты $\omega$.

Определяются принужденные составляющие в цепи синусоидального тока с помощью символического метода (см. гл. 3). Если в схеме действует источник постоянной ЭДС (как, например, в схеме рис. 8.2), то принужденный ток есть постоянный ток и находят его с помощью методов, рассмотренных в гл. 2.

Постоянный ток через конденсатор не проходит, поэтому принужденная составляющая тока через него в цепях с источниками постоянной ЭДС равна нулю. Кроме того, напомним, что падение напряжения на индуктивной катушке от неизменного во времени тока равно нулю.

В линейных электрических цепях свободные составляющие токов и напряжений затухают во времени по показательному закону $e^{pt}$. Так, в рассмотренном примере $i_{св} = -\frac{E}{R}e^{-\frac{R}{L}t}$. С увеличением времени $t$ множитель $e^{-\frac{R}{L}t}$ быстро уменьшается. Название "свободная" объясняется тем, что эта составляющая есть решение уравнения, свободного от вынуждающей силы (однородного уравнения без правой части).

Из трех токов (полного, принужденного и свободного) и трех напряжений (полного, принужденного и свободного) основное значение имеют полный ток и полное напряжение.

Полный ток является тем током, который в *действительности* протекает по той или иной ветви при переходном процессе. Его можно измерить и записать на осциллограмме. Аналогично, полное напряжение — это напряжение, которое в действительности имеется между некоторыми точками электрической цепи при переходном процессе. Его также можно измерить и записать на осциллограмме.

Принужденные и свободные составляющие токов и напряжений во время переходного процесса играют вспомогательную роль; они являются теми *расчетными* компонентами, сумма которых дает действительные величины.

Здесь следует еще раз обратить внимание на тот факт, что при любых переходных и установившихся процессах соблюда-

ют два основных положения: ток через индуктивную катушку и напряжение на конденсаторе не могут изменяться скачком[1].

**§ 8.4. Обоснование невозможности скачка тока через индуктивную катушку и скачка напряжения на конденсаторе**. Доказательство того, что ток через индуктивную катушку не может изменяться скачком, проведем на примере схемы рис. 8.2. По второму закону Кирхгофа

$$L\frac{di}{dt} + Ri = E.$$

Ток $i$ и ЭДС $E$ могут принимать конечные (не бесконечно большие) значения.

Допустим, что ток $i$ может измениться скачком. Скачок тока означает, что за бесконечно малый интервал времени $\Delta t \to 0$ ток изменится на конечное значение $\Delta i$. При этом $\Delta i / \Delta t \to \infty$. Если вместо $L\frac{di}{dt}$ в уравнение (8.1) подставить $\infty$, то его левая часть не будет равна правой части и не будет выполнен второй закон Кирхгофа.

Следовательно, допущение о возможности скачкообразного изменения тока через индуктивную катушку противоречит второму закону Кирхгофа.

Ток через $L$ не может изменяться скачком, но напряжение на $L$, равное $L\frac{di}{dt}$, скачком измениться может. Это не противоречит второму закону Кирхгофа.

Доказательство того, что напряжение на конденсаторе не может изменяться скачком, проводится аналогично.

Обратимся к простейшей цепи с конденсатором (рис. 8.3, *а*). Составим для нее уравнение по второму закону Кирхгофа:

$$Ri + u_C = E,$$

где $E$ — ЭДС источника, конечная величина; $u_C$ — напряжение на конденсаторе.

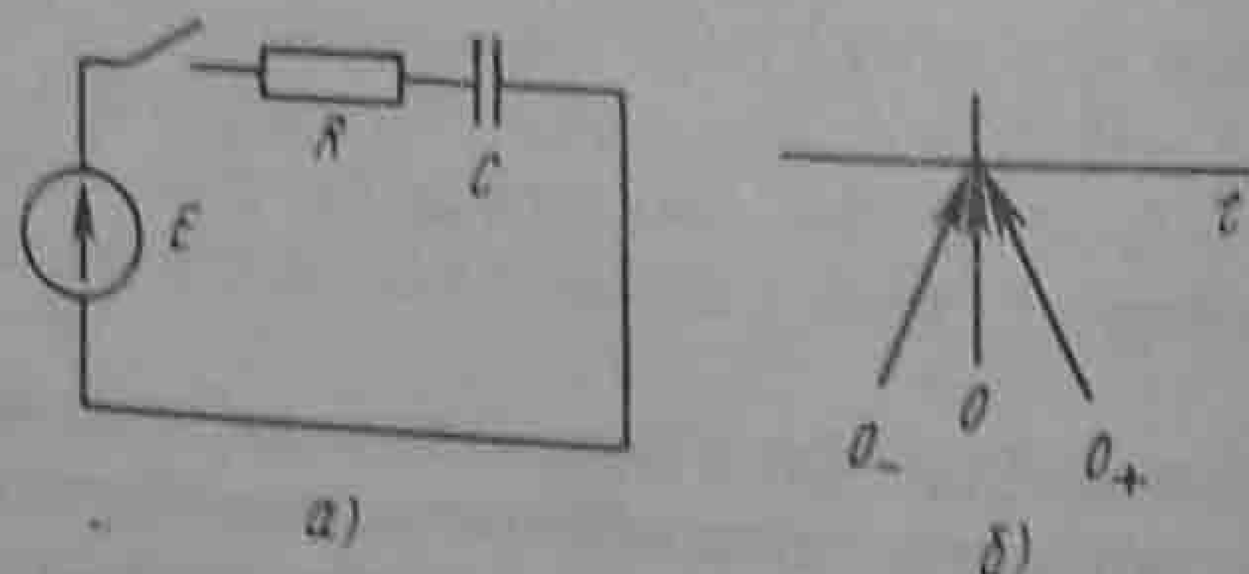



Рис. 8.3

[1]Иногда эти положения формулируются так: потокосцепление индуктивной катушки и заряд конденсатора могут изменяться только плавно, без скачков. Дальнейшее обобщение законов коммутации дано в § 8.28.



Так как $i = C\frac{du_C}{dt}$, то

$$RC\frac{du_C}{dt} + u_C = E. \qquad (8.4)$$

Если допустить, что напряжение $u_C$ может измениться скачком, то $\frac{\Delta u_C}{\Delta t} \approx \frac{du_C}{dt} \to \infty$ и левая часть (8.4) не будет равна правой части. Отсюда следует, что допущение о возможности скачкообразного изменения напряжения на конденсаторе противоречит второму закону Кирхгофа. Однако ток через конденсатор, равный $C\frac{du_C}{dt}$, может изменяться скачком; это не противоречит второму закону Кирхгофа.

Из указанных двух основных положений следуют два закона (правила) коммутации.

**§ 8.5. Первый закон (правило) коммутации**. Ток через индуктивный элемент $L$ непосредственно до коммутации $i_L(0_-)$ равен току через этот же индуктивный элемент непосредственно после коммутации $i_L(0_+)$:

$$i_L(0_-) = i_L(0_+). \qquad (8.5)$$

Время $t = 0_-$ представляет собой время непосредственно до коммутации, $t = 0_+$ — после коммутации (рис. 8.3, *б*). Равенство (8.5) выражает собой первый закон коммутации.

**§ 8.6. Второй закон (правило) коммутации**. Обозначим напряжение на конденсаторе непосредственно до коммутации $u_C(0_-)$, а напряжение на нем непосредственно после коммутации $u_C(0_+)$.

В соответствии с невозможностью скачка напряжения на конденсаторе

$$u_C(0_-) = u_C(0_+). \qquad (8.6)$$

Равенство (8.6) выражает собой второй закон коммутации.

Перед тем как приступить к изучению методов расчета переходных процессов, необходимо условиться о некоторых дополнительных определениях.

**§ 8.7. Начальные значения величин.** Под *начальными значениями* величин (в литературе их называют еще начальными условиями) понимают значения токов и напряжений в схеме при $t = 0$.

Как уже отмечалось, токи через индуктивные элементы и напряжения на конденсаторах непосредственно после коммутации равны их значениям непосредственно до коммутации. Остальные величины: напряжения на индуктивных элементах, напряжения на резисторах, токи через конденсаторы, токи через резисторы могут

изменяться скачком, и поэтому их значения после коммутации чаще всего оказываются не равными их значениям до коммутации. Поэтому следует различать докоммутационные и послекоммутационные начальные значения.

*Докоммутационными начальными значениями* называют значения токов и напряжений непосредственно до коммутации (при $t=0_-$); *послекоммутационными начальными значениями* — значения токов и напряжений непосредственно после коммутации (при $t=0_+$).

**§ 8.8. Независимые и зависимые (послекоммутационные) начальные значения.** Для любой схемы после коммутации в ней можно записать уравнения по законам Кирхгофа и из этих уравнений определить значения токов во всех ветвях и напряжений на любых участках схемы в послекоммутационном режиме (при $t=0_+$).

С этой целью значения токов в ветвях, содержащих индуктивные элементы, и значения напряжений на конденсаторах берут равными тем значениям, которые они имели до коммутации при $t=0_-$, а остальные токи и напряжения после коммутации при $t=0_+$ находят из уравнений Кирхгофа, поскольку часть слагаемых в них известна.

Значения токов через индуктивные элементы и напряжений на конденсаторах, известные из докоммутационного режима, условимся называть *независимыми начальными значениями*.

Значения остальных токов и напряжений при $t=0_+$ в послекоммутационной схеме, определяемые по независимым начальным значениям из законов Кирхгофа, будем называть *зависимыми начальными значениями*.

**§ 8.9. Нулевые и ненулевые начальные условия.** Если к началу переходного процесса непосредственно перед коммутацией все токи и напряжения на пассивных элементах схемы равны нулю, то в схеме имеют место *нулевые начальные условия*. Если же к началу переходного процесса хотя бы часть токов и напряжений в схеме не равны нулю, то в схеме имеют место *ненулевые начальные условия*.

При нулевых начальных условиях токи в индуктивных элементах и напряжения на конденсаторах начнут изменяться с нулевых значений, при ненулевых условиях — с тех значений, которые они имели непосредственно до коммутации.

**§ 8.10. Составление уравнений для свободных токов и напряжений.** Для послекоммутационной схемы составляют уравнения по законам Кирхгофа для полных токов и напряжений, так же как это делалось и раньше: сначала обозначают токи в ветвях и произвольно выбирают для них положительные направления, затем составляют уравнения по первому и второму законам Кирхгофа. Так, для



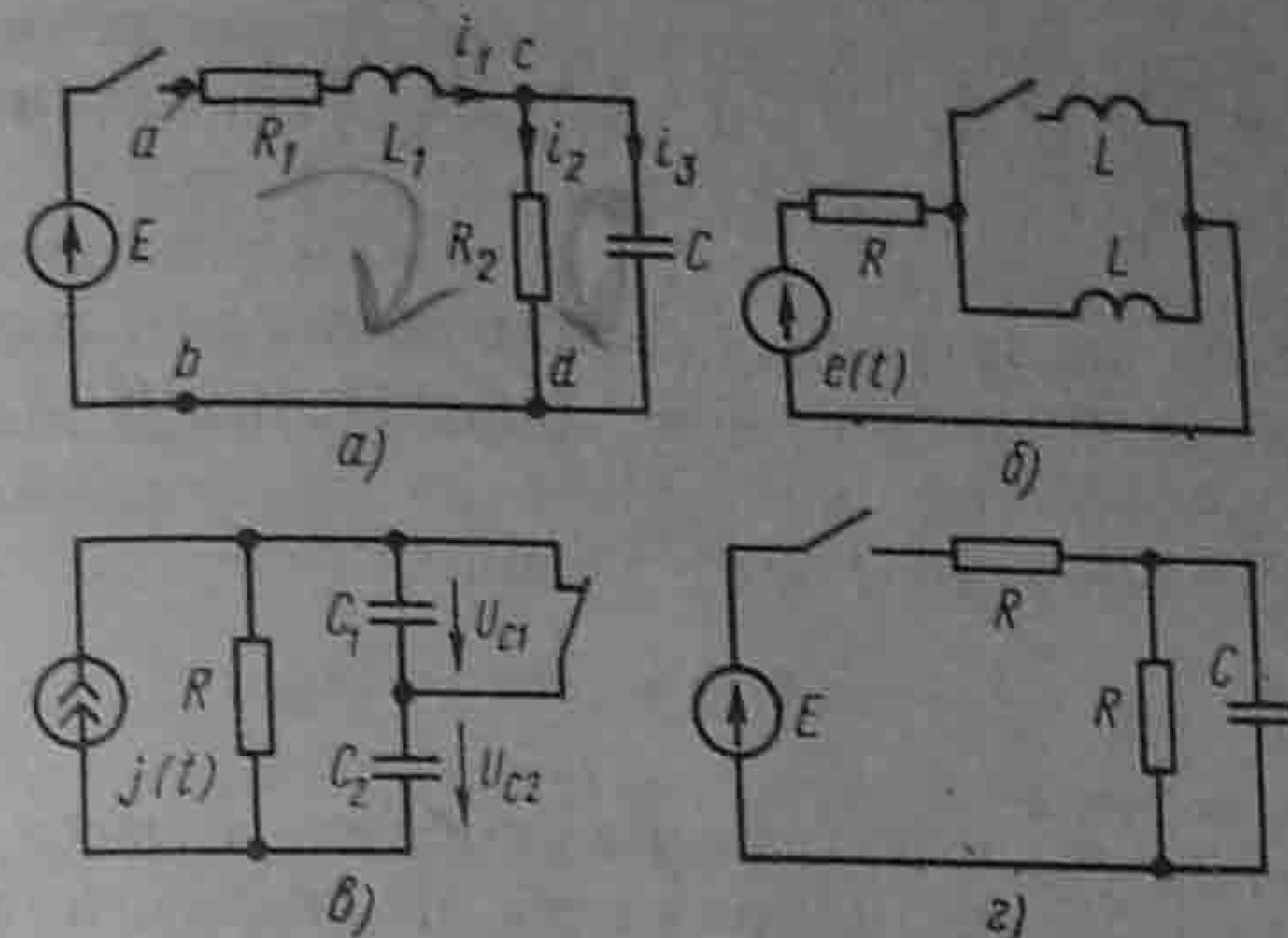



Рис. 8.4

схемы рис. 8.4, *а* после выбора положительных направлений для токов имеем:

$$i_1 - i_2 - i_3 = 0;$$

$$L_1 \frac{di_1}{dt} + R_1 i_1 + i_2 R_2 = E;$$

$$i_2 R_2 - \frac{1}{C}\int i_3 dt = 0.$$

В этих уравнениях $i_1$, $i_2$ и $i_3$ — полные токи. Каждый из них состоит из свободного и принужденного токов. Для того чтобы от этой системы уравнений перейти к уравнениям для свободных токов, «освободим» систему от вынуждающих ЭДС (в нашем случае от ЭДС $E$) и вместо $i_1$ запишем $i_{1св}$, вместо $i_2$ — $i_{2св}$ и т. д. В результате получим:

$$i_{1св} - i_{2св} - i_{3св} = 0;$$

$$L_1 \frac{di_{1св}}{dt} + i_{1св} R_1 + i_{2св} R_2 = 0; \quad (8.7)$$

$$i_{2св} R_2 - \frac{1}{C}\int i_{3св} dt = 0.$$

Заметим, что для любого контура любой электрической цепи сумма падений напряжений от свободных составляющих токов равна нулю.

**§ 8.11. Алгебраизация системы уравнений для свободных токов.** В § 8.3 говорилось о том, что свободный ток представляет собой решение однородного дифференциального уравнения (уравнения без правой части). Как известно из курса математики, решение

однородного дифференциального уравнения записывают в виде показательных функций $Ae^{pt}$. Таким образом, уравнение для каждого свободного тока можно представить в виде $i_{св} = Ae^{pt}$.

Постоянная интегрирования $A$ для каждого свободного тока своя. Показатели же затухания $p$ одинаковы для свободных токов ветвей. Физически это объясняется тем, что вся цепь охвачена единым (общим) переходным процессом.

Составим производную от свободного тока:

$$\frac{di_{св}}{dt} = \frac{d}{dt}(Ae^{pt}) = pAe^{pt} = pi_{св}.$$

Следовательно, производную от свободного тока можно заменить на $pi_{св}$, а свободное напряжение на индуктивном элементе $L\frac{di_{св}}{dt}$ – на $Lpi_{св}$. Найдем интеграл от свободного тока:

$$\int i_{св} dt = \int Ae^{pt} dt = Ae^{pt}/p = i_{св}/p.$$

Постоянная интегрирования взята здесь равной нулю, так как свободные составляющие не содержат не зависящих от времени слагаемых.

Следовательно, интеграл от свободного тока можно заменить на $i_{св}/p$, а свободное напряжение на конденсаторе $\frac{1}{C}\int i_{св} dt$ – на $i_{св}/(Cp)$.

В систему дифференциальных уравнений для свободных токов подставим $Lpi_{св}$ вместо $L\frac{di_{св}}{dt}$ и $\frac{i_{св}}{Cp}$ вместо $\frac{1}{C}\int i_{св} dt$. Следовательно,

$$i_{1св} - i_{2св} - i_{3св} = 0;$$
$$(L_1p + R_1)\, i_{1св} + i_{2св}R_2 = 0; \qquad (8.8)$$
$$i_{2св}R_2 - i_{3св}/(Cp) = 0.$$

Уравнения (8.8) представляют собой систему алгебраических уравнений относительно $i_{1св}$, $i_{2св}$, $i_{3св}$ и в отличие от исходной системы не содержат производных и интегралов.

Переход от системы линейных дифференциальных уравнений к системе алгебраических уравнений называют *алгебраизацией системы дифференциальных уравнений* для свободных токов. Можно сказать, что система (8.8) есть результат алгебраизации системы дифференциальных уравнений (8.7).

**§ 8.12. Составление характеристического уравнения системы.** Число алгебраических уравнений равно числу неизвестных свободных токов. Положим, что $p$ известно (в действительности оно пока не найдено и будет определено в дальнейшем) и решим систему (8.8) относительно $i_{1св}$, $i_{2св}$ и $i_{3св}$:

$$i_{1св} = \Delta_1/\Delta; \quad i_{2св} = \Delta_2/\Delta; \quad i_{3св} = \Delta_3/\Delta,$$



где $\Delta$ — определитель системы. В рассмотренном примере

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ L_1p+R_1 & R_2 & 0 \\ 0 & R_2 & -1/(Cp) \end{vmatrix}.$$

Определитель $\Delta_1$ получим из выражения для определителя $\Delta$ путем замены первого столбца правой частью уравнений (8.8):

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & R_2 & 0 \\ 0 & R_2 & -1/(Cp) \end{vmatrix}.$$

Определитель $\Delta_2$ получим из выражения для $\Delta$ путем замены второго столбца правой частью системы (8.8) и т. д.

Так как в правой части системы (8.8) находятся нули, то в каждом определителе $\Delta_1$, $\Delta_2$ и $\Delta_3$ один из столбцов будет состоять из нулей.

Известно, что если в определителе один из столбцов состоит из нулей, то этот определитель равен нулю. Следовательно, $\Delta_1 = 0$; $\Delta_2 = 0$; $\Delta_3 = 0$.

Из физических соображений ясно, что каждый из свободных токов не может быть равен нулю, ибо в этом случае не будут выполнены законы коммутации. Однако из предыдущего следует, что $i_{1св} = 0/\Delta$; $i_{2св} = 0/\Delta$; $i_{3св} = 0/\Delta$.

Свободные токи могут быть не равны нулю в том случае, когда определитель системы

$$\Delta = 0. \qquad (8.9)$$

Таким образом, определитель $\Delta$ алгебраизированной системы уравнений должен равняться нулю.

Уравнение $\Delta = 0$ называют *характеристическим уравнением*. Единственным неизвестным в нем является $p$.

**Пример 75.** Используя уравнение (8.9), составить характеристическое уравнение для схемы рис. 8.4, *а* и найти его корни.

Решение:

$$\frac{R_2}{Cp} + R_2(L_1p + R_1) + \frac{pL_1 + R_1}{Cp} = 0$$

или

$$\frac{p^2R_2L_1C + p(R_1R_2C + L_1) + R_1 + R_2}{pC} = 0.$$

Если дробь равна нулю, то равен нулю ее числитель. Следовательно,

$$p^2R_2L_1C + p(R_1R_2C + L_1) + R_1 + R_2 = 0. \qquad (8.10)$$

Корни квадратного уравнения

$$p_{1,2} = \frac{-(R_1R_2C + L_1) \pm \sqrt{(R_1R_2C + L_1)^2 - 4(R_1 + R_2)R_2L_1C}}{2R_2L_1C}. \qquad (8.11)$$

В начале § 8.11 говорилось о том, что решение для свободного тока берется в виде $Ae^{pt}$. Если характеристическое уравнение имеет не один корень, а несколько, например $n$, то для каждого свободного тока (напряжения) нужно взять $\sum_{k=1}^{n} A_k e^{p_k t}$.

**Пример 76.** Найти корни характеристического уравнения схемы рис. 8.4, *а* при: 1) $C=1$ мкФ; 2) $C=10$ мкФ; 3) $C=100$ мкФ; $R_1=R_2=100$ Ом; $L_1=1$ Гн.

Р е ш е н и е. 1) При $C=1$ мкФ $R_1R_2C+L_1=100\cdot 100\cdot 10^{-6}+1=1{,}01$; $4(R_1+R_2)R_2L_1C=4\cdot 200\cdot 100\cdot 10^{-6}=0{,}08$; $2R_2L_1C=2\cdot 100\cdot 10^{-6}=2\cdot 10^{-4}$;

$$p_{1,2}=\frac{-1{,}01\pm\sqrt{1{,}01^2-0{,}08}}{2\cdot 10^{-4}};\ p_1=-250\ \text{c}^{-1};\ p_2=-9850\ \text{c}^{-1}.$$

2) При $C=10$ мкФ $p_1=-230\ \text{c}^{-1}$; $p_2=-870\ \text{c}^{-1}$.
3) При $C=100$ мкФ $p_1=-100+100j$; $p_2=-100-100j$.

**§ 8.12. Составление характеристического уравнения путем использования выражения для входного сопротивления цепи на переменном токе.** Характеристическое уравнение для определения $p$ часто составляют более простым способом, чем обсуждавшийся в предыдущем параграфе. С этой целью составляют выражение входного сопротивления двухполюсника на переменном токе [обозначим его $Z(j\omega)$], заменяют в нем $j\omega$ на $p$ [получают $Z(p)$] и приравнивают $Z(p)$ нулю.

Уравнение $Z(p)=0$ совпадает с характеристическим. Такой способ составления характеристического уравнения предполагает, что в схеме отсутствуют магнитно-связанные ветви. Если же магнитная связь между ветвями имеется, то предварительно следует осуществить развязывание магнитно-связанных ветвей (см. § 3.41).

Поясним сказанное. Как отмечалось в § 2.15, если для некоторой цепи на постоянном токе составить систему уравнений по методу контурных токов, то входная проводимость относительно $m$-ветви $g_m=\Delta_m/\Delta$, а входное сопротивление $R_m=\Delta/\Delta_m$. Для режима синусоидального тока входное сопротивление $Z_{вх\,m}=\dfrac{\Delta(j\omega)}{\Delta_m(j\omega)}$.

Комплексное число $p=a+jb$ в соответствии с § 8.41 представим в виде $p=j(b-ja)=j\Omega$, где $\Omega$ — комплексная угловая частота. Сопротивление $Z(p)$ — это сопротивление цепи на комплексной частоте; $Z(j\omega)$ — это частный случай $Z(p)$, когда $\Omega=\omega$. Имея это в виду, запишем

$$Z_{вх\,m}(p)=\Delta(p)/\Delta_m(p),$$

где $\Delta(p)$ — определитель системы уравнений, составленных по методу контурных токов.

Таким образом, уравнение $Z_{вх\,m}(p)=0$ *имеет те же корни, что и* уравнение $\Delta(p)=0$.



При составлении $Z(p)$ следует учитывать внутреннее сопротивление источника питания.

Характеристическое уравнение можно составить так же, взяв за основу не метод контурных токов, а метод узловых потенциалов. В этом случае следует приравнять нулю определитель матрицы узловых проводимостей, полагая при составлении матрицы один из узлов схемы заземленным.

**Пример 77.** Для схемы рис. 8.4, *а* составить характеристическое уравнение.

Р е ш е н и е. Входное сопротивление относительно зажимов $ab$ при переменном токе

$$Z_{ab}(j\omega)=j\omega L_1+R_1+\frac{R_2\dfrac{1}{j\omega C}}{R_2+\dfrac{1}{j\omega C}}.$$

Заменим в нем $j\omega$ на $p$ и приравняем его нулю:

$$Z_{ab}(p)=pL_1+R_1+\frac{R_2\dfrac{1}{pC}}{R_2+\dfrac{1}{pC}}=0.$$

Отсюда

$$\frac{p^2L_1CR_2+p(L_1+R_1R_2C)+R_1+R_2}{1+R_2Cp}=0$$

или

$$p^2L_1CR_2+p(L_1+R_1R_2C)+(R_1+R_2)=0. \qquad (8.10а)$$

Уравнение (8.10а) совпадает с уравнением (8.10), составленным иным путем, но получено оно путем использования выражения для входного сопротивления первой ветви схемы рис. 8.4, *а* относительно зажимов $ab$. Точно такое же уравнение можно получить, если записать выражение для входного сопротивления любой другой ветви.

Следует иметь в виду, что во избежание потери корня (корней) нельзя сокращать $\Delta(p)$ и $\Delta_k(p)$ на общий множитель, если он имеется. Однако на общий множитель $p$ сокращать $\Delta(p)$ и $\Delta_k(p)$, как правило, возможно, но не всегда. Сокращение на $p$ допустимо для схем, в которых исследуемая величина из физических соображений не может содержать незатухающую свободную составляющую. Если же исследуемая величина в рассматриваемой схеме может иметь незатухающую свободную составляющую, то сокращать числитель и знаменатель $Z(p)$ на $p$ (терять корень $p=0$) нельзя. Для иллюстрации недопустимости сокращения на $p$ рассмотрим два примера. В послекоммутационной схеме рис. 8.4, *б* имеется контур из индуктивных элементов, активное сопротивление которого равно нулю. В нем теоретически может протекать незатухающая свободная составляющая тока, которая не будет учтена в решении, если сократить числитель и знаменатель $Z(p)=\dfrac{pL(2R+pL)}{2pL}$ на $p$. В схеме рис. 8.4, *в*, дуальной схеме рис. 8.4, *б* после коммутации на конденсаторах возможно возникновение равных по значению и противоположно направленных незатухающих свободных составляющих напряжений. Свободный заряд каждого конденсатора не сможет стечь через сопротивление $R$, так как этому мешает второй конденсатор с противоположно направленной незатухающей свободной составляющей напряжения.

Для схемы рис. 8.4, *в* характеристическое уравнение получим, приравняв нулю входную проводимость относительно зажимов источника тока:

$$G(p) = g + \frac{pCpC}{2pC} = \frac{pC(2g+pC)}{2pC} = 0,$$

где $g = 1/R$.

В качестве примера цепи, для которой можно сокращать числитель и знаменатель $Z(p)$ на $p$, приведем схему рис. 8.4, *г*. Для нее

$$Z(p) = R + \frac{R\frac{1}{pC}}{R+\frac{1}{pC}} = \frac{RCp(RCp+2)}{Cp(RCp+1)} = \frac{R(RCp+2)}{RCp+1}.$$

## § 8.14. Основные и неосновные зависимые начальные значения.

Для сложных схем со многими накопителями энергии число независимых начальных значений (начальных условий) может оказаться больше, чем порядок характеристического уравнения, и, следовательно, больше числа постоянных интегрирования. В этом случае при определении постоянных интегрирования используем не все независимые начальные значения, а часть из них.

Основными независимыми начальными значениями называют те токи в индуктивных элементах и напряжения на конденсаторах, которые могут быть заданы независимо от других. Остальные независимые начальные значения называют *неосновными*.

В качестве иллюстрации обратимся к схеме на рис. 8.5. Она содержит три индуктивных элемента и один емкостный. В схеме всего четыре независимых начальных значения (начальных условия):

1) $i_1(0_+) = 0$; 2) $i_2(0_+) = 0$; 3) $i_3(0_+) = 0$; 4) $u_C(0_+) = 0$.

Из них три являются основными и одно — неосновным. Выбор основных значений здесь произволен. Если за основные взять первое, второе и четвертое значения, то неосновным будет третье.

**Пример 78.** Убедимся в том, что для схемы рис. 8.5 характеристическое уравнение имеет не четвертую, а третью ступень.

Р е ш е н и е: Составляем выражение для входного сопротивления:

$$Z(p) = R_1 + pL_1 + \frac{(pL_2 + \frac{1}{pC_2})pL_3}{pL_2 + pL_3 + \frac{1}{pC_2}} = 0.$$

Отсюда

$$(R_1 + pL_1)[1 + p^2C_2(L_2+L_3)] + pL_3(1 + C_2L_2p^2) = 0.$$

Следовательно, характеристическое уравнение имеет третью степень.

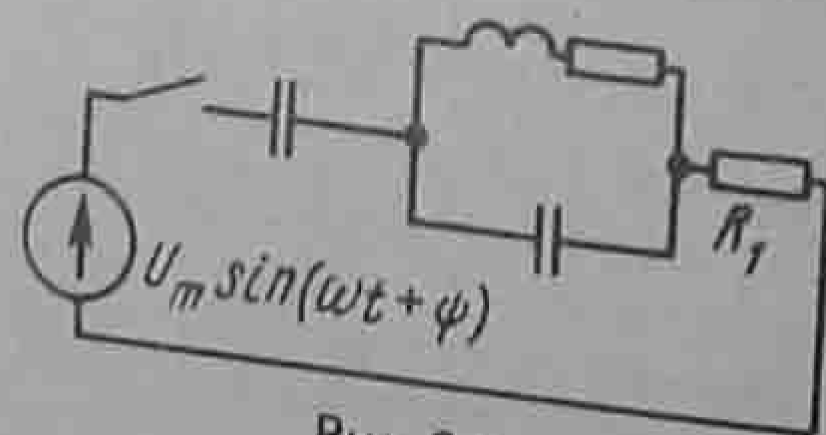
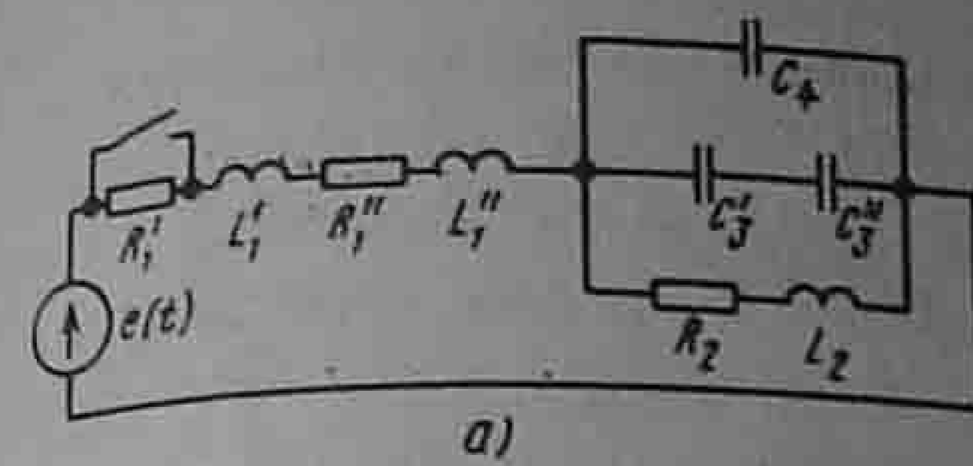



Рис. 8.5





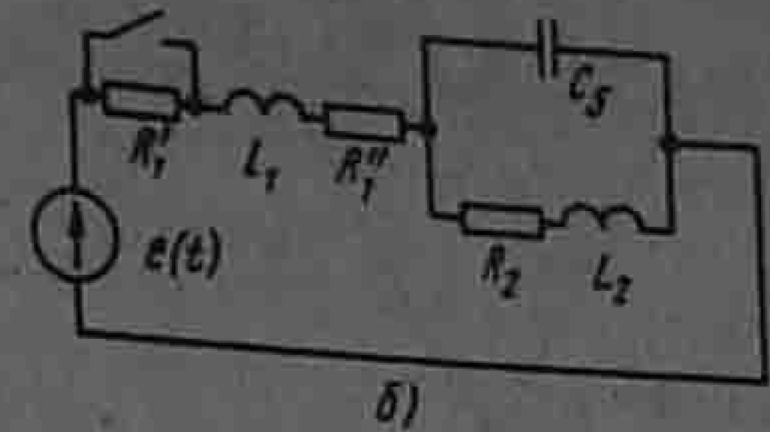




Рис. 8.6

## § 8.15. Определение степени характеристического уравнения.

Степень характеристического уравнения цепи необходимо уметь оценивать, взглянув на схему, в которой исследуется переходный процесс. Быстрая ориентация в этом вопросе дает возможность определить трудоемкость предстоящих выкладок и способствует выявлению ошибки, если она возникает при составлении характеристического уравнения.

Степень характеристического уравнения равна числу основных независимых начальных значений в послекоммутационной схеме после максимального ее упрощения и не зависит от вида ЭДС источников ЭДС в схеме.

Упомянутое упрощение состоит в том, что последовательно соединенные индуктивные элементы должны быть заменены одним эквивалентным; конденсаторы, включенные последовательно и параллельно, тоже должны быть заменены эквивалентными.

Применительно к схеме рис. 8.6, *а* последовательно включенные $L'_1$ и $L''_2$ следует заменить на $L_1 = L'_1 + L''_1 \pm 2M$, если между ними есть магнитная связь (если нет магнитной связи, то $M=0$), а конденсаторы емкостью $C'_3$, $C''_3$, $C_4$ — на конденсатор емкостью $C_5 = C_4 + \frac{C'_3C''_3}{C'_3+C''_3}$. Начальное значение напряжения на $C_5$ равно начальному значению напряжения на $C_4$.

В результате упрощений схемы рис. 8.6, *б* получаем схему на рис. 8.7, в которой два индуктивных элемента и один конденсатор. Все три независимые начальные значения — основные. Следовательно, характеристическое уравнение будет третьей степени.

Обратим внимание на то, что степень характеристического уравнения не зависит от того, имеется ли магнитная связь между индуктивными элементами схемы или она отсутствует.

Условимся под ***емкостным контуром*** понимать контур, в каждой из ветвей которого имеются либо только конденсаторы (рис. 8.7, *а*), либо в одни ветви входят только конденсаторы, а в другие — только источники ЭДС (рис. 8.7, *б*). Положим, что после максимального упрощения схемы в емкостный контур входит $n$ конденсаторов. Если учесть, что по второму закону Кирхгофа алгебраическая сумма напряжений на ветвях контура равна нулю, то только на $n-1$ кон-

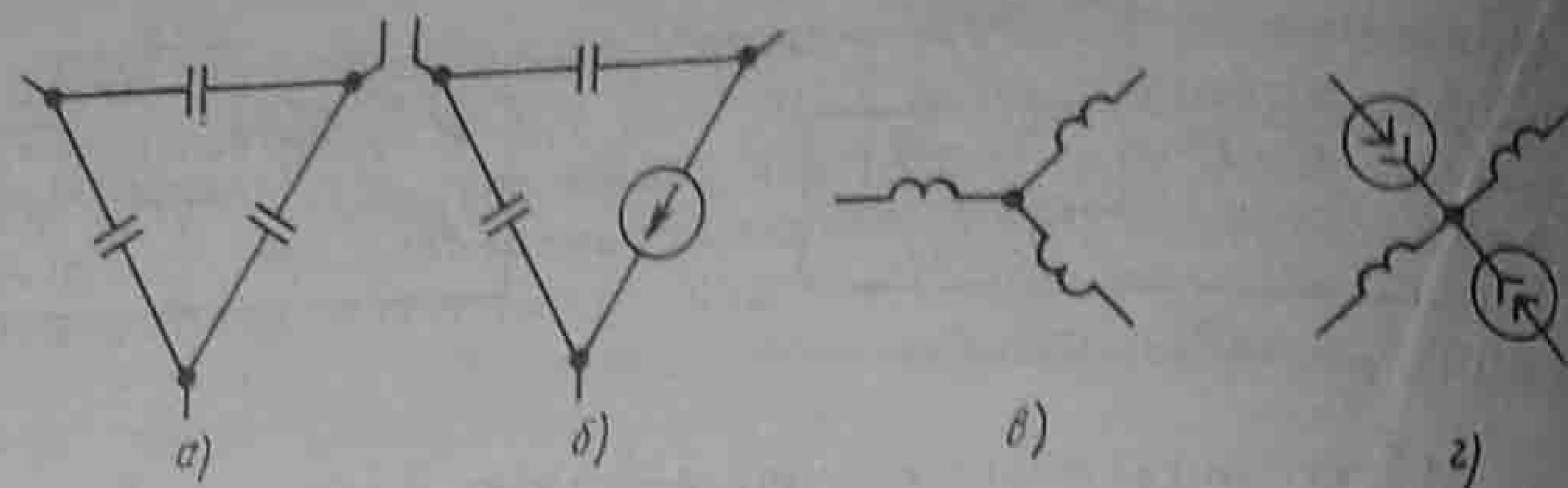



Рис. 8.7

денсаторах контура напряжения могут быть заданы произвольно. Условимся под *индуктивным узлом* понимать узел, в котором сходятся ветви, в каждой из которой имеются индуктивности (рис. 8.7, *в*), либо часть ветвей с индуктивностями, а другая с источниками тока (рис. 8.7, *г*). Положим, что в индуктивный узел сходится $m$-ветвей, содержащих индуктивности. Если учесть, что по первому закону Кирхгофа сумма токов в узле равна нулю, то только в $m-1$ индуктивностях токи могут быть заданы произвольно.

Обобщенно можно сказать, что после максимального упрощения схемы степень характеристического уравнения может быть определена путем подсчета величины $n_L+n_C-y_L-k_C$, где $n_L$ — число индуктивных элементов в схеме; $n_C$ — число конденсаторов; $y_L$ — число индуктивных элементов, токи в которых не могут быть заданы произвольно; $k_C$ — число конденсаторов, напряжения на которых не могут быть заданы произвольно.

Замечания: 1. Если схема с источником тока имеет несколько последовательных участков, содержащих параллельно соединенные ветви с $R$, $L$, $C$, то для каждой группы параллельных ветвей будет свое характеристическое уравнение со своими корнями (свободные токи не могут замыкаться через источник тока, поскольку его сопротивление равно бесконечности).

2. Если в схеме будут иметься так называемые дополняющие двухполюсники (см. § 8.63), содержащие элементы $R$, $L$, $C$, между которыми выполняются определенные соотношения, то при упрощении схемы они должны быть заменены на эквивалентные им резисторы. Это значительно упрощает выкладки (на эту тему рекомендуется решить пример 30 из вопросов для самопроверки).

**§ 8.16. Свойства корней характеристического уравнения.** Число корней характеристического уравнения равно степени этого уравнения. Если характеристическое уравнение представляет собой уравнение первой степени, то оно имеет один корень, если второй степени — два корня и т. д. Уравнение первой степени имеет всегда отрицательный действительный (не мнимый и не комплексный) корень.

Уравнение второй степени может иметь: а) два действительных неравных отрицательных корня; б) два действительных равных отрицательных корня; в) два комплексно-сопряженных корня с отрицательной действительной частью.



Уравнение третьей степени может иметь: а) три действительных неравных отрицательных корня; б) три действительных отрицательных корня, из которых два равны друг другу; в) три действительных равных отрицательных корня; г) один действительный отрицательный корень и два комплексно-сопряженных с отрицательной действительной частью.

**§ 8.17. Отрицательные знаки действительных частей корней характеристических уравнений.** Свободный процесс происходит в цепи, освобожденной от источника ЭДС. Он описывается слагаемыми вида $Ae^{pt}$. В цепи, освобожденной от источников ЭДС, свободные токи не могут протекать сколь угодно длительно, так как в ней отсутствуют источники энергии, которые были бы способны в течение сколь угодно длительного времени покрывать тепловые потери от свободных токов, т. е. свободные токи должны затухать во времени.

Если свободные токи (выраженные слагаемыми $e^{pt}$) должны затухать (спадать) во времени, то действительная часть $p$ должна быть отрицательной.

Значения функции $e^{-at}=f(at)$, где $at=x$, приведены в табл. 8.1.

Таблица 8.1

| $x$ | $e^x$ | $e^{-x}$ | sh$x$ | ch$x$ | $x$ | $e^x$ | $e^{-x}$ | sh$x$ | ch$x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1,0 | 1,0 | 0,0 | 1,0 | 2,1 | 8,17 | 0,122 | 4,02 | 4,14 |
| 0,1 | 1,10 | 0,905 | 0,10 | 1,005 | 2,2 | 9,02 | 0,111 | 4,46 | 4,56 |
| 0,2 | 1,22 | 0,819 | 0,20 | 1,02 | 2,3 | 9,97 | 0,100 | 4,94 | 5,04 |
| 0,3 | 1,35 | 0,741 | 0,30 | 1,04 | 2,4 | 11,02 | 0,09 | 5,47 | 5,56 |
| 0,4 | 1,49 | 0,67 | 0,41 | 1,08 | 2,5 | 12,18 | 0,082 | 6,05 | 6,13 |
| 0,5 | 1,65 | 0,606 | 0,52 | 1,13 | 2,6 | 13,46 | 0,074 | 6,70 | 6,77 |
| 0,6 | 1,82 | 0,549 | 0,64 | 1,18 | 2,7 | 14,88 | 0,067 | 7,41 | 7,47 |
| 0,7 | 2,01 | 0,497 | 0,76 | 1,25 | 2,8 | 16,44 | 0,061 | 8,19 | 8,25 |
| 0,8 | 2,22 | 0,449 | 0,89 | 1,34 | 2,9 | 18,17 | 0,055 | 9,06 | 9,11 |
| 0,9 | 2,46 | 0,407 | 1,03 | 1,43 | 3,0 | 20,08 | 0,05 | 10,02 | 10,07 |
| 1,0 | 2,72 | 0,368 | 1,17 | 1,54 | 3,2 | 24,53 | 0,041 | 12,25 | 12,29 |
| 1,1 | 3,00 | 0,333 | 1,34 | 1,67 | 3,4 | 29,96 | 0,033 | 14,96 | 15,0 |
| 1,2 | 3,32 | 0,301 | 1,51 | 1,81 | 3,6 | 36,6 | 0,027 | 18,28 | 18,31 |
| 1,3 | 3,67 | 0,272 | 1,70 | 1,94 | 3,8 | 44,7 | 0,022 | 22,34 | 22,36 |
| 1,4 | 4,05 | 0,247 | 1,90 | 2,15 | 4,0 | 54,6 | 0,018 | 27,29 | 27,3 |
| 1,5 | 4,48 | 0,223 | 2,13 | 2,25 | 4,2 | 66,69 | 0,015 | 33,33 | 33,35 |
| 1,6 | 4,95 | 0,202 | 2,38 | 2,58 | 4,4 | 81,45 | 0,012 | 40,72 | 40,73 |
| 1,7 | 5,47 | 0,183 | 2,65 | 2,83 | 4,6 | 99,48 | 0,01 | 49,74 | 49,75 |
| 1,8 | 6,05 | 0,165 | 2,94 | 3,11 | 4,8 | 121,5 | 0,0082 | 60,75 | 60,76 |
| 1,9 | 6,68 | 0,15 | 3,27 | 3,42 | 5,0 | 184,4 | 0,0067 | 74,2 | 74,21 |
| 2,0 | 7,39 | 0,135 | 3,63 | 3,76 | 6,0 | 400 | 0,0025 | 200 | 200 |

Рассмотрим характер изменения свободных составляющих для простейших переходных процессов в цепях с характеристическим уравнением первой и второй степеней.

Если число корней характеристического уравнения больше двух, то свободный процесс может быть представлен как процесс, составленный из нескольких простейших процессов.

**§ 8.18. Характер свободного процесса при одном корне.** Когда характеристическое уравнение имеет один корень, свободный ток

$$i_{св} = Ae^{pt} = Ae^{-at}, \qquad (8.12)$$

где $p = -a$ зависит только от параметров цепи, $A$ — от параметров цепи, ЭДС и момента включения. Характер изменения $i_{св}$ при $A > 0$ показан на рис. 8.8.

За интервал времени $t = \tau = 1/a$ функция $Ae^{-at}$ уменьшится в $e = 2{,}72$ раза. Действительно, при $t = \tau = 1/a$ $at = a\tau = a/a = 1$; $e^{-at} = e^{-a\tau} = e^{-1} = 1/e = 1/2{,}72$.

Величину $\tau = 1/a = 1/|p|$ называют *постоянной времени* цепи; $\tau$ зависит от вида и параметров схемы. Для цепи рис. 8.2 $\tau = L/R$, для цепи рис. 8.3, *а* $\tau = RC$, для цепи рис. 8.17 $\tau = (R_1R_3C)/(R_1 + R_3)$ и т. д.

Название «постоянная времени» отражает постоянство подкасательной к экспоненте: подкасательная к экспоненте $e^{-t/\tau}$ численно равна $\tau$ (см. рис. 8.8).

**§ 8.19. Характер свободного процесса при двух действительных неравных корнях.** Пусть $p_1 = -a$, $p_2 = -b$ (для определенности положим $b > a$). Тогда

$$i_{св} = A_1e^{p_1t} + A_2e^{p_2t} = A_1e^{-at} + A_2e^{-bt}. \qquad (8.12a)$$

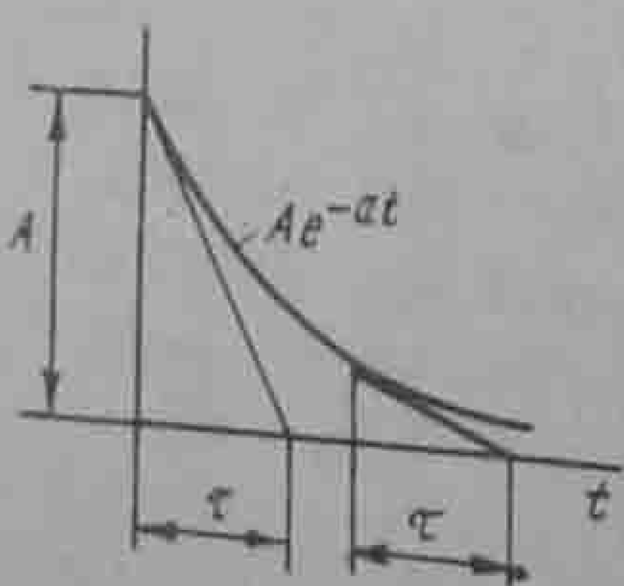


Рис. 8.8

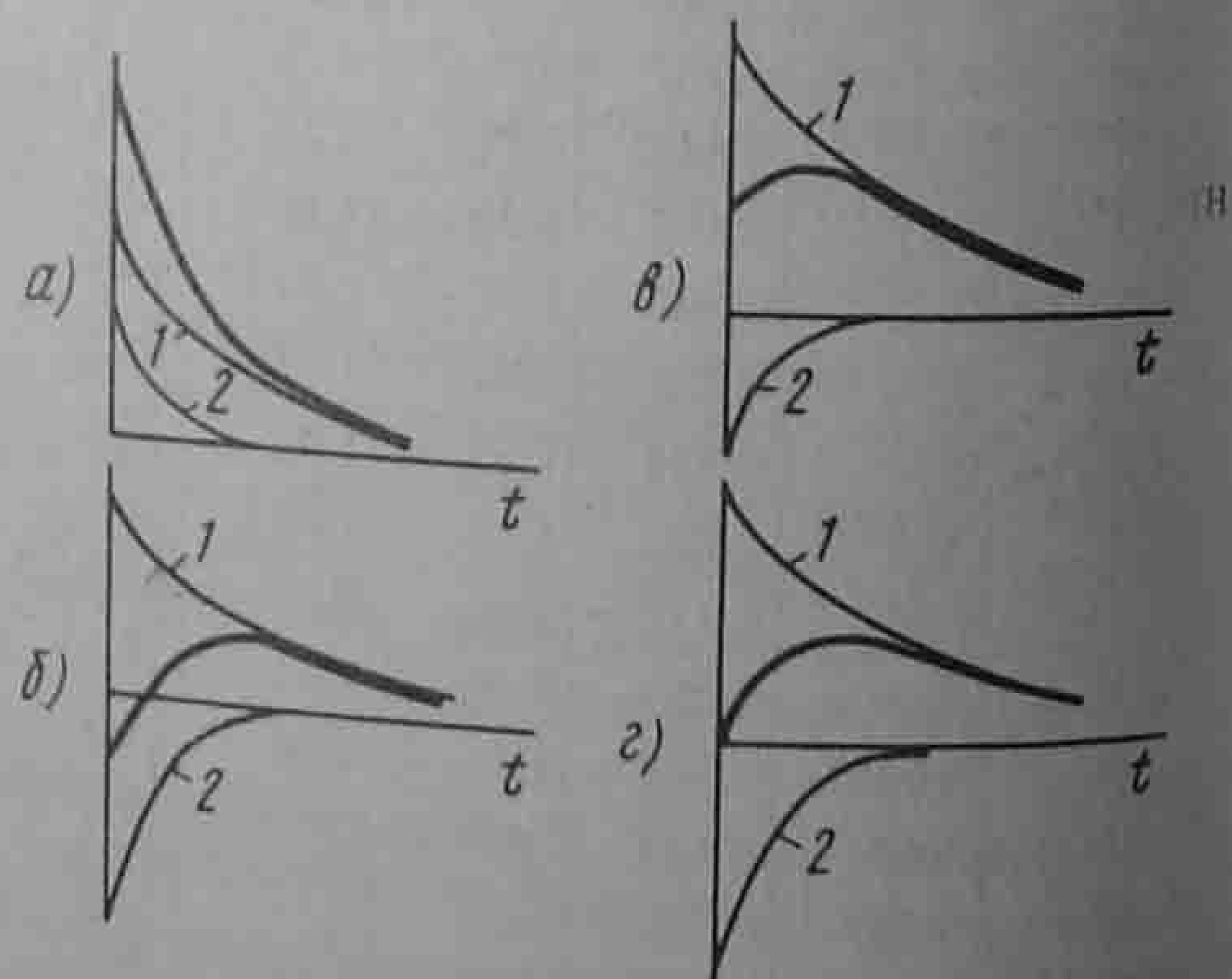


Рис. 8.9



Характер изменения свободного тока при различных по значению и знаку постоянных интегрирования $A_1$ и $A_2$ качественно иллюстрируется кривыми рис. 8.9, *а—г*; кривая *1* представляет собой функцию $A_1e^{-at}$; кривая *2* — функцию $A_2e^{-bt}$; результирующая («жирная») кривая получена путем суммирования ординат кривых *1* и *2*.

Для рис. 8.9, *а* $A_1 > 0$, $A_2 > 0$; для рис. 8.9, *б* $A_1 > 0$, $A_2 < 0$, $|A_2| > A_1$; для рис. 8.9, *в* $A_1 > 0$, $A_2 < 0$, $|A_2| < A_1$; для рис. 8.9, *г* $A_1 > 0$, $A_2 < 0$, $|A_2| = A_1$.

**§ 8.20. Характер свободного процесса при двух равных корнях.** Известно, что если среди корней характеристического уравнения есть два равных корня $p_1 = p_2 = -a$, то соответствующие слагаемые решения должны быть взяты в виде

$$A_1e^{pt} + A_2te^{pt} = (A_1 + A_2t)e^{-at}. \qquad (8.13)$$

На рис. 8.10 построены пять кривых. Они показывают возможный характер изменения функции $(A_1 + A_2t)e^{-at}$ при различных значениях постоянных интегрирования $A_1$ и $A_2$, а также при равенстве нулю одной из постоянных.

Кривая *1* построена при $A_1 > 0$ и $A_2 > 0$; кривая *2* — при $A_1 < 0$ и $A_2 > 0$; кривая *3* — при $A_1 > 0$ и $A_2 < 0$; кривая *4* — при $A_1 = 0$ и $A_2 > 0$; кривая *5* — при $A_1 > 0$ и $A_2 = 0$.

**§ 8.21. Характер свободного процесса при двух комплексно-сопряженных корнях.** Комплексные корни всегда встречаются попарно сопряженными. Так, если $p_1 = -\delta + j\omega_0$, то $p_2 = -\delta - j\omega_0$. Соответствующее им слагаемое решения должно быть взято в виде

$$i_{св} = Ae^{-\delta t}\sin(\omega_0 t + \nu). \qquad (8.14)$$

Формула (8.14) описывает затухающее синусоидальное колебание (рис. 8.11) при угловой частоте $\omega_0$ и начальной фазе $\nu$. Огибаю-

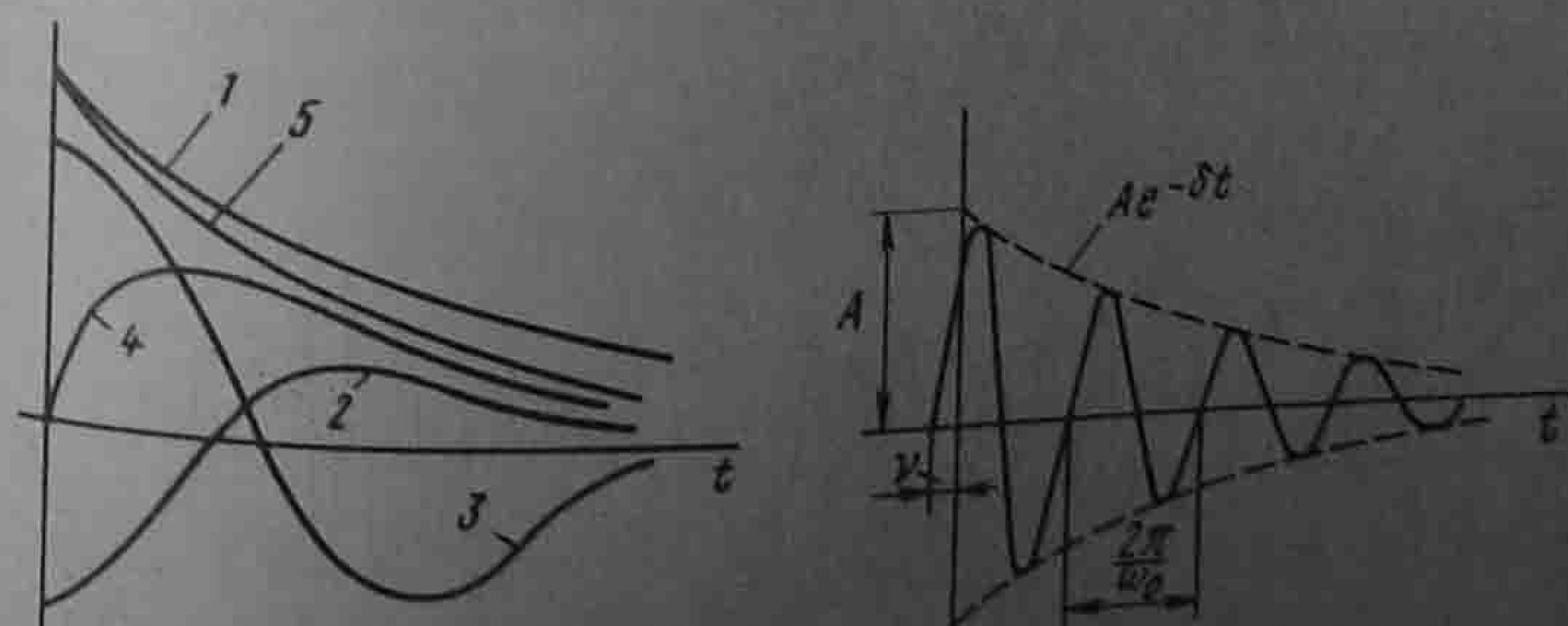


Рис. 8.10

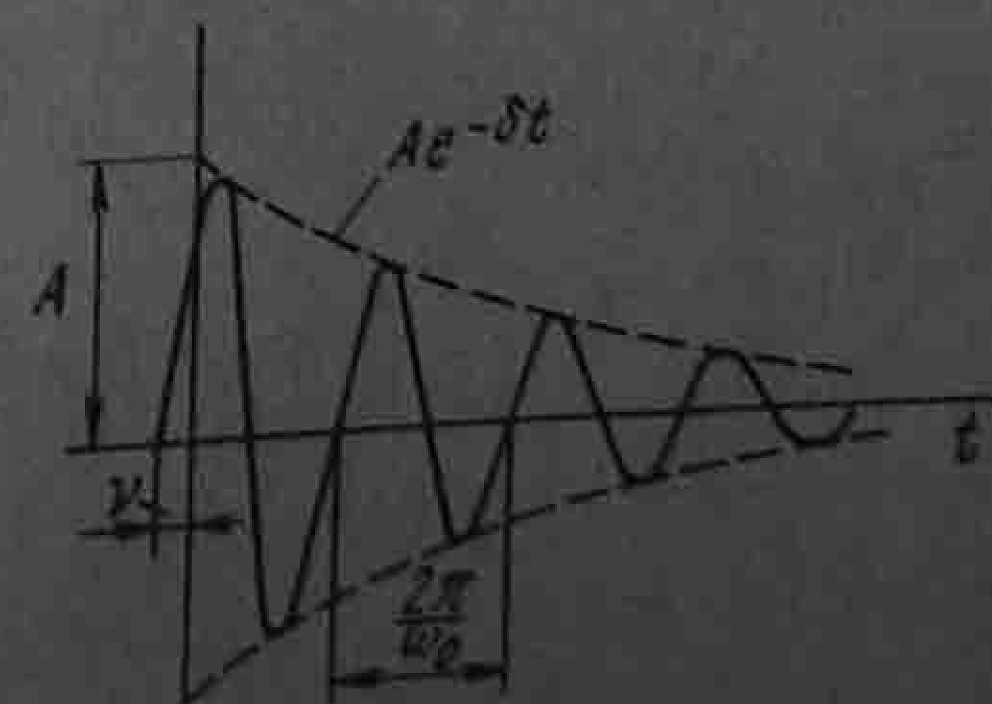


Рис. 8.11

щая колебания описывается кривой $Ae^{-\delta t}$. Чем больше $\delta$, тем быстрее затухает колебательный процесс; $A$ и $\nu$ определяются значениями параметров схемы, начальными условиями и ЭДС источника; $\omega_0$ и $\delta$ зависят только от параметров цепи после коммутации; $\omega_0$ называют угловой частотой свободных колебаний; $\delta$ — коэффициентом затухания.

**§ 8.22. Некоторые особенности переходных процессов.** Как известно из предыдущего, полное значение любой величины (тока, напряжения, заряда) равно сумме принужденной и свободной составляющих. Если среди корней характеристического уравнения есть комплексно-сопряженные корни $p_{1,2} = -\delta \pm j\omega_0$ и значение угловой частоты свободных колебаний $\omega_0$ почти равно угловой частоте $\omega$ источника синусоидальной ЭДС (источника питания), а коэффициент затухания $\delta$ мал (цепь с малыми потерями), то сложение принужденной и свободной составляющих дает колебание, для которого характерно биение амплитуды (рис. 8.12, *а*).

Колебание (рис. 8.12, *а*) отличается от колебаний, рассмотренных в § 7.14, тем, что здесь у одной из составляющих колебания амплитуда медленно уменьшается.

Если угловая частота свободных колебаний $\omega_0$ точно равна угловой частоте источника синусоидальной ЭДС, то результирующее колебание имеет форму, изображенную на рис. 8.12, *б*.

Простейшим примером колебаний такого типа является колебание, возникающее на конденсаторе схемы рис. 8.13 в результате сложения принужденного $U_{Cm}\cos\omega t$ и свободного $-U_{Cm}e^{-\delta t}\cos\omega t$ колебаний: $U_C = U_{Cm}(1 - e^{-\delta t})\cos\omega t$.

Амплитуда результирующего колебания нарастает по экспоненциальному закону.

При наличии конденсатора (конденсаторов) в схеме могут возникать большие начальные броски токов, в несколько раз превышающие амплитуды тока установившегося режима. Так, в схеме рис. 8.14 при нулевых начальных условиях в первый момент после замыкания ключа напряжение на конденсаторах равно нулю и ток в неразветвленной части цепи равен $U_m \sin\psi / R_1$. Если $\psi = 90°$, то в

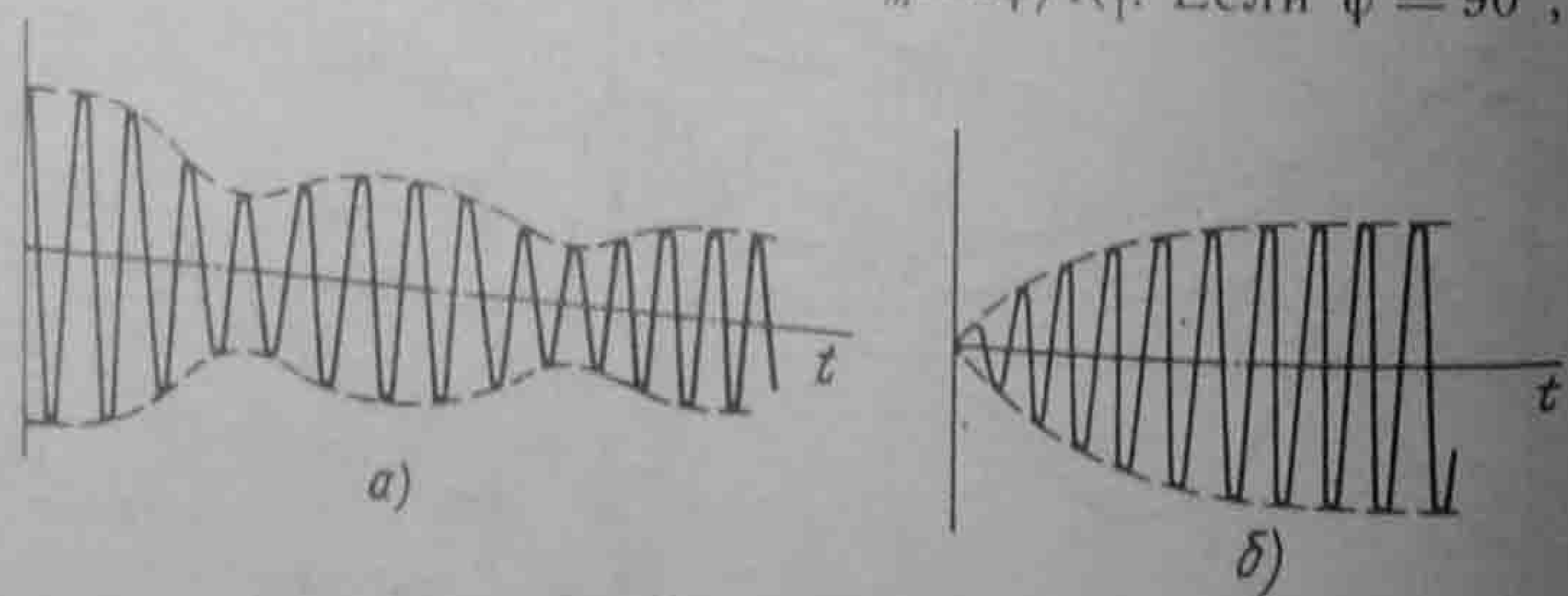



Рис. 8.12



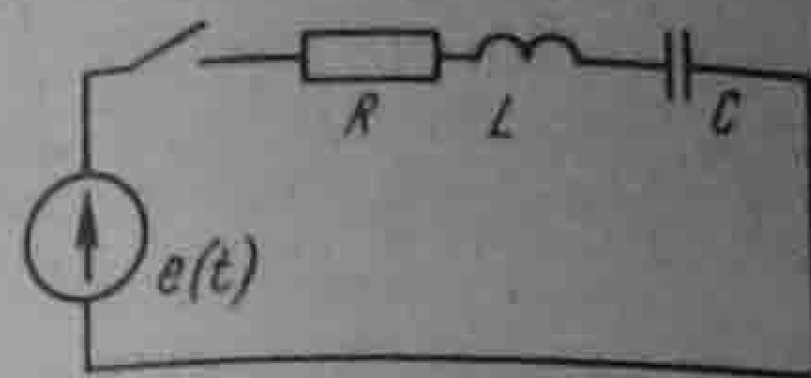



Рис. 8.13

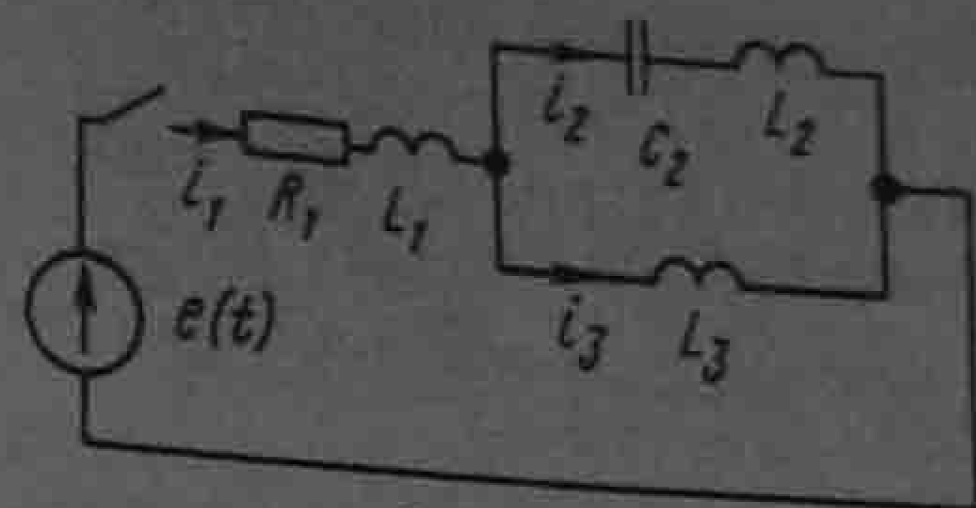



Рис. 8.14

первый момент после замыкания ключа ток равен $U_m/R_1$. При размыкании ключа в индуктивных цепях возникают опасные увеличения напряжения на отдельных участках (см. § 8.24).

**§ 8.23. Переходные процессы, сопровождающиеся электрической искрой (дугой).** Если переходный процесс вызывается размыканием ключа в электрической цепи, содержащей индуктивные катушки, то между его расходящимися контактами при определенных условиях может возникнуть электрическая искра (дуга). При этом расчет переходного процесса усложняется и, строго говоря, не может проводиться методами, изучаемыми в данной главе. Объясняется это тем, что сопротивление электрической искры является нелинейной функцией протекающего через нее тока. В этом случае, если известна ВАХ дуги, для расчета переходных процессов могут применяться методы, излагаемые в гл. 16.

Попытаемся выяснить, можно ли ожидать возникновения электрической искры при размыкании ключа в схеме рис. 8.15.

До размыкания ключа в цепи был установившийся режим:

$$i(0_) = \frac{E}{R + 0{,}5R} = \frac{2E}{3R}; \quad i_2(0_) = \frac{i(0_)}{2} = \frac{E}{3R}.$$

Допустим, что при размыкании ключа искра не возникает. При этом ток $i_1$ почти мгновенно уменьшается до нуля, а $i(0_+)$ должен равняться $i_2(0_+)$. Но каждый из токов ($i_1$ и $i_2$) по первому закону коммутации не может измениться скачком. Следовательно, между достаточно медленно расходящимися контактами ключа при определенных условиях можно ожидать возникновения электрической искры. Расчет переходного процесса в схеме на рис. 8.15 дан в § 8.28.

**§ 8.24. Опасные перенапряжения, вызываемые размыканием ветвей в цепях, содержащих индуктивные катушки.** При размыкании ключей в электрических цепях, содержащих катушки с большой

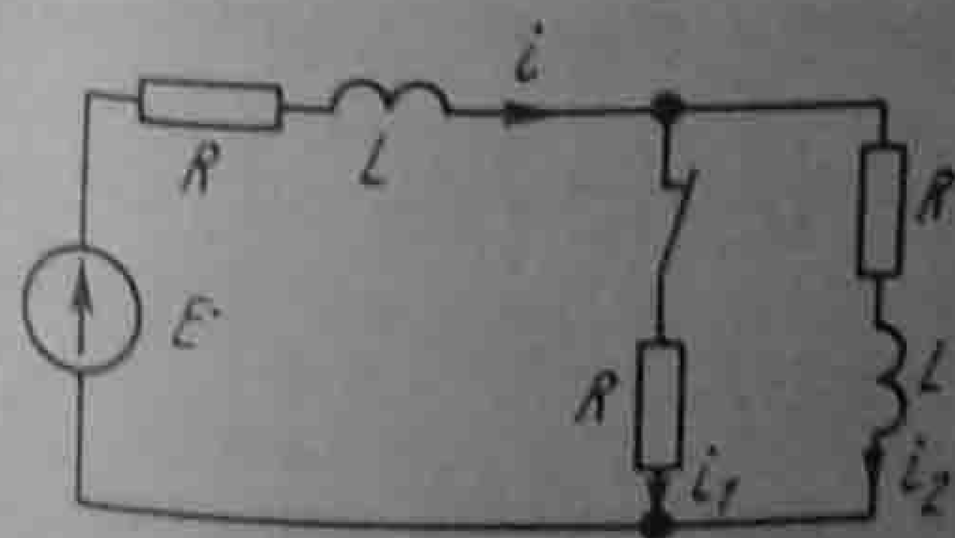



Рис. 8.15

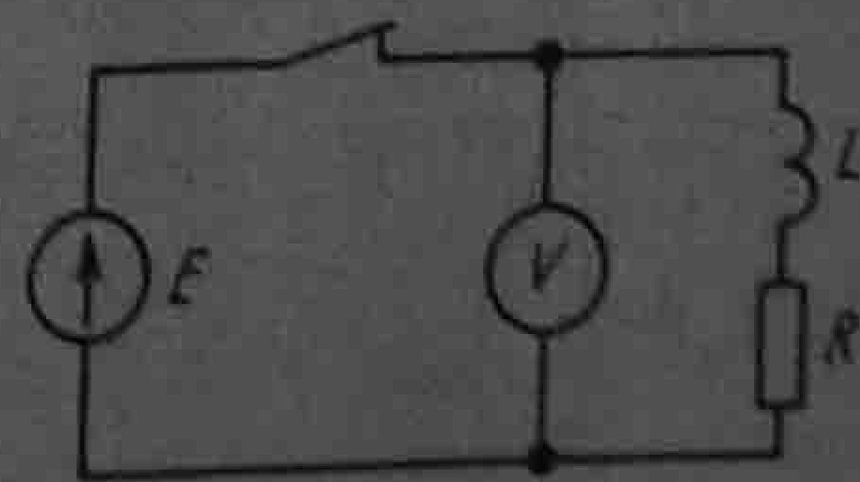



Рис. 8.16

индуктивностью, на отдельных участках могут возникать напряжения, во много раз превышающие установившиеся. Напряжения, превышающие установившиеся, называют *перенапряжениями*. Они могут оказаться настолько значительными, что при определенных условиях вызовут пробой изоляции и выход из строя измерительной аппаратуры.

**Пример 79.** К зажимам индуктивной катушки с $R = 100$ Ом; $L = 10$ Гн подключен вольтметр (рис. 8.16). Сопротивление вольтметра $R_V = 3000$ Ом; $E = 100$ В. Найти приближенное значение напряжения на зажимах вольтметра при $t = 0_+$, если допустить, что размыкание ключа произойдет мгновенно и искры не возникнет.

Р е ш е н и е. До размыкания ключа через $L$ протекает ток $i = E/R = 1$ А. В индуктивной катушке была запасена магнитная энергия $Li^2/2$. Если допустить, что размыкание ключа произошло мгновенно и искры не появилось, и учесть, что ток через $L$ должен оставаться равным 1 А, то по замкнутому контуру, составленному вольтметром и катушкой, за счет запаса энергии магнитного поля индуктивной катушки в первое мгновение будет протекать ток в 1 А. При этом на вольтметре возникнет пик напряжения 3 кВ. Прохождение большого импульса тока через вольтметр может вызвать перегорание катушки прибора и выход его из строя.

При размыкании ключа с конечной скоростью между его расходящимися контактами возникнет электрическая искра. Это приведет к тому, что увеличение напряжения на вольтметре будет меньше, чем в только что рассмотренном идеализированном случае, когда ключ размыкался мгновенно без искры.

При более детальном рассмотрении процесса необходимо еще учесть влияние межвитковых емкостей и емкостей на землю (см. § 11.1). Если не учитывать возникновение искры, распределенные емкости и индуктивности, то приведенный расчет является грубым и носит иллюстрированный характер.

Чтобы не «сжечь» вольтметр в цепи рис. 8.16, сначала следует отключить вольтметр, а затем разомкнуть ключ. Перенапряжения проявляются тем сильнее, чем больше индуктивность в цепях. Особенно опасны они в цепях постоянного тока, содержащих индуктивности порядка единиц и десятков генри. В таких цепях при отключениях соблюдают специальные меры предосторожности (ключ размыкают после введения дополнительных резисторов в цепь).

**§ 8.25. Общая характеристика методов анализа переходных процессов в линейных электрических цепях.** Расчет переходных процессов в любой линейной электрической цепи состоит из следующих основных операций:

1) выбора положительных направлений токов в ветвях цепи;

2) определения значений токов и напряжений непосредственно до коммутации;

3) составления характеристического уравнения и нахождения его корней;

4) получения выражения для искомых токов и напряжений как функции времени.

Широко распространенными методами расчета переходных процессов являются:

1) метод, называемый в литературе классическим;

2) операторный метод;

3) метод расчета с помощью интеграла Дюамеля.

Для всех этих методов перечисленные операции (этапы расчета) являются обязательными. Для всех методов первые три операции



совершают одинаково и их нужно рассматривать как общую для всех методов часть расчета. Различие между методами имеет место на четвертом, наиболее трудоемком этапе расчета.

Чаще используют классический и операторный методы, реже — метод расчета с применением интеграла Дюамеля. В дальнейшем будут даны сравнительная оценка и рекомендуемая область применения каждого из них (см. § 8.56).

В радиотехнике, вычислительной и импульсной технике, электронике, автоматике и в технике, связанной с теорией информации, кроме этих трех методов применяют метод анализа переходных процессов, основывающийся на интеграле Фурье. (Об интеграле Фурье и спектральном методе, см. гл. 9.) Для исследования характера переходного процесса, описываемого уравнениями высоких порядков, используют моделирующие установки, а также метод пространства состояний (см. § 8.66).

**§ 8.26. Определение классического метода расчета переходных процессов.** *Классическим методом* расчета переходных процессов называют метод, в котором решение дифференциального уравнения представляет собой сумму принужденной и свободной составляющих. Определение постоянных интегрирования, входящих в выражение для свободного тока (напряжения), производят путем совместного решения системы линейных алгебраических уравнений по известным значениям корней характеристического уравнения, а также по известным значениям свободной составляющей тока (напряжения) и ее производных, взятых при $t = 0_+$.

**§ 8.27. Определение постоянных интегрирования в классическом методе.** Как известно из предыдущего, любой свободный ток (напряжение) можно представить в виде суммы экспоненциальных слагаемых. Число членов суммы равно числу корней характеристического уравнения.

При двух действительных неравных корнях

$$i_{св} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t};$$

при трех действительных неравных корнях

$$i_{св} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + A_3 e^{p_3 t}.$$

Для любой схемы с помощью уравнений Кирхгофа и законов коммутации можно найти: 1) числовое значение искомого свободного тока при $t = 0_+$, обозначим его $i_{св}(0_+)$; 2) числовое значение первой, а если понадобится, то и высших производных от свободного тока, взятых при $t = 0_+$. Числовое значение первой производной от свободного тока при $t = 0_+$ обозначим $i_{св}'(0_+)$; второй — $i_{св}''(0_+)$ и т. д.

Рассмотрим методику определения постоянных интегрирова-

ния $A_1, A_2, \ldots$, полагая известными $i_{св}(0_+)$, $i_{св}'(0_+)$, $i_{св}''(0_+)$ и значения корней $p_1, p_2, \ldots$.

Если характеристическое уравнение цепи представляет собой уравнение первой степени, то $i_{св} = Ae^{pt}$. Постоянную интегрирования $A$ определяют по значению свободного тока $i_{св}(0_+)$:

$$A = i_{св}(0_+). \qquad (8.15)$$

Если дано характеристическое уравнение второй степени и его корни действительны и не равны, то

$$i_{св} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}. \qquad (8.16)$$

Продифференцируем это уравнение по времени:

$$i_{св}' = p_1 A_1 e^{p_1 t} + p_2 A_2 e^{p_2 t}. \qquad (8.16а)$$

Запишем уравнения (8.16) и (8.16а) при $t = 0$ (учтем, что при $t = 0$ $e^{p_1 t} = e^{p_2 t} = 1$). В результате получим

$$i_{св}(0_+) = A_1 + A_2; \qquad (8.17)$$

$$i_{св}'(0_+) = p_1 A_1 + p_2 A_2. \qquad (8.17а)$$

В этой системе уравнений известными являются $i_{св}(0_+)$, $i_{св}'(0_+)$, $p_1$ и $p_2$; неизвестными — $A_1$ и $A_2$.

Совместное решение (8.17) и (8.17а) дает

$$A_1 = \frac{i_{св}'(0_+) - p_2 i_{св}(0_+)}{p_1 - p_2}; \quad A_2 = i_{св}(0_+) - A_1. \qquad (8.17б)$$

Если корни характеристического уравнения являются комплексно-сопряженными, то в (8.16) сопряжены не только $p_1$ и $p_2$ ($p_{1,2} = -\delta \pm j\omega_0$), но и $A_1$ и $A_2$. Поэтому свободный ток

$$i_{св} = Ae^{-\delta t}\sin(\omega_0 t + \nu). \qquad (8.18)$$

Угловая частота $\omega_0$ и коэффициент затухания $\delta$ известны из решения характеристического уравнения.

Определение двух неизвестных $A$ и $\nu$ производят и в этом случае по значениям $i_{св}(0_+)$ и $i_{св}'(0_+)$.

Продифференцировав по времени уравнение (8.18), получим

$$i_{св}' = -A\delta e^{-\delta t}\sin(\omega_0 t + \nu) + A\omega_0 e^{-\delta t}\cos(\omega_0 t + \nu). \qquad (8.18а)$$

Запишем уравнение (8.18а) при $t = 0_+$:

$$i_{св}'(0_+) = -A\delta\sin\nu + A\omega_0\cos\nu.$$



Таким образом, для нахождения неизвестных $A$ и $\nu$ имеем два уравнения:

$$\left.\begin{aligned} i_{св}(0_+) &= A\sin\nu; \\ i_{св}'(0_+) &= -A\delta\sin\nu + A\omega_0\cos\nu. \end{aligned}\right\} \qquad (8.19)$$

Для цепи, имеющей характеристическое уравнение третьей степени, свободный ток

$$i_{св} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + A_3 e^{p_3 t}. \qquad (8.20)$$

Найдем первую, а затем вторую производную от левой и правой частей уравнения (8.20):

$$i_{св}' = p_1 A_1 e^{p_1 t} + p_2 A_2 e^{p_2 t} + p_3 A_3 e^{p_3 t}; \qquad (8.21)$$

$$i_{св}'' = p_1^2 A_1 e^{p_1 t} + p_2^2 A_2 e^{p_2 t} + p_3^2 A_3 e^{p_3 t}. \qquad (8.22)$$

Запишем (8.20)—(8.22) при $t = 0_+$:

$$\left.\begin{aligned} i_{св}(0_+) &= A_1 + A_2 + A_3; \\ i_{св}'(0_+) &= p_1 A_1 + p_2 A_2 + p_3 A_3; \\ i_{св}''(0_+) &= p_1^2 A_1 + p_2^2 A_2 + p_3^2 A_3. \end{aligned}\right\} \qquad (8.23)$$

Система уравнений (8.23) представляет собой систему трех линейных алгебраических уравнений с тремя неизвестными: $A_1$, $A_2$ и $A_3$. Все остальные входящие в нее величины $[p_1, p_2, p_3, i_{св}(0_+), i_{св}'(0_+), i_{св}''(0_+)]$ известны.

Сначала, пока еще не накоплено опыта в решении задач, для облегчения расчета величины и ее производной (производных) при $t = 0_+$ рекомендуется решать задачу относительно тока через $L$ или напряжения на $C$ и только затем, используя законы Кирхгофа, определять любую другую величину через найденную.

Рассмотрим несколько примеров расчета переходных процессов классическим методом в цепях первого и второго порядков с источниками постоянной и синусоидальной ЭДС при ненулевых начальных условиях.

**Пример 80.** В схеме рис. 8.17 до замыкания ключа был установившийся режим: $R_1 = R_1' = R_3 = 50$ Ом; $C = 100$ мкФ; $E = 150$ В. Требуется найти: 1) полные, принужденные и свободные составляющие токов $i_1$, $i_2$, $i_3$ и $u_C$ при $t = 0_+$, а также

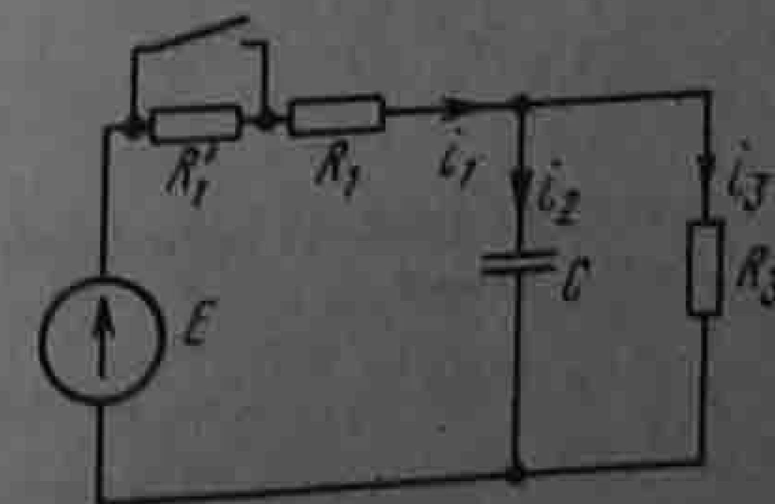



Рис. 8.17

начальное значение производной от свободного напряжения на конденсаторе; 2) токи $i_1$, $i_2$, $i_3$ и напряжение $u_C$ в функции времени.

Решение первой части задачи. До коммутации $i_2(0_-) = 0$ и $i_1(0_-) = i_3(0_-) = E/(R_1 + R_1' + R_3) = 150/150 = 1$ А.

Напряжение на конденсаторе равно напряжению на резисторе $R_3$: $u_C(0_-) = i_3(0_-)R_3 = 1\cdot 50 = 50$ В.

Найдем принужденные значения токов и напряжений после коммутации:

$$i_{1пр} = i_{3пр} = E/(R_1 + R_3) = 150/100 = 1{,}5\ А;$$

$$u_{Cпр}(0_+) = i_{3пр}(0_+)R_3 = 1{,}5\cdot 50 = 75\ В.$$

По второму закону Кирхгофа составим уравнение для контура, образованного первой и второй ветвями при $t = 0_+$:

$$i_1(0_+)R_1 + u_C(0_+) = E,\ но\ u_C(0_+) = u_C(0_-).$$

Поэтому

$$i(0_+) = \frac{E - u_C(0_-)}{R_1} = \frac{150 - 50}{50} = 2\ А.$$

Из уравнения $u_C(0_+) = i_3(0_+)R_3$ получим

$$i_3(0_+) = u_C(0_+)/R_3 = 1\ А.$$

По первому закону Кирхгофа $i_1(0_+) = i_2(0_+) + i_3(0_+)$. Следовательно, $i_2(0_+) = i_1(0_+) - i_3(0_+) = 2 - 1 = 1$ А.

Свободные составляющие тока и напряжения при $t = 0_+$ определим как разности между полными и принужденными величинами:

$$u_{C св}(0_+) = u_C(0_+) - u_{C пр}(0_+) = 50 - 75 = -25\ В;$$
$$i_{1св}(0_+) = i_1(0_+) - i_{1пр}(0_+) = 2 - 1{,}5 = 0{,}5\ А;$$
$$i_{2св}(0_+) = i_2(0_+) - i_{2пр}(0_+) = 1 - 0 = 1\ А;$$
$$i_{3св}(0_+) = i_3(0_+) - i_{3пр}(0_+) = 1 - 1{,}5 = -0{,}5\ А.$$

Так как свободный ток через конденсатор

$$i_{св} = C\frac{du_{C св}}{dt},\ то\ du_{C св}/dt = i_{св}/C.$$

В рассматриваемом примере

$$(du_{C св}/dt)_{t=0_+} = i_{2св}(0_+)/C = 1/(100\cdot 10^{-6}) = 10^4\ В/с.$$

Решение второй части задачи. Характеристическое уравнение для послекоммутационной схемы $pR_1R_3C + R_1 + R_3 = 0$ имеет один корень

$$p = -\frac{R_1 + R_3}{R_1R_3C} = -400\ с^{-1}.$$

Каждый ток равен сумме принужденной и свободной составляющей $Ae^{pt}$, где $A$ равно значению свободной составляющей при $t = 0_+$ (рис. 8.18):

$$i_1 = 1{,}5 + 0{,}5e^{-400t}\ А;\quad i_2 = e^{-400t}\ А;$$
$$i_3 = 1{,}5 - 0{,}5e^{-400t}\ А;\quad u_C = 75 - 25e^{-400t}\ В.$$

**Пример 81.** В схеме рис. 8.19 до замыкания ключа был установившийся режим:



$R_1 = R_2 = 2$ Ом; $\omega L = 3$ Ом; $e(t) = 127\sin(\omega t - 50°)$ В; $\omega = 314$ рад/с. Требуется определить: 1) $i_{св}(0_+)$; 2) закон изменения тока в цепи после коммутации.

Решение первой части задачи. Комплексная амплитуда тока в цепи до коммутации

$$\dot I_m = \frac{127e^{-j50°}}{4 + 3j} = 25{,}4e^{-j86°50'}\ А.$$

Мгновенное значение тока до коммутации $i = 25{,}4\sin(\omega t - 86°50')$ А. В момент коммутации (при $\omega t = 0$)

$$i(0_-) = 25{,}4\sin(-86°50') = -25{,}35\ А.$$

Принужденный ток после коммутации

$$\dot I_m = \frac{127e^{-j50°}}{2 + 3j} = 35{,}2e^{-j106°20'}\ А.$$

Мгновенное значение принужденного тока

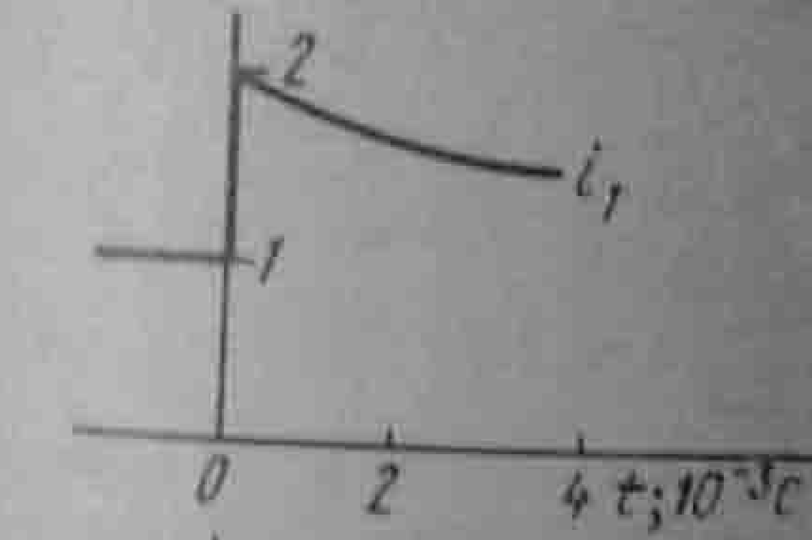
$$i_{пр} = 35{,}2\sin(\omega t - 106°20')\ А;$$

$$i_{пр}(0_+) = 35{,}2\sin(-106°20') = -33{,}8\ А.$$

По первому закону коммутации $i(0_-) = i(0_+) = -25{,}35$ А. Но $i(0+) = i_{пр}(0+) + i_{св}(0+)$. Следовательно, $i_{св}(0+) = i(0+) - i_{пр}(0+) = -25{,}35 + 33{,}8 = 8{,}45$ А.

Решение второй части задачи. Характеристическое уравнение $pL + R_2 = 0$ имеет корень

$$p = -\frac{R_2}{L} = -\frac{R_2}{\omega L/\omega} = -\frac{2\cdot 314}{3} \approx -210\ с^{-1}.$$



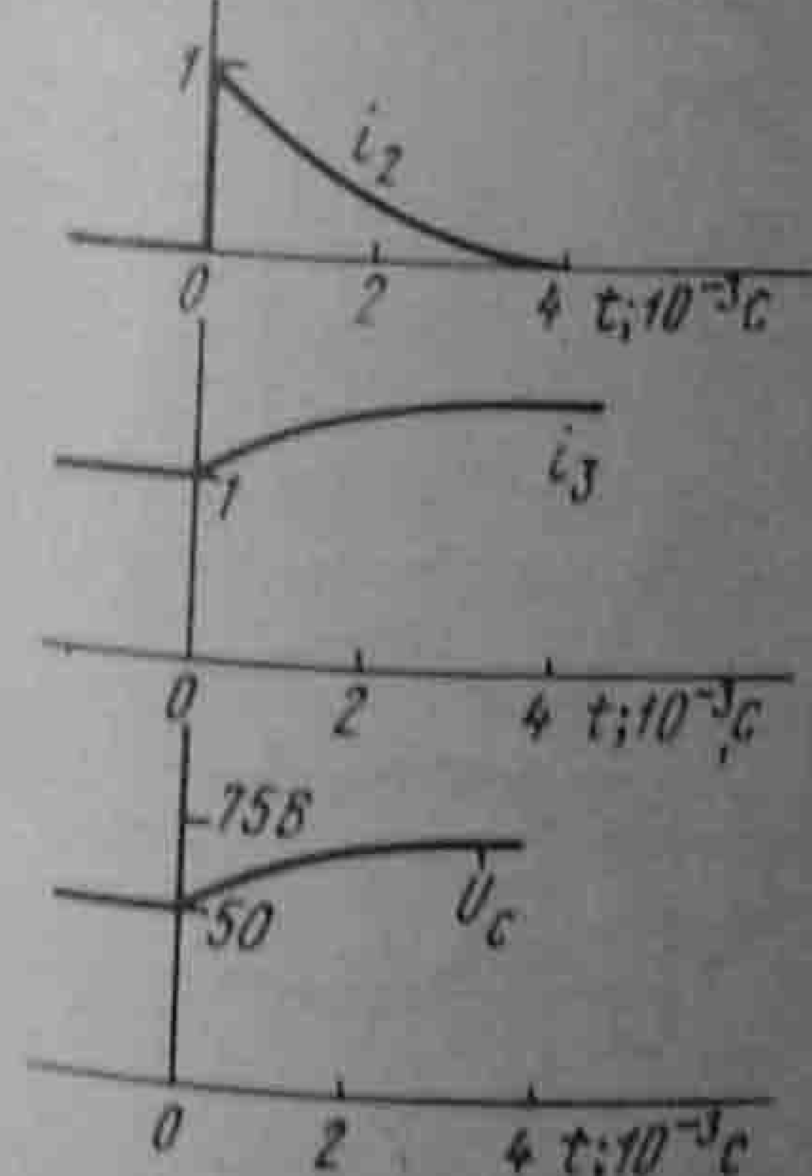




Рис. 8.18

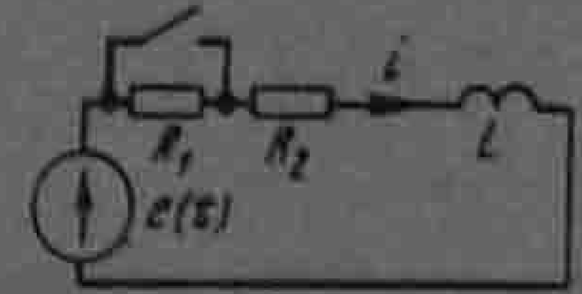



Рис. 8.19

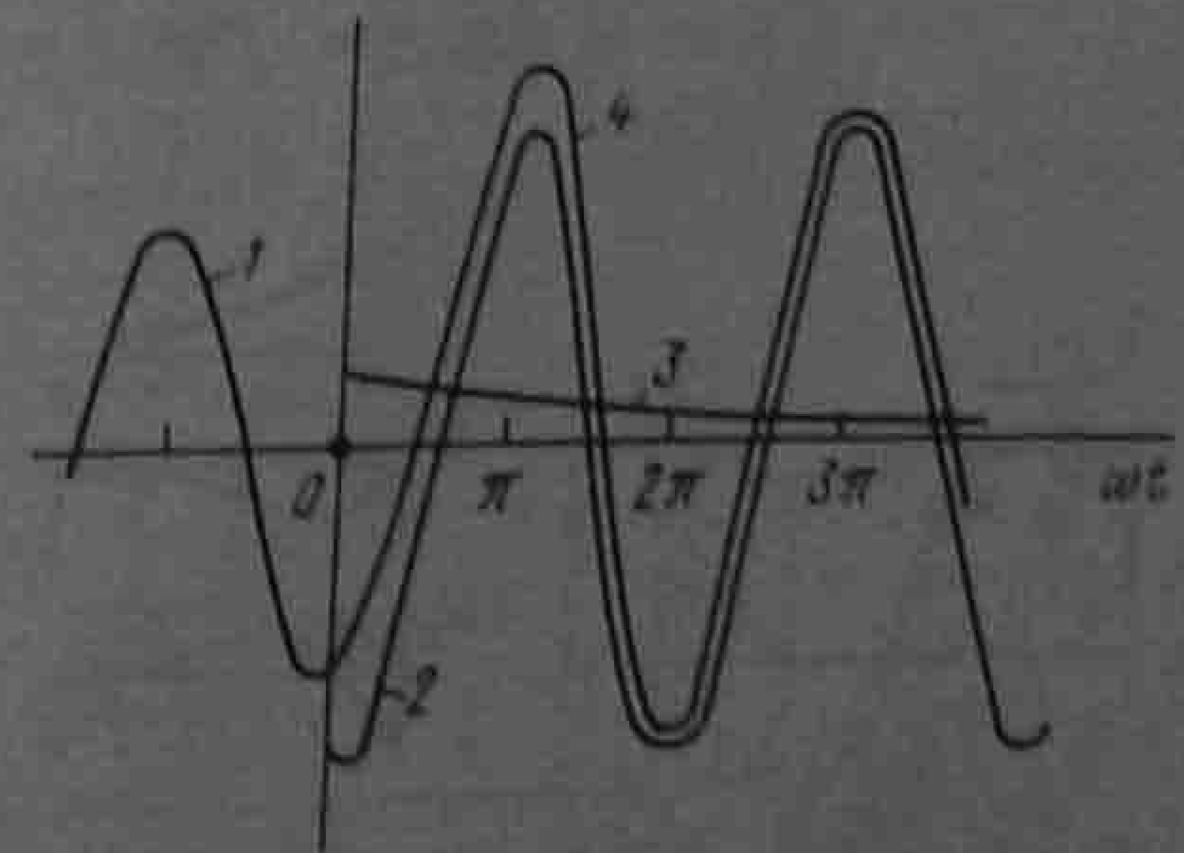



Рис. 8.20

По данным первой части задачи ток в цепи до коммутации (кривая 1 на рис. 8.20 до $\omega t = 0$)

$$i = 25{,}4\sin(\omega t - 86^\circ 50')\ \text{A}.$$

Мгновенное значение принужденного тока после коммутации (кривая 2 на рис. 8.20)

$$i_{пр} = 35{,}2\sin(\omega t - 106^\circ 20')\ \text{A};\quad i_{св}(0_+) = 8{,}45\ \text{A}.$$

Следовательно,

$$i = i_{пр} + i_{св} = 35{,}2\sin(\omega t - 106^\circ 20') + 8{,}45e^{-210t}\ \text{A}.$$

Кривая 3 на рис. 8.20 определяет характер изменения свободного тока, кривая 4 — полного тока после коммутации (ординаты кривой 4 при $\omega t \geqslant 0$ равны сумме ординат кривых 2 и 3).

**Пример 82.** Конденсатор емкостью $C$, заряженный до напряжения $u_C(0)$, при замыкании ключа $K$ разряжается на $L$ и $R$ (рис. 8.21, *а*). Вывести формулы и построить графики изменения во времени $u_C$, $i$, $u_L$, когда корни характеристического уравнения: а) действительные; б) комплексно-сопряженные.

Решение. Корни уравнения $p^2 + p\dfrac{R}{L} + \dfrac{1}{LC} = 0$ равны $p_{1,2} = -\dfrac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\dfrac{R}{2L}\right)^2 - \dfrac{1}{LC}}$. Они действительны при $\left(\dfrac{R}{2L}\right)^2 > \dfrac{1}{LC}$ и комплексно-сопряжены при $\left(\dfrac{R}{2L}\right)^2 < \dfrac{1}{LC}$. При $\left(\dfrac{R}{2L}\right)^2 = \dfrac{1}{LC}$ корни равны. Соответствующее этому случаю $R$ называют *критическим*. При решении учтем, что $i(0) = 0$, $i_{пр} = 0$, $u_{C\,пр} = 0$.

а) Полагаем $p_{1,2}$ — действительные корни. Тогда

$$u_{C\,св} = A_1e^{p_1t} + A_2e^{p_2t};$$

$$i_{C\,св} = C\frac{du_{C\,св}}{dt} = p_1A_1e^{p_1t} + p_2A_2e^{p_2t}.$$

Составим два уравнения для определения $A_1$ и $A_2$:

$$A_1 + A_2 = u_C(0);\ p_1A_1 + p_2A_2 = 0.$$

Отсюда

$$A_1 = \frac{u_C(0)p_2}{p_2 - p_1},\ A_2 = -\frac{u_C(0)p_1}{p_2 - p_1}.$$

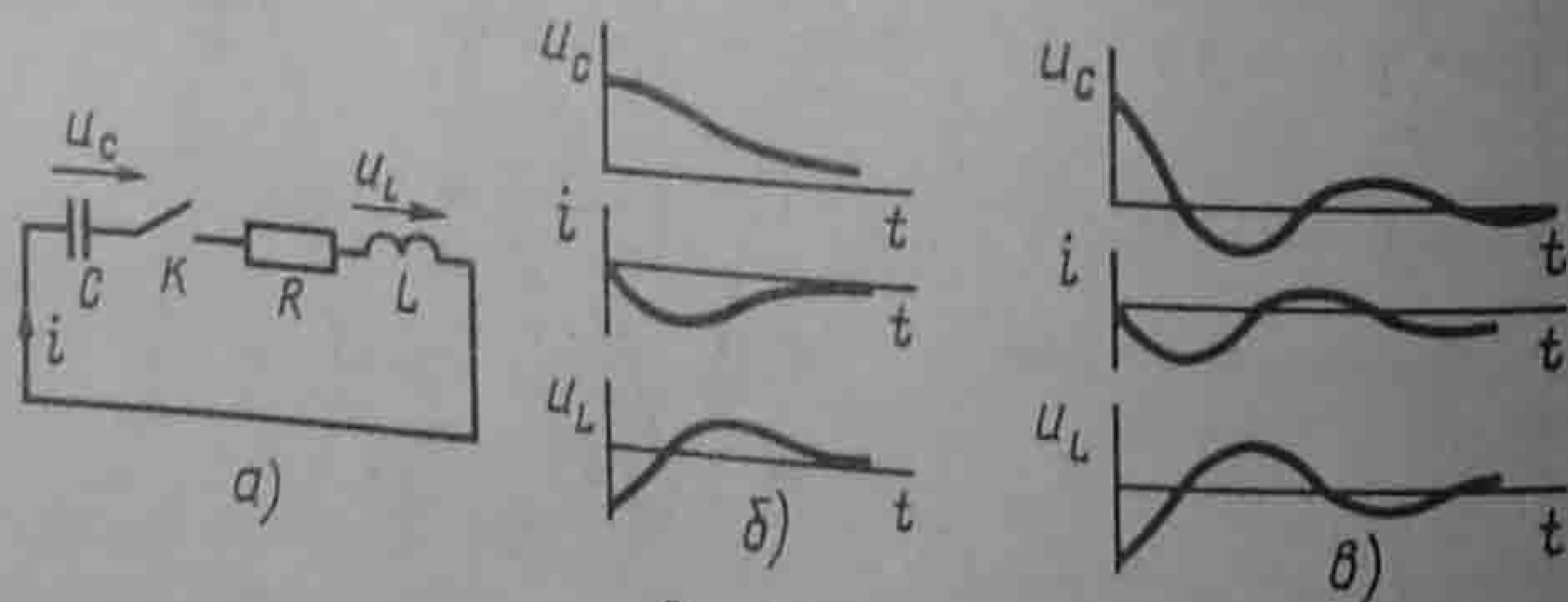



Рис. 8.21



Следовательно,

$$u_C = \frac{u_C(0)}{p_2 - p_1}(p_2e^{p_1t} - p_1e^{p_2t});$$

$$i = Cp_1A_1(e^{p_1t} - e^{p_2t});$$

$$u_L = LCp_1A_1(p_1e^{p_1t} - p_2e^{p_2t}).$$

Графики $u_C$, $i$, $u_L$ для случая а) даны на рис. 8.21, *б*. Для случая б) корни $p_{1,2} = -\delta \pm j\omega_0$, где $\delta = R/2L$; $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{1}{LC} - \left(\dfrac{R}{2L}\right)^2}$. Напряжение $u_{C\,св} = Ae^{-\delta t}\sin(\omega_0 t + \nu)$.

Ток

$$i_{св} = C\frac{du_{C\,св}}{dt} = ACe^{-\delta t}[-\delta\sin(\omega_0t+\nu) + \omega_0\cos(\omega_0t+\nu)] = ACe^{-\delta t}\sin(\omega_0t + \nu + \beta).$$

Здесь $\operatorname{tg}\beta = \omega_0/(-\delta)$, угол $\beta$ находится во второй четверти. Из начальных условий

$$u_C(0) = A\sin\nu \text{ и } i_{св}(0) = AC\sin(\nu + \beta) = 0.$$

Отсюда

$$\nu + \beta = 180^\circ;\ \operatorname{tg}\nu = \omega_0/\delta;\ \sin\nu = \frac{\operatorname{tg}\nu}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\nu}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{\delta^2 + \omega_0^2}}.$$

Постоянная

$$A = \frac{U_C(0)}{\sin\nu} = U_C(0)\sqrt{1 + (\delta/\omega_0)^2}.$$

Графики $u_C = Ae^{-\delta t}\sin(\omega_0t + \nu)$; $i = -AC\sqrt{\delta^2 + \omega_0^2}\,e^{-\delta t}\sin\omega_0 t = -A\sqrt{C/L}\,e^{-\delta t}\sin\omega_0 t$ и

$$u_L = (\delta^2 + \omega_0^2)ACLe^{-\delta t}\sin(\omega_0t - \nu) = \frac{u_C(0)}{\sin\nu}e^{-\delta t}\sin(\omega_0t - \nu)$$

изображены на рис. 8.21, *в*; $u_L(0_+) = -u_C(0)$.

**Пример 83.** В схеме рис. 8.22 ключ замыкается в третьей ветви. До этого был установившийся режим: $e(t) = E = 120$ В. Требуется найти: 1) $i_{2св}(0_+)$; $(di_{2св}/dt)_{0+}$, $u_{C\,св}(0_+)$, $(du_{C\,св}/dt)_{0+}$; 2) $i_2(t)$, $u_C(t)$, если $R_1 = 50$ Ом, $R_2 = 10$ Ом, $L_2 = 2$ Гн, $R_3 = 50$ Ом, $C = 150$ мкФ.

Решение первой части задачи. До замыкания ключа

$$i_1(0_-) = i_2(0_-) = E/(R_1 + R_2) = 120/(50 + 10) = 2\ \text{A}.$$

Принужденный ток после коммутации $i_{1пр} = i_{2пр} = 2$ А. Постоянный ток через конденсатор не проходит, поэтому $i_{3пр} = 0$.

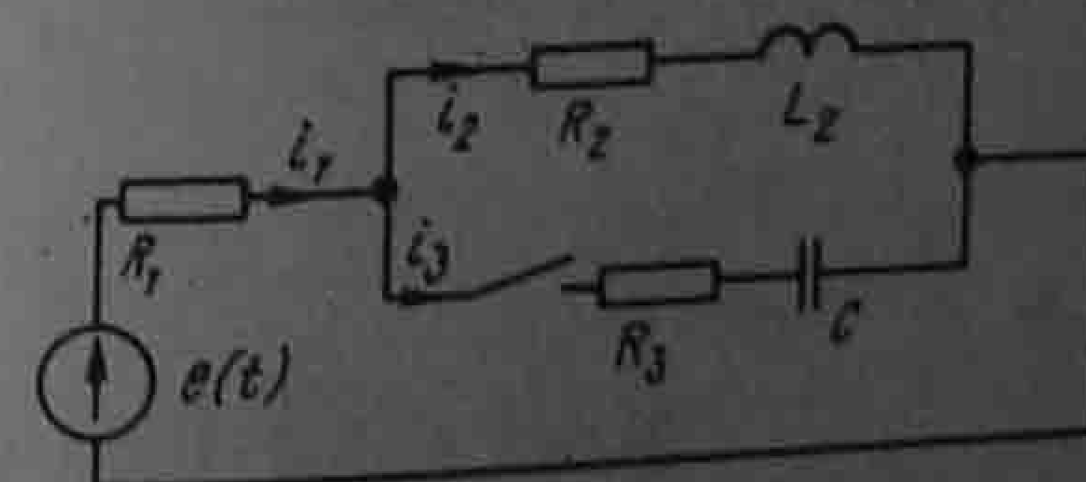



Рис. 8.22

От постоянного тока на индуктивном элементе нет падения напряжения, следовательно, $u_{L\,2пр}=0$.

Принужденное напряжение на конденсаторе равно падению напряжения на $R_2$ от тока $i_{2пр}$: $u_{C\,пр}=2\cdot10=20$ В. По первому закону коммутации $i_2(0_-)=i_2(0_+)=2$ А. Но $i_2(0_+)=i_{2пр}(0_+)+i_{2св}(0_+)$, откуда

$$i_{2св}(0_+)=i_2(0_+)-i_{2пр}(0_+)=2-2=0;$$

$$i_1(0_+)=i_2(0_+)+i_3(0_+),$$

или

$$i_1(0_+)=2+i_3(0_+).$$

Составим уравнение по второму закону Кирхгофа для замкнутого контура, образованного первой и третьей ветвями:

$$i_1(0_+)R_1+i_3(0_+)R_3+u_C(0_+)=E.$$

Так как $u_C(0_+)=0$ и $i_1(0_+)=2+i_3(0_+)$, то

$$i_3(0_+)=\frac{E-2R_1}{R_1+R_3}=\frac{120-2\cdot50}{50+50}=0{,}2\ \text{А}.$$

Свободная составляющая

$$i_{3св}(0_+)=i_3(0_+)-i_{3пр}(0_+)=0{,}2-0=0{,}2\ \text{А}.$$

Чтобы определить $u_{L\,св}(0_+)$, составим уравнение для свободных составляющих по контуру, образованному первой и второй ветвями:

$$i_{1св}(0_+)R_1+i_{2св}(0_+)R_2+u_{L\,св}(0_+)=0,$$

откуда

$$u_{L\,св}(0_+)=-i_{1св}(0_+)R_1-i_{2св}(0_+)R_2=-0{,}2\cdot50-0=-10\ \text{В}.$$

Но $u_{L\,св}=L_2\dfrac{di_{2св}}{dt}$. Следовательно,

$$\left(\frac{di_{2св}}{dt}\right)_{0_+}=u_{L\,св}(0_+)/L_2=-10/2=-5\ \text{А/с}.$$

Свободное напряжение на конденсаторе при $t=0_+$ подсчитаем по второму закону коммутации:

$$u_C(0_-)=u_C(0_+);$$

$$u_C(0_+)=u_{C\,пр}(0_+)+u_{C\,св}(0_+);\ 0=20+u_{C\,св}(0_+),$$

отсюда $u_{C\,св}(0_+)=-20$ В.

Определим скорость изменения свободной составляющей напряжения на конденсаторе при $t=0_+$. С этой целью воспользуемся тем, что $i_{3св}=C\dfrac{du_{C\,св}}{dt}$. Следовательно,

$$\left(\frac{du_{C\,св}}{dt}\right)_{0_+}=i_{3св}(0_+)/C=0{,}2/(150\cdot10^{-6})=1333\ \text{В/с}.$$

Решение второй части задачи. Характеристическое уравнение

$$p^2L_2C(R_1+R_2)+p[C(R_2R_3+R_1R_2+R_1R_3)+L_2]+R_1+R_2=0$$



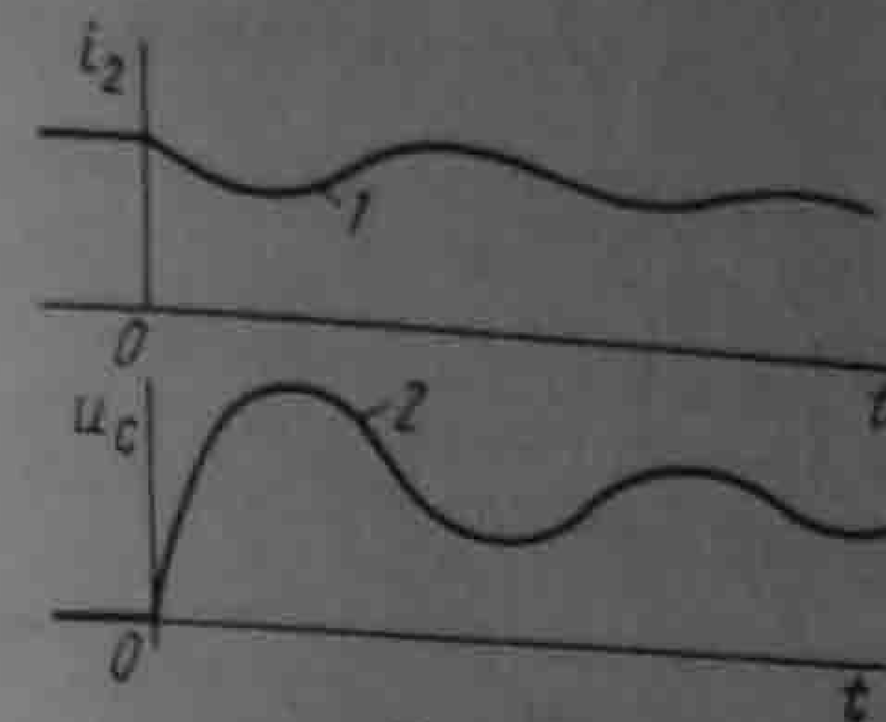



Рис. 8.23

имеет два комплексно-сопряженных корня:

$$p=-42{,}1+j15{,}2\ \text{с}^{-1},\ p_2=-42{,}1-j15{,}2\ \text{с}^{-1}.$$

Поэтому свободная составляющая должна быть взята в виде

$$Ae^{-\delta t}\sin(\omega_0t+\nu),$$

где $\delta=42{,}1$; $\omega_0=15{,}2$; $A$ и $\nu$ определяются по значению свободной составляющей и ее первой производной при $t=0_+$. По данным первой части задачи, $i_{2пр}=2$ А; $i_{2св}(0_+)=0$; $i_{2св}'(0_+)=-5$ А/с; $u_{C\,пр}=20$ В; $u_{C\,св}(0_+)=-20$ В; $u_{C\,св}'(0_+)=1333$ В/с.

При $t=0$ $Ae^{-\delta t}\sin(\omega_0t+\nu)=A\sin\nu$. Производная функция $Ae^{-\delta t}\sin(\omega_0t+\nu)$:

$$-A\delta e^{-\delta t}\sin(\omega_0t+\nu)+Ae^{-\delta t}\omega_0\cos(\omega_0t+\nu).$$

Значение этой производной при $t=0$ равно $-\delta A\sin\nu+\omega_0A\cos\nu$.

Найдем значения $A$ и $\nu$ для свободной составляющей тока $i_2$. Для этого составим два уравнения:

$$i_{2св}(0_+)=0\ \text{или}\ A\sin\nu=0;$$

$$i_{2св}'(0_+)=-5\ \text{или}\ -\delta A\sin\nu+\omega_0A\cos\nu=-5.$$

Совместное решение их дает $A=-0{,}328$ А и $\nu=0$. Следовательно,

$$i_2=i_{2пр}+i_{2св}=2-0{,}328e^{-42{,}1t}\sin15{,}2t\ \text{А}.$$

Кривая 1 на рис. 8.23 выражает собой график $i_2=f(t)$. Найдем $A$ и $\nu$ для свободной составляющей напряжения $u_C$

$$u_{C\,св}(0_+)=-20\ \text{или}\ A\sin\nu=-20;$$

$$u_{C\,св}'(0_+)=1333\ \text{или}\ -\delta A\sin\nu+\omega_0A\cos\nu=1333.$$

Отсюда $A=37{,}9$; $\nu=31°52'$. Таким образом,

$$u_C=u_{Cпр}+u_{Cсв}=20+37{,}9e^{-42{,}1t}\sin(15{,}2t-31°52')\text{В}.$$

Кривая 2 на рис. 8.23 изображает $u_C=f(t)$.

**Пример 84.** В схеме рис. 8.22 $e(t)=127\sin(314t+40°)$ В. Параметры схемы те же, что и в примере 83. До замыкания ключа в схеме был установившийся режим.

Требуется найти: 1) $i_{2св}(0_+)$; $\left(\dfrac{di_{2св}}{dt}\right)_{0_+}$; $u_{Cсв}(0_+)$; $\left(\dfrac{du_{Cсв}}{dt}\right)_{0_+}$;

2) $i_2(t)$, $u_C(t)$.

Решение первой части задачи. До коммутации

$$\dot I_{1m}=\dot I_{2m}=\frac{127e^{j40^\circ}}{60+j628}=0{,}202e^{-j44^\circ 30'}\,\text{А};$$

$$i_1=i_2=0{,}202\sin(\omega t-44^\circ 30');$$

$$i_1(0_-)=i_2(0_-)=0{,}202\sin(-44^\circ 30')=-0{,}1415\ \text{А}.$$

Определим принужденные токи и напряжения на конденсаторе после коммутации.

Входное сопротивление цепи

$$Z_{вх}=R_1+\frac{(R_2+j\omega L_2)\left(R_3-\dfrac{j}{\omega C}\right)}{R_2+j\omega L_2+R_3-\dfrac{j}{\omega C}}=104{,}8e^{-j9^\circ 50'}\,\text{Ом}.$$

Тогда $\dot I_{1m}=\dot E_{1m}/Z_{вх}=127e^{j40^\circ}/104{,}8e^{-j9^\circ 50'}=1{,}213e^{j49^\circ 50'}$.

Мгновенное значение принужденного тока после коммутации

$$i_{1пр}=1{,}213\sin(\omega t+49^\circ 50');$$
$$i_{1пр}(0_+)=1{,}213\sin 49^\circ 50'=0{,}923\text{А}.$$

Комплексное сопротивление параллельно соединенных второй и третьей ветвей

$$Z_{23}=\frac{(R_2+j\omega L_2)\left(R_3-\dfrac{j}{\omega C}\right)}{R_2+j\omega L_2+R_3-\dfrac{j}{\omega C}}=56{,}3e^{-j18^\circ 35'}\,\text{Ом}.$$

Комплексное напряжение на параллельном участке

$$\dot U_{23m}=\dot I_{1m}Z_{23}=1{,}213e^{j49^\circ 30'}56{,}3e^{-j18^\circ 35'}=68{,}2e^{j31^\circ 15'}\,\text{В}.$$

Отсюда

$$\dot I_{2m}=\dot U_{23m}/Z_2=68{,}2e^{j31^\circ 15'}/(10+j628)=0{,}1085e^{-j58^\circ 45'},$$

$$\dot I_{3m}=68{,}2e^{j31^\circ 15'}/(50-j21{,}3)=1{,}253e^{j54^\circ 20'}.$$

Мгновенные значения принужденных токов $i_2$ и $i_3$ после коммутации:

$$i_{2пр}=0{,}1085\sin(\omega t-58^\circ 45');$$

$$i_{3пр}=1{,}253\sin(\omega t+54^\circ 20');$$

$$i_{2пр}(0_+)=0{,}1085\sin(-58^\circ 45')=-0{,}0928\ \text{А};$$

$$i_{3пр}(0_+)=1{,}253\sin 54^\circ 20'=1{,}016\ \text{А}.$$

Принужденное напряжение на конденсаторе

$$\dot U_{Cпр}=\dot I_{3m}\left(\frac{-j}{\omega C}\right)=1{,}253e^{j54^\circ 30'}21{,}3e^{-j90^\circ}=26{,}7e^{-j35^\circ 40'}\,\text{В}.$$

Мгновенное значение принужденого напряжения на конденсаторе после коммутации

$$u_{Cпр}=26{,}7\sin(\omega t-35^\circ 40');\quad u_{Cпр}(0_+)=26{,}7\sin(-35^\circ 40')=-15{,}57\ \text{В}.$$



По первому закону коммутации,

$$i_2(0_-)=i_2(0_+)=-0{,}1415=i_{2пр}(0_+)+i_{2св}(0_+);$$

$$i_{2пр}(0_+)=0{,}0928\text{А};\quad i_{2св}(0_+)=-0{,}1415+0{,}0928=-0{,}0487\ \text{А}.$$

Свободное напряжение на конденсаторе $u_{Cсв}(0_+)$ найдем по второму закону коммутации:

$$u_C(0_-)=u_{Cпр}(0_+)+u_{Cсв}(0_+);$$
$$u_{Cсв}(0_+)=u_C(0_-)-u_{Cпр}(0_+)=0-(-15{,}7)=15{,}57\ \text{В}.$$

Для определения $i_{3св}(0_+)$ составим уравнение по контуру, образованному первой и третьей ветвями:

$$i_{1св}(0_+)R_1+i_{3св}(0_+)R_3+u_{Cсв}(0_+)=0.$$

Заменим в нем $i_{1св}(0_+)$ на $[-0{,}0487+i_{3св}(0_+)]$, и, учтя, что $u_{Cсв}(0_+)=15{,}57$ В, получим

$$i_{3св}(0_+)=\frac{-15{,}57+2{,}43}{50+50}=-0{,}1314\ \text{А};$$

$$i_{1св}(0_+)=i_{2св}(0_+)+i_{3св}(0_+)=-0{,}18\ \text{А}.$$

Чтобы найти $u_{Lсв}(0_+)=L\left(\dfrac{di_{2св}}{dt}\right)_{0_+}$, составим уравнение для контура, образованного первой и второй ветвями:

$$i_{1св}(0_+)R_1+i_{2св}(0_+)R_2+u_{Lсв}(0_+)=0,$$

откуда

$$u_{Lсв}(0_+)=9{,}487\ \text{В};$$

$$\left(\frac{di_{2св}}{dt}\right)_{0_+}=u_{Lсв}(0_+)/L=9{,}487/2=4{,}74\ \text{А/с};$$

$$\left(\frac{du_{Cсв}}{dt}\right)_{0_+}=\frac{i_{3св}(0_+)}{C}=-0{,}1314/(150\cdot 10^{-6})=-876\ \text{В/с}.$$

Решение второй части задачи. По даным, полученным при решении первой части,

$$i_{2пр}=0{,}1085\sin(\omega t-58^\circ 45'),\quad i_{2св}(0_+)=-0{,}0487\ \text{А};$$
$$i'_{2св}(0_+)=4{,}74\ \text{А/с};$$
$$u_{Cпр}=26{,}7\sin(\omega t-35^\circ 40'),\quad u_{Cсв}(0_+)=15{,}57\ \text{В};$$
$$u'_{Cсв}(0_+)=-876\text{В/с}.$$

Корни характеристического уравнения те же, что и в предыдушем примере. Определим $A$ и $\nu$ для $i_{2св}$, составим два уравнения:

$$A\sin\nu=-0{,}0487;\quad \delta A\sin\nu+\omega_0 A\cos\nu=4{,}74,$$

откуда $A=0{,}184$ А; $\nu=-15^\circ 20'$.

Следовательно,

$$i_2=i_{2пр}+i_{2св}=0{,}1085\sin(\omega t-58^\circ 45')+0{,}184e^{-42{,}1t}\sin(15{,}2t-15^\circ 20')\ \text{А}.$$

Найдем $A$ и $\nu$ для $u_{Ccв}$, составим два уравнения:

$$A\sin\nu=15{,}57;\quad -\delta A\sin\nu+\omega_0 A\cos\nu=-876.$$

Их совместное решение дает $A=21{,}3$; $\nu=136°50'$. Таким образом, $u_C=u_{Cпр}+u_{Cсв}=26{,}7\sin(\omega t-35°40')+21{,}3e^{-42{,}1t}\sin(15{,}2t+136°50')$ В.

**§ 8.28. О переходных процессах, при макроскопическом рассмотрении которых не выполняются законы коммутации[1]. Обобщенные законы коммутации.** На практике встречаются схемы, переходные процессы в которых состоят как бы из двух стадий резко различной продолжительности. Длительность первой стадии в тысячи и миллионы раз короче второй. В течение первой стадии токи в индуктивных элементах и напряжения на конденсаторах изменяются настолько быстро (почти скачкообразно), что если считать $t=0_-$ началом, а $t=0_+$ — окончанием первой стадии, то создается впечатление, что при переходе от $t=0_-$ к $t=0_+$, т. е. за время, например, в несколько микросекунд, как бы нарушаются законы коммутации.

Для иллюстрации нарушения второго закона коммутации рассмотрим переходной процесс в схеме рис. 8.24 с начальными условиями $u_{C1}(0_-)=E$, $u_{C2}(0_-)=0$.

Сначала при замыкании ключа через конденсаторы возникают очень большие броски токов (ограничиваемые хотя и очень малыми, но все же конечными сопротивлениями соединительных проводов $R_{пр}$), прохождение которых приводит почти к мгновенному уравнению напряжения на конденсаторах до значения, меньшего $E$. (Строго говоря, если учесть сопротивление $R_{пр}$, то для первой стадии переходного процесса в схеме рис. 8.24 характеристическое уравнение будет уравнением второго порядка, один корень которого при $R_{пр}\to 0$ стремится к бесконечности.)

После этого начинается вторая стадия, когда параллельно соединенные конденсаторы относительно медленно заряжаются до напряжения $E$. Длительность переходного процесса практически определяется второй стадией.

В качестве примера нарушения первого закона коммутации рассмотрим переходной процесс в схеме рис. 8.15. Быстрое размыкание ключа в первой ветви, например за $10^{-5}$ с, приводит к тому, что сопротивление этой ветви быстро увеличивается, ток $i_1$ почти скачком уменьшается до нуля и почти скачком изменяются токи в остальных ветвях. Таким образом, за очень малое время порядка $10^{-5}$ с (от $t=0_-$ до $t=0_+$) токи резко изменяются, а $i(0_+)\neq i(0_-)$; $i_2(0_+)\neq i_2(0_-)$.

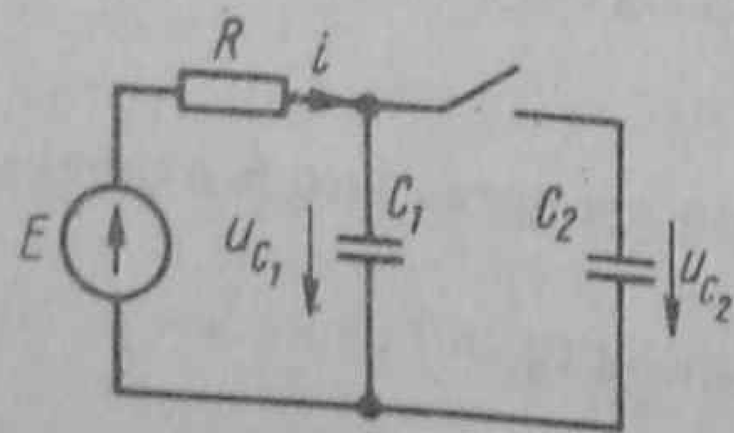



Рис. 8.24

[1] Имеются в виду ранее рассмотренные законы коммутации.



Нарушение законов коммутации в формулировке § 8.5, 8.6 при переходе от $t=0_-$ до $t=0_+$ объясняется тем, что процессы быстро протекающей первой стадии и их зависимость от времени не рассматриваются. Если же первую стадию не исключать при рассмотрении, то ранее рассмотренные законы коммутации выполняются.

Для того чтобы можно было рассчитать переходные процессы *сразу во второй стадии, как бы перешагнув через первую,* надо, во-первых, примириться с тем, что при переходе от от $t=0_-$ до $t=0_+$ в рассматриваемых задачах законы коммутации в том виде, как они сформулированы в § 8.5, 8.6, не будут выполнены; во-вторых, принять исходные положения, которые позволяют определить значения токов через индуктивности и напряжений на конденсаторах (а если потребуется, то и их производные) при $t=0_+$ через значения токов и напряжений при $t=0_-$. Таких положений (правил) два. При решении задач рассматриваемого типа они заменяют законы (правила) коммутации, о которых шла речь в § 8.5, 8.6, и потому их называют иногда *обобщенными законами (правилами) коммутации.*

1. При переходе от $t=0_-$ до $t=0_+$ суммарное потокосцепление $\sum\psi$ каждого замкнутого контура послекоммутационной схемы не должно претерпевать скачкообразных изменений. Это положение следует из второго закона Кирхгофа и доказывается от противного: если допустить, что $\sum\psi$ некоторого контура изменится скачком, то в уравнении для этого контура, составленном по второму закону Кирхгофа, появилось бы слагаемое $(\Delta\sum\psi/\Delta t)_{\Delta t\to 0}\to\infty$ и второй закон Кирхгофа не был бы выполнен.

Суммарное потокосцепление $\sum\psi$ представляет собой алгебраическую сумму произведений токов ветвей этого контура на индуктивности их индуктивных элементов (в общем случае с учетом магнитной связи с другими ветвями). Со знаком плюс в эту сумму входят слагаемые ветвей, направление токов в которых совпадает с произвольно выбранным направлением обхода контура.

2. При переходе от $t=0_-$ до $t=0_+$ суммарный заряд $\sum q$ на обкладках конденсаторов, присоединенных к любому узлу послекоммутационной схемы, должен остаться неизменным. Если этого не выполнить, то суммарный ток, проходящий через конденсаторы, был бы бесконечно большим (стремился бы к бесконечности), бесконечно большими были бы токи и через другие ветви, присоединенные к этому узлу. Это также привело бы к нарушению второго закона Кирхгофа.

**Пример 85.** В схеме рис. 8.15 до размыкания ключа был установившийся режим. Определить ток в цепи после коммутации.

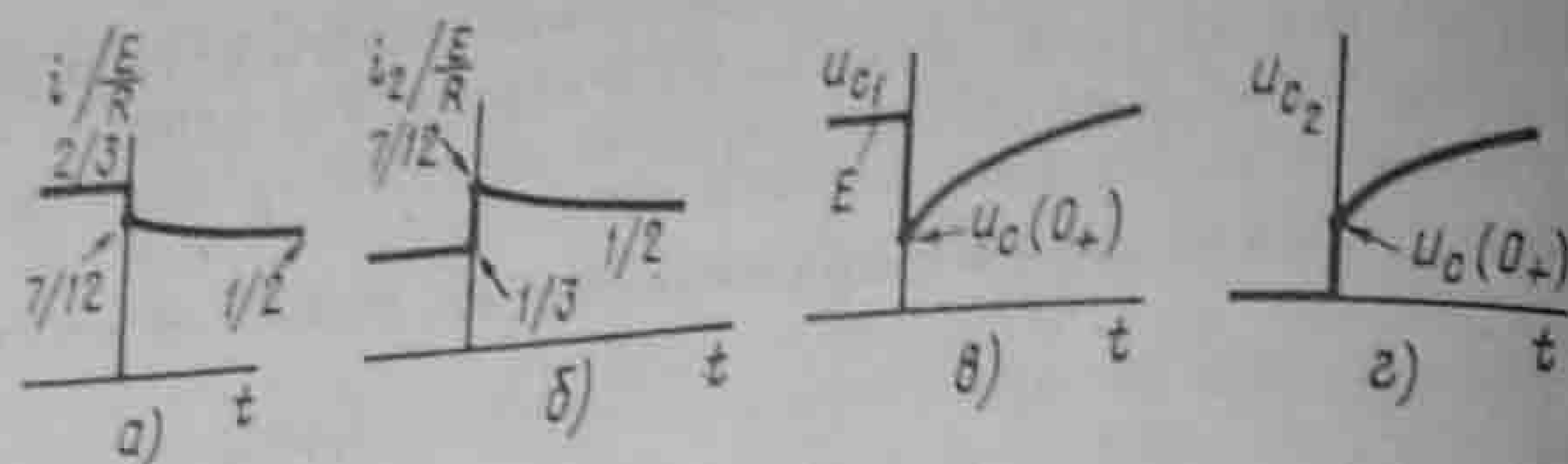



Рис. 8.25

Решение. Послекоммутационная схема рис. 8.15 имеет всего один контур. По первому закону (правилу) коммутации:

$$Li(0_-) + L_2 i_2(0_-) = i(0_+)(L + L_2);$$

$$i(0_+) = [1/(L + L_2)][Li(0_-) + L_2 i_2(0_-)].$$

Закон изменения тока при $t \geqslant 0_+$, если считать, что до коммутации был установившийся режим,

$$i = \frac{E}{2R} + \left[\frac{E}{3R}\frac{2L + L_2}{L + L_2} - \frac{E}{2R}\right] e^{-\frac{2R}{L + L_2}t}.$$

На рис. 8.25, *а*, *б* показан характер изменения токов для схемы рис. 8.15 в долях от $E/R$ при $L = 3L_2$ ($L_2$ в правой ветви).

**Пример 86.** Определить закон изменения напряжений $u_{C1}$ и $u_{C2}$ при замыкании ключа в схеме рис. 8.24.

Решение. В схеме известны $u_{C1}(0_-) = E$; $u_{C2}(0_+) = 0$. По второму закону (правилу) коммутации составляем одно уравнение (т. е. столько, сколько надо составить уравнений для послекоммутационной схемы по первому закону Кирхгофа):

$$u_{C1}(0_-)C_1 = u_C(0_+) = (C_1 + C_2),$$

отсюда

$$u_C(0_+) = u_{C1}(0_+) = u_{C2}(0_+) = \frac{EC_1}{C_1 + C_2}.$$

При $t \geqslant 0_+$

$$u_C = u_{C\text{пр}} + u_{C\text{св}} = E - E\frac{C_2}{C_1 + C_2} e^{-\frac{t}{R(C_1 + C_2)}}.$$

Характер изменения $u_{C1}$ и $u_{C2}$ показан на рис. 8.25, *в*, *г*.

В заключение обратим внимание на то, что, допустив при переходе от $t = 0_-$ к $t = 0_+$ скачкообразное изменение токов через индуктивный элемент и скачкообразное изменение напряжений на конденсаторах, тем самым допускаем скачкообразное изменение энергии магнитного поля индуктивных элементов и энергии электрического поля конденсаторов.

Суммарная энергия электрического и магнитного полей при $t = 0_+$ всегда меньше суммарной энергии при $t = 0_-$, так как часть запасенной энергии расходуется на тепловые потери в резисторах, искру при коммутации, электромагнитное излучение в окружающее пространство.



Прежде чем перейти к изучению основ второго метода расчета переходных процессов в линейных электрических цепях — операторного метода, вспомним некоторые известные положения.

**§ 8.29. Логарифм как изображение числа.** Известно, что для выполнения операций умножения, деления, возведения в степень и извлечения корня из многозначных чисел целесообразно пользоваться логарифмами.

Действительно, операция умножения сводится к сложению логарифмов, операция деления — к вычитанию логарифмов и т. д. Таким образом, произвести расчет легче в силу того, что сравнительно сложная операция сводится к более простой. Каждому числу соответствует свой логарифм, поэтому логарифм можно рассматривать как изображение числа. Так, 0,30103 есть изображение (логарифм) при основании 10 числа 2.

**§ 8.30. Комплексные изображения синусоидальных функций.** С понятием изображения встречаются также при изучении символического метода расчета цепей синусоидального тока. Согласно символическому методу, комплексная амплитуда есть изображение синусоидальной функции. Так, $\dot{I}_m$ — изображение синусоидального тока $I_m \sin(\omega t + \psi)$. Между изображением числа в виде логарифма и изображением синусоидальной функции времени в виде комплексного числа имеется существенная разница. В первом случае речь идет об изображении числа (не функции), во втором — об изображении функции времени.

Подобно тому как введение логарифмов упростило проведение операций над числами, введение комплексных изображений синусоидальных функций времени позволило упростить операции над функциями времени (свести операции расчета цепей синусоидального тока к операциям, изученным в гл. 2).

**§ 8.31. Введение в операторный метод.** Операторный метод тоже основан на использовании понятия об изображении функций времени. В операторном методе каждой функции времени соответствует функция новой переменной, обозначаемой буквой $p$, и наоборот — функции переменной $p$ отвечает определенная функция времени.

Переход от функции времени к функции $p$ осуществляют с помощью преобразования (прямого) Лапласа.

Таким образом, операторный метод расчета переходных процессов представляет собой метод расчета, основанный на преобразовании Лапласа.

Операторный метод позволяет свести операцию дифференцирования к умножению, а операцию интегрирования — к делению. Это облегчает интегрирование дифференциальных уравнений.

**§ 8.32. Преобразование Лапласа.** Условимся под $p$ понимать комплексное число

$$p = a + jb, \tag{8.24}$$

где $a$ — действительная, а $jb$ — мнимая части комплексного числа (в ряде книг вместо буквы $p$ пишут $s$).

В дальнейшем в соответствии с установившейся практикой коэффициент $b$ с учетом знака условимся называть не коэффициентом при мнимой части комплекса (чем он в действительности является), а мнимой частью. Функцию времени (ток, напряжение, ЭДС, заряд) обозначают $f(t)$ и называют *оригиналом*. Ей соответствует функция $F(p)$, называемая *изображением*, которая определяется следующим образом:

$$F(p) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-pt}\, dt. \tag{8.25}$$

Соответствие между функциями $F(p)$ и $f(t)$ записывают так:

$$F(p) \doteqdot f(t). \tag{8.26}$$

Знак «$\doteqdot$» называют знаком соответствия.

Верхний предел интеграла (8.25) равен бесконечности. Интегралы с бесконечным верхним пределом называют *несобственными*. Если в результате интегрирования и подстановки пределов получают конечное число (не бесконечность), то говорят, что интеграл сходится.

В курсе математики доказывается, что интеграл (8.25), в состав которого входит функция $e^{-pt} = e^{-at}e^{-jbt}$, сходится только в том случае, когда модуль функции $f(t)$, если и увеличивается с ростом $t$, то все же медленнее, чем модуль функции $e^{pt}$, равный $e^{at}$.

Практически все функции $f(t)$, с которыми имеют дело в курсе ТОЭ, этому условию удовлетворяют.

Составим изображения некоторых простейших функций.

**§ 8.33. Изображение постоянной.** Требуется найти изображение функции $f(t) = A$, где $A$ — постоянная величина. С этой целью, в (8.25) вместо $f(t)$ подставим $A$ и проведем интегрирование:

$$F(p) = \int_0^\infty A\, e^{-pt}\, dt = A\left(-\frac{1}{p}\right)\int_0^\infty d(e^{-pt}) = -\left.\frac{A\, e^{-pt}}{p}\right|_0^\infty = \frac{A}{p}.$$

Следовательно, изображение постоянной равно постоянной, деленной на $p$:

$$A \doteqdot A/p. \tag{8.27}$$



**§ 8.34. Изображение показательной функции $e^{\alpha t}$.** Вместо $f(t)$ в (8.25) подставим $e^{\alpha t}$:

$$F(p) = \int_0^\infty e^{\alpha t} e^{-pt} dt = \int_0^\infty e^{-t(p-\alpha)}\, dt = \left(-\frac{1}{p-\alpha}\right) \times$$

$$\times \int_0^\infty e^{-t(p-\alpha)}\, d[-t(p-\alpha)] = \frac{-1}{p-\alpha} \left. e^{-t(p-\alpha)}\right|_0^\infty = -\frac{1}{p-\alpha}(0-1) = \frac{1}{p-\alpha}.$$

Таким образом,

$$e^{\alpha t} \doteqdot \frac{1}{p-\alpha}. \tag{8.28}$$

При выводе формулы (8.28) (при подстановке пределов) было учтено, что действительная часть оператора $p$ больше, чем $\alpha$, т. е. $a > \alpha$. Только при этом условии интеграл сходится.

Из формулы (8.28) вытекает ряд важных следствий. Положив в ней $\alpha = j\omega$, получим

$$e^{j\omega t} \doteqdot 1/(p - j\omega). \tag{8.29}$$

Формула (8.29) дает возможность найти изображение комплекса синусоидального тока:

$$\dot{I}_m e^{j(\omega t + \psi)} = \dot{I}_m e^{j\omega t}.$$

С этой целью обе части (8.29) умножим на постоянное число $\dot{I}_m$:

$$\dot{I}_m e^{j\omega t} \doteqdot \dot{I}_m \frac{1}{p - j\omega}. \tag{8.30}$$

Аналогично, изображение комплекса синусоидального напряжения

$$\dot{U}_m e^{j\omega t} \doteqdot \dot{U}_m \frac{1}{p - j\omega}. \tag{8.31}$$

Функции $e^{-\alpha t}$ соответствует изображение $1/(p+\alpha)$:

$$e^{-\alpha t} \doteqdot 1/(p+\alpha). \tag{8.32}$$

**§ 8.35. Изображение первой производной.** Известно, что функции $f(t)$ соответствует изображение $F(p)$. Требуется найти изображение первой производной $df(t)/dt$, если известно, что значение функции $f(t)$ при $t = 0$ равно $f(0)$.

Подвергнем функцию $df(t)/dt$ преобразованию Лапласа:

$$\int_0^\infty \frac{df(t)}{dt} e^{-pt}\, dt = \int_0^\infty e^{-pt}\, d[f(t)].$$

Интегрирование произведем по частям $\int u dv = uv - \int v du$. Обозначив $e^{-pt} = u$ и $d[f(t)] = dv$, получим

$$\int_0^\infty e^{-pt} d[f(t)] = e^{-pt} f(t) \Big|_0^\infty - \int_0^\infty f(t) d[e^{-pt}].$$

Но

$$e^{-pt} f(t) \Big|_0^\infty = 0 - f(0) = -f(0),$$

а

$$-\int_0^\infty f(t)\, de^{-pt} = p \int_0^\infty f(t)\, e^{-pt}\, dt = pF(p).$$

Таким образом,

$$\int_0^\infty \frac{df(t)}{dt} e^{-pt}\, dt = pF(p) - f(0), \tag{8.33}$$

или

$$df(t)/dt \doteq pF(p) - f(0). \tag{8.33а}$$

**§ 8.36. Изображение напряжения на индуктивном элементе.** Изображение тока $i$ равно $I(p)$. Запишем изображение напряжения на $L$: $u_L = L \frac{d}{dt}$. По формуле (8.33а), $di/dt \doteq pI(p) - i(0)$, где $i(0)$[1] — значение тока $i$ при $t = 0_-$. Следовательно,

$$L\frac{di}{dt} \doteq LpI(p) - Li(0). \tag{8.34}$$

Если $i(0) = 0$, то

$$L\frac{di}{dt} \doteq LpI(p). \tag{8.34а}$$

**§ 8.37. Изображение второй производной.** Без вывода дадим формулу

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} \doteq p^2 F(p) - pf(0) - \left[\frac{df(t)}{dt}\right]_{t=0}. \tag{8.35}$$

[1] Для сокращения записи вместо $i(0_-)$ пишем $i(0)$; $i(0)$ может быть и положительной, и отрицательной величиной; $i(0)$ положительно, когда направление тока совпадает с произвольно выбранным положительным направлением послекоммутационного тока в индуктивном элементе $L$.



Следовательно, изображение второй производной тока $i$

$$\frac{d^2 i}{dt^2} \doteq p^2 I(p) - pi(0) - i'(0).$$

**§ 8.38. Изображение интеграла.** Требуется найти изображение функции $\int_0^t f(t)\, dt$, если известно, что изображение функции $f(t)$ равно $F(p)$.

Подвергнем функцию $\int_0^t f(t)\, dt$ преобразованию Лапласа:

$$\int_0^\infty \left[\int_0^t f(t)\, dt\right] e^{-pt} dt = -\frac{1}{p}\int_0^\infty \left[\int_0^t f(t)\, dt\right] d(e^{-pt}).$$

Примем $\int_0^t f(t)\, dt = u$; $d(e^{-pt}) = dv$ и возьмем интеграл по частям:

$$-\frac{1}{p}\int_0^\infty \left[\int_0^t f(t)\, dt\right] d(e^{-pt}) = -\frac{1}{p}\left[\int_0^t f(t)\, dt\right] e^{-pt}\Big|_0^\infty + \frac{\int_0^\infty f(t)\, e^{-pt}\, dt}{p} = \frac{F(p)}{p}.$$

Первое слагаемое правой части при подстановке и верхнего и нижнего пределов обращается в нуль. При подстановке верхнего предела нуль получается за счет ранее наложенного ограничения на функцию $f(t)$ (см. § 8.32) функция $f(t)$, если и растет с увеличением $t$, то все же медленнее, чем растет функция $e^{at}$, где $a$ — действительная часть $p$. При подстановке нижнего предела нуль получим за счет обращения в нуль $\int_0^t f(t)\, dt$. Следовательно, если $f(t) \doteq F(p)$, то

$$\int_0^t f(t)\, dt \doteq F(p)/p. \tag{8.36}$$

**§ 8.39. Изображение напряжения на конденсаторе.** Напряжение на конденсаторе $u_C$ часто записывают в виде $u_C = \frac{1}{C}\int i dt$, где не указаны пределы интегрирования по времени. Более полной является следующая запись:

$$u_C = u_C(0) + \frac{1}{C}\int_0^t i dt.$$

где учтено, что к моменту времени $t$ напряжение на конденсаторе определяется не только током, протекшим через него в интервале времени от 0 до $t$, но и тем напряжением $u_C(0)$, которое на нем было при $t=0$. В соответствии с формулой (8.36) изображение $\frac{1}{C}\int_0^t i\,dt$ равно $I(p)/Cp$, а изображение постоянной $u_C(0)$ есть постоянная, деленная на $p$. Поэтому изображение напряжения на конденсаторе записывают следующим образом:

$$u_C \doteq \frac{I(p)}{Cp} + \frac{u_C(0)^{1}}{p}. \tag{8.37}$$

Приведем простейшие операторные соотношения; часть их была выведена ранее, другая дается без вывода:

1) $\frac{1}{p-a} \doteq e^{at}$;

2) $\frac{1}{p+a} \doteq e^{-at}$;

3) $\frac{1}{p-j\omega} \doteq e^{j\omega t}$;

4) $\frac{a}{p(p+a)} \doteq 1-e^{-at}$;

5) $\frac{1}{(p+a)^2} \doteq t\,e^{-at}$;

6) $\frac{p}{(p+a)^2} \doteq (1-at)\,e^{-at}$;

7) $\frac{1}{p(p+a)^2} \doteq \frac{1}{a^2}[1-e^{-at}(1+at)]$;

8) $\frac{1}{p^2(p+a)} \doteq \frac{t}{a} - \frac{1}{a^2} + \frac{e^{-at}}{a^2}$;

9) $\frac{p}{(p+a)(p+b)} \doteq \frac{1}{a-b}(ae^{-at}-be^{-bt})$;

10) $\frac{1}{(p+a)(p+b)} \doteq \frac{1}{a-b}(e^{-bt}-e^{-at})$;

11) $\frac{1}{p(p+a)(p+b)} \doteq \frac{1}{ab} + \frac{1}{b-a}\times\left(\frac{e^{-bt}}{b} - \frac{e^{-at}}{a}\right)$;

12) $\frac{1}{p^2} \doteq t$;

13) $\frac{1}{p^n} \doteq \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$;

14) $\frac{p}{(p+a)^3} \doteq t\left(1-\frac{at}{2}\right)e^{-at}$;

15) $\frac{1}{(p+a)^n} \doteq \frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{-at}$;

16) $\frac{1}{p^2-a^2} \doteq \frac{1}{a}\,\mathrm{sh}\,at$;

17) $\frac{p}{p^2-a^2} \doteq \mathrm{ch}\,at$;

18) $\frac{1}{p^2+a^2} \doteq \frac{1}{a}\sin at$;

19) $\frac{p}{p^2+a^2} \doteq \cos at$;

20) $\frac{p}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)} \doteq \frac{1}{b^2-a^2}\times(\cos at - \cos bt)$;

21) $\frac{1}{(p+a)^2+b^2} \doteq \frac{1}{b}e^{-at}\sin bt$;

22) $1 \doteq \delta(t)$;

23) $\frac{1}{\sqrt{p}} \doteq \frac{1}{\sqrt{\pi t}}$;

24) $\frac{1}{p\sqrt{p}} \doteq 2\sqrt{t/\pi}$;

25) $\frac{1}{\sqrt{p^2+a^2}} \doteq J_0(at)$;

26) $\frac{1}{\sqrt{p^2-a^2}} \doteq J_0(jat)$;

27) $\frac{e^{-a\sqrt{p}}}{p} \doteq 1-\Phi\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)$,

где $\Phi$ — интеграл ошибок Гаусса;

28) $\frac{e^{-a\sqrt{p}}}{p} \doteq \frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{a^2}{4t}}$;

29)

$$\frac{e^{-\tau\sqrt{p^2+2bp}}}{\sqrt{p^2+2bp}} \doteq e^{-bt}J_0(jb\sqrt{t^2-\tau^2}),\ t>\tau.$$

[1] Для сокращения записи вместо $u_C(0_-)$ пишем $u_C(0)$; $u_C(0)$ может быть и положительной, и отрицательной величиной. В формуле (8.37) $u_C(0)$ считают положительной величиной, если направление $u_C(0)$ совпадает с произвольно выбранным положительным направлением послекоммутационного тока через конденсатор.



**§ 8.40. Некоторые теоремы и предельные соотношения.** 1. *Теорема смещения в области оригиналов (теорема запаздывания).* Если изображение функции $f(t)$ равно $F(p)$, то изображение функции $f(t-\tau)$ равно $e^{-p\tau}F(p)$.

Теорема доказывается путем подстановки $f(t-\tau)$ в формулу преобразования Лапласа и введения новой переменной $t-\tau=t_1$, $dt=dt_1$, $e^{-pt}=e^{-p\tau}e^{-pt_1}$:

$$\int_0^\infty e^{-pt}f(t-\tau)\,d\tau = e^{-p\tau}\int_0^\infty e^{-pt_1}f(t_1)\,dt_1 = e^{-p\tau}F(p).$$

Пример на применение теоремы см. в § 8.60.

2. *Теорема смещения в области изображений.* Если изображению функции $F(p)$ соответствует функция $f(t)$, то изображению $F(p-\lambda)$ — функция $e^{\lambda t}f(t)$.

Доказательство проводят путем подстановки функции $e^{\lambda t}f(t)$ в формулу преобразования Лапласа:

$$\int_0^\infty e^{-pt}e^{\lambda t}f(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-t(p-\lambda)}f(t)\,dt = F(p-\lambda).$$

**Пример 87.** Найти оригинал $1/(p+\lambda)^2$, если известно, что $1/p^2 \doteq t$.

Р е ш е н и е: $1/(p+\lambda)^2 \doteq e^{-\lambda t}\,t$.

3. *Теорема об изменении масштаба (теорема подобия).* Если функции $f(t)$ соответствует изображение $F(p)$, то функции $f(\lambda t)$ — изображение $\frac{1}{\alpha}F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$.

Теорема доказывается следующим образом:

$$\int_0^\infty e^{-pt} f(at)\, dt = \frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-\frac{p}{a}(at)} f(at)\, d(at) = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right).$$

4. *Нахождение начального значения функции времени* $f(0_+)$ *по изображению функции* $F(p)$:

$$f(0_+) = \lim_{p\to\infty} pF(p).$$

Это соотношение получают, если в (8.33) $p$ устремим к бесконечности. При этом левая часть (8.33) равна нулю.

5. *Нахождение установившегося значения функции времени* $f(\infty)$ по изображению функции $F(p)$:

$$f(\infty) = \lim_{p\to 0} pF(p).$$

Соотношение получим, если в (8.33) $p$ устремим к нулю и учтем, что $e^{-pt}_{p\to 0} = 1$. В результате имеем

$$\int_0^\infty df(t) = f(\infty) - f(0) = \lim_{p\to 0} pF(p) - f(0),$$

или

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{p\to 0} pF(p).$$

Если искомая функция $f(t)$ в послекоммутационном режиме содержит в своем составе периодическую составляющую (принужденную или свободную), то понятие $f(\infty)$ для нее оказывается неопределенным. Например, не имеет определенного смысла функция $\sin \omega t$ при $t=\infty$. В соответствии с этим к цепям с синусоидальными источниками не следует применять предельное соотношение п. 5. Точно так же не следует пользоваться им для цепей без синусоидальных источников, если эти цепи чисто реактивные и не содержат резисторов. Так, при подключении последовательно соединенных $L$ и $C$ (при нулевых начальных условиях) к единичному напряжению $1(t)$ по цепи протекает свободная составляющая тока, численно равная $\sqrt{C/L}\,\sin\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right)$. В этом случае определять $f(\infty)$ как $\lim_{p\to 0} pF(p)$ также не имеет смысла.

6. *Дифференцирование в области изображений.* Если $F(p) \doteq f(t)$, то $-\frac{dF(p)}{dp} \doteq tf(t)$. Доказательство:

$$-\frac{d}{dp}\left[\int_0^\infty f(t)e^{-pt}\,dt\right] = -\int_0^\infty f(t)\left[\frac{d}{dp}e^{-pt}\right]dt = -\int_0^\infty tf(t)e^{-pt}\,dt.$$



Например, если $f(t) = e^{-at}$; $F(p) = \frac{1}{p+a}$; $te^{-at} \doteq -\frac{dF(p)}{dp} = \frac{1}{(p+a)^2}$.

7. *Интегрирование в области изображений.* Если при $t \geqslant 0$ $f(t)$ и $\frac{f(t)}{t}$ преобразуемы по Лапласу и $\int_p^\infty F(p)\,dp$ существует, то

$$\int_p^\infty F(p)\,dp \doteq \frac{f(t)}{t}.$$

Доказательство:

$$\int_p^\infty F(p)\,dp = \int_0^\infty\left[\int_0^\infty f(t)e^{-pt}\,dt\right]dp = \int_0^\infty f(t)\left[\int_p^\infty e^{-pt}\,dp\right]dt =$$

$$= \int_0^\infty f(t)\left[\frac{e^{-pt}}{t}\right]_p^\infty dt = \int_0^\infty \frac{f(t)}{t}e^{-pt}\,dt.$$

Например, если $f(t) = 1 - e^{-at}$ $(a>0)$, $F(p) = \frac{a}{p(p+a)}$,

$$\frac{1-e^{-at}}{t} \doteq \int_p^\infty \frac{a}{p(p+a)}\,dp = \int_p^\infty\left[\frac{1}{p} - \frac{1}{p+a}\right]dp = \ln\frac{(p+a)}{p}.$$

**§ 8.41. Закон Ома в операторной форме. Внутренние ЭДС.** На рис. 8.26 изображена часть сложной разветвленной электрической цепи. Между узлами $a$ и $b$ этой цепи включена ветвь, содержащая $R$, $L$, $C$ и источник ЭДС $e(t)$. Ток по ветви обозначим через $i$.

Замыкание ключа $K$ в схеме приводит к переходному процессу. До коммутации ток $i = i(0_-)$ и напряжение на конденсаторе $u_C = u_C(0_-)$. Выразим потенциал точки $a$ через потенциал точки $b$ для послекоммутационного режима:

$$\varphi_a = \varphi_b + u_C + u_L + u_R - e(t);$$

$$u_{ab} = \varphi_a - \varphi_b = u_R + u_L + u_C - e(t).$$

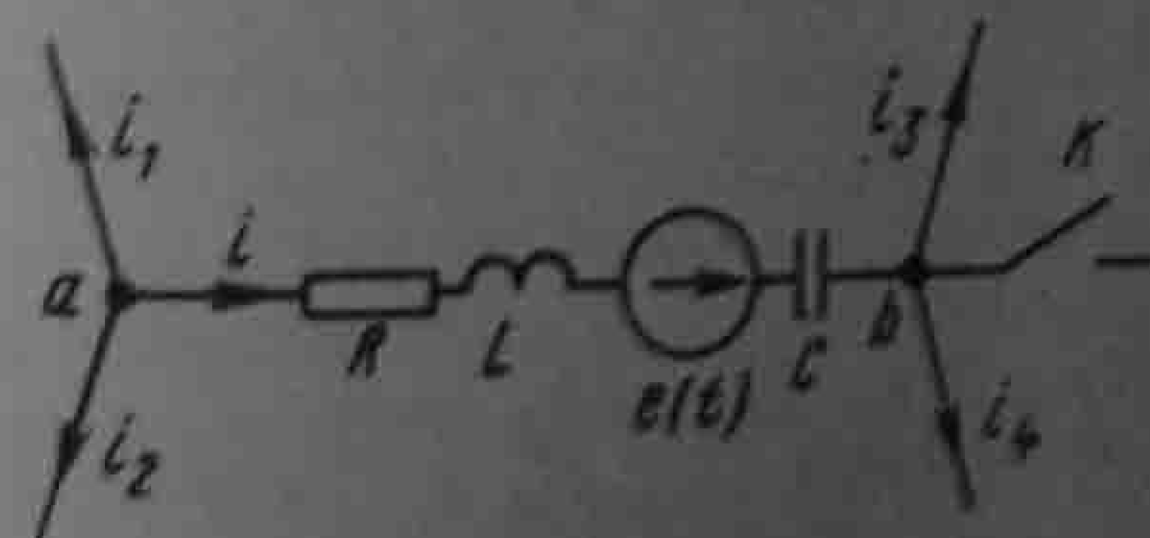



Рис. 8.26

Вместо $u_L$ запишем $L\dfrac{di}{dt}$, вместо $u_C$ соответственно $u_C(0)+\dfrac{1}{C}\int\limits_0^t i\,dt$.

Тогда

$$u_{ab}=iR+L\frac{di}{dt}+u_C(0)+\frac{1}{C}\int\limits_0^t i\,dt-e(t). \qquad (8.38)$$

К уравнению (8.38) применим преобразование Лапласа. Преобразование Лапласа является линейным, поэтому изображение суммы равно сумме изображений.

Каждое слагаемое уравнения (8.38) заменим операторным изображением: вместо $iR$ запишем $RI(p)$; вместо $u_{ab}$ — $U_{ab}(p)$;

$$L\frac{di}{dt}\doteq LpI(p)-Li(0);\ u_C(0)\doteq\frac{u_C(0)}{p};$$

$$\frac{1}{C}\int\limits_0^t i\,dt\doteq\frac{I(p)}{Cp};\ e(t)\doteq E(p).$$

В результате найдем

$$U_{ab}(p)=I(p)\left(R+pL+\frac{1}{Cp}\right)-Li(0)+\frac{u_C(0)}{p}-E(p). \qquad (8.39)$$

Смысл проведенного преобразования состоит в том, что вместо дифференциального уравнения (8.38) получили алгебраическое уравнение (8.39), связывающее изображение тока $I(p)$ с изображением ЭДС $E(p)$ и изображением напряжения $U_{ab}(p)$. Из уравнения (8.39) следует, что

$$I(p)=\frac{U_{ab}(p)+Li(0)-\dfrac{u_C(0)}{p}+E(p)}{Z(p)}, \qquad (8.40)$$

где $Z(p)=R+pL+\dfrac{1}{Cp}$ — операторное сопротивление участка цепи между точками $a$ и $b$. Структура его аналогична структуре комплекса сопротивления того же участка цепи переменному току, если $j\omega$ заменить на $p$ (ср. с § 8.13).

Как указывалось в § 8.13, комплексное число $p=a+jb$ может быть записано в виде $p=j(b-ja)=j\,\Omega$, где $\Omega=b-ja$ — комплексная частота; $Z(p)=Z(j\Omega)$ — сопротивление, оказываемое рассматриваемой цепью воздействию $\dot U e^{j\Omega t}=\dot U e^{pt}$, подобно тому как $Z(j\omega)$ есть сопротивление, оказываемое воздействию $\dot U e^{j\omega t}$. Поэтому $Z(p)$ называют *сопротивлением на комплексной частоте*.

Уравнение (8.40) может быть названо законом Ома в операторной форме для участка цепи, содержащего ЭДС. Оно записано при ненулевых начальных условиях.

Слагаемое $Li(0)$ представляет собой внутреннюю ЭДС, обусловленную запасом энергии в магнитном поле индуктивной катушки вследствие протекания через нее тока $i(0)$ непосредственно до коммутации. Слагаемое $u_C(0)/p$ представляет собой внутреннюю ЭДС, обусловленную запасом энергии в электрическом поле конденсатора вследствие наличия напряжения на нем $u_C(0)$ непосредственно до коммутации.



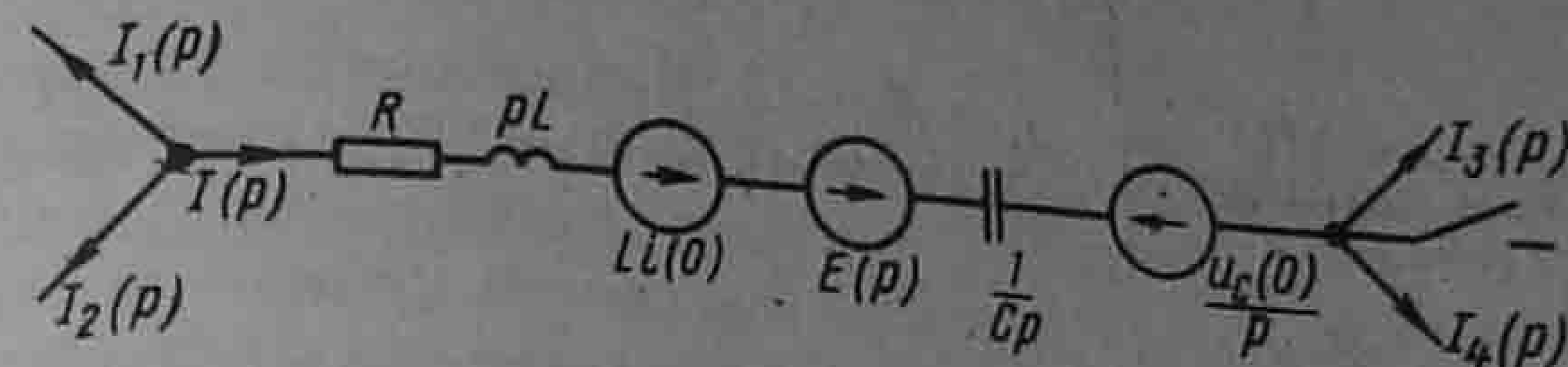



Рис. 8.27

В соответствии с формулой (8.40) на рис. 8.27 изображена операторная схема замещения участка цепи рис. 8.26. Операторные сопротивления ее $R$, $pL$, $1/(Cp)$. Как следует из формулы (8.40), внутренняя ЭДС $Li(0)$ направлена *согласно* с направлением тока $I(p)$, внутренняя ЭДС $U_C(0)/p$ — *встречно* току $I(p)$.

В частном случае, когда на участке $ab$ отсутствует ЭДС $e(t)$ и к моменту коммутации $i(0)=0$ и $u_C(0)=0$, уравнение (8.40) приобретает более простой вид:

$$I(p)=U_{ab}(p)/Z(p). \qquad (8.41)$$

Уравнение (8.41) есть математическая запись закона Ома в операторной форме для участка цепи, не содержащего источник ЭДС при нулевых начальных условиях.

**§ 8.42. Первый закон Кирхгофа в операторной форме.** По первому закону Кирхгофа, алгебраическая сумма мгновенных значений токов, сходящихся в любом узле схемы, равна нулю. Так, для узла $a$ схемы рис. 8.26

$$i_1+i+i_2=0. \qquad (8.42)$$

Применим преобразование Лапласа к уравнению (8.42) и воспользуемся тем, что изображение суммы равно сумме изображений:

$$I_1(p)+I(p)+I_2(p)=0.$$

В общем случае

$$\sum I(p)=0. \qquad (8.43)$$

Уравнение (8.43) выражает собой первый закон Кирхгофа в операторной форме.

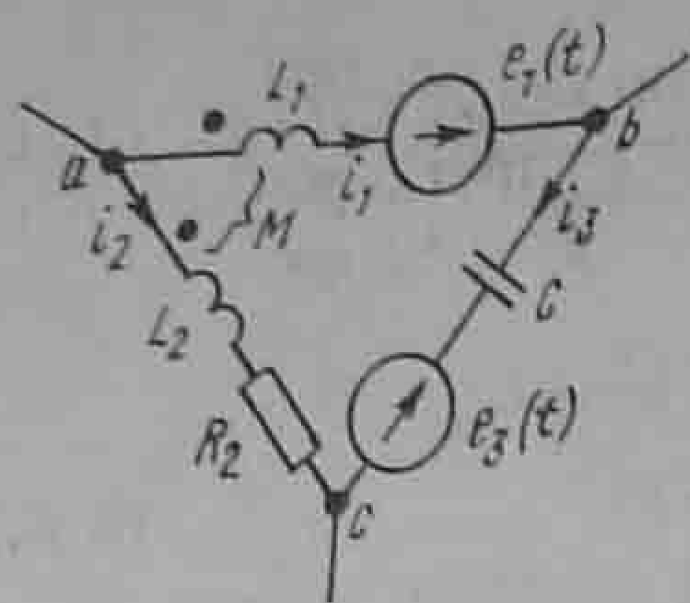


Рис. 8.28

**§ 8.43. Второй закон Кирхгофа в операторной форме.** Для любого замкнутого контура любой электрической цепи можно составить уравнение по второму закону Кирхгофа для мгновенных значений. Предварительно необходимо выбрать положительные направления для токов в ветвях и направление обхода контура.

Запишем уравнение по второму закону Кирхгофа для контура рис. 8.28. Контур обходим по часовой стрелке. Учтем, что индуктивности $L_1$ и $L_2$ связаны магнитно. При выбранных положительных направлениях для токов $i_1$ и $i_2$ между $L_1$ и $L_2$ имеет место согласное включение.

Падение напряжения на $L_1$ равно $L_1\frac{di_1}{dt}+M\frac{di_2}{dt}$; на $L_2$ составляет $L_2\frac{di_2}{dt}+M\frac{di_1}{dt}$. При составлении уравнения учтем, что начальное напряжение на конденсаторе равно $u_C(0)$. Пусть оно действует согласно с током $i_3$. Начальное значение $i_1=i_1(0)$, тока $i_2=i_2(0)$. Имеем

$$L_1\frac{di_1}{dt}+M\frac{di_2}{dt}+u_C(0)+\frac{1}{C}\int_0^t i_3 dt-i_2R_2-$$

$$-L_2\frac{di_2}{dt}-M\frac{di_1}{dt}=e_1(t)-e_3(t). \tag{8.44}$$

Каждое из слагаемых (8.44) заменим операторным изображением:

$$L_1\frac{di_1}{dt}\doteq L_1pI_1(p)-L_1i_1(0);$$

$$M\frac{di_2}{dt}\doteq MpI_2(p)-Mi_2(0);$$

$$\frac{1}{C}\int_0^t i_3dt\doteq\frac{I_3(p)}{Cp};$$

$$i_2R_2\doteq R_2I_2(p); \tag{8.45}$$

$$L_2\frac{di_2}{dt}\doteq L_2pI_2(p)-L_2i_2(0);$$

$$M\frac{di_1}{dt}\doteq MpI_1(p)-Mi_1(0);$$

$$e_1(t)\doteq E_1(p);\ e_3(t)\doteq E_3(p).$$



Подставив (8.45) в (8.44), объединим слагаемые с $I_1(p)$, $I_2(p)$, $I_3(p)$, перенесем в правую часть $u_C(0)/p$, $L_1i_1(0)$ и другие внутренние ЭДС. В результате получим

$$I_1(p)Z_1(p)+I_2(p)Z_2(p)+I_3(p)Z_3(p)=$$
$$=E_1(p)-E_3(p)+E_{вн}(p), \tag{8.46}$$

где $Z_1(p)=p(L_1-M)$; $Z_2(p)=p(M-L_2)-R_2$; $Z_3(p)=1/(Cp)$;

$$E_{вн}(p)=(L_1-M)i_1(0)+(M-L_2)i_2(0)-u_C(0)/p.$$

В более общем виде уравнение (8.46) можно записать так:

$$\sum I_k(p)\,Z_k(p)=\sum E_k(p). \tag{8.47}$$

Уравнение (8.47) представляет собой математическую запись второго закона Кирхгофа в операторной форме. В состав $E_k(p)$ в общем случае входят и внутренние ЭДС.

**§ 8.44. Составление уравнений для изображений путем использования методов, рассмотренных в третьей главе.** Из уравнений, составленных по законам Кирхгофа для мгновенных значений, вытекают соответствующие уравнения для изображения.

Уравнения для изображений по форме аналогичны уравнениям, составленным для той же цепи с помощью символического метода для комплексов токов и напряжений.

Но если каждому уравнению для комплексов отвечает соответствующее уравнение для изображений, то все основанные на законах Кирхгофа приемы и методы составления уравнений (методы эквивалентного генератора, контурных токов, узловых потенциалов, наложения и т. п.) можно применить и при составлении уравнений для изображений.

При составлении уравнений для изображений ненулевые начальные условия учитывают путем введения "внутренних" ЭДС, обусловленных начальными токами через индуктивные элементы и начальными напряжениями на конденсаторах.

**§ 8.45. Последовательность расчета операторным методом.** Расчет операторным методом состоит из двух основных этапов: 1) составления изображения искомой функции времени; 2) перехода от изображения к функции времени.

На нескольких примерах покажем, как производится первый этап. Второй этап будет рассмотрен в § 8.47.

**Пример 88.** В схеме рис. 8.29 при нулевых начальных условиях замыкают ключ. Составить операторные изображения токов $i_1$ и $i_3$, пользуясь методом контурных токов.

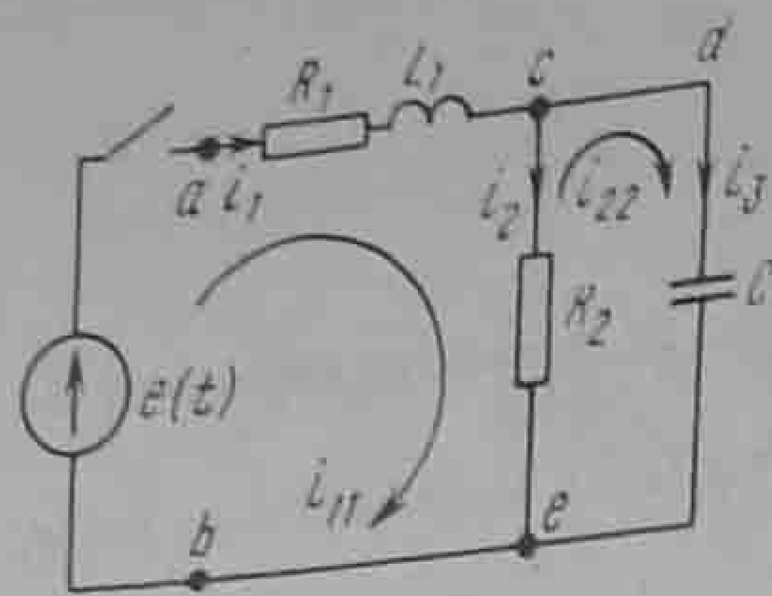



Рис. 8.29

Решение. Направления контурных токов $i_{11}$ и $i_{22}$ показаны на схеме. Имеем:

$$i_{11}R_1 + L_1\frac{di_{11}}{dt} + R_2(i_{11} - i_{22}) = e(t),$$

$$\frac{1}{C}\int i_{22}dt + R_2(i_{22} - i_{11}) = 0.$$

Переходим к изображениям:

$$I_{11}(p)(pL_1 + R_1 + R_2) - I_{22}(p)R_2 = E(p),$$

$$-I_{11}(p)R_2 + I_{22}(p)(R_2 + \frac{1}{pC}) = 0.$$

Совместное решение двух уравнений с двумя неизвестными дает:

$$I_{11}(p) = \frac{E(p)(1 + R_2Cp)}{p^2R_2L_1C + p(R_1R_2C + L_1) + R_1 + R_2}; \tag{8.48}$$

$$I_{22}(p) = \frac{E(p)R_2Cp}{p^2R_2L_1C + p(R_1R_2C + L_1) + R_1 + R_2}. \tag{8.49}$$

Изображение контурного тока $I_{11}(p)$ равно изображению тока $I_1(p)$, изображение $I_{22}(p)$ — изображению $I_3(p)$. В (8.48) и (8.49) $E(p)$ есть изображение ЭДС $e(t)$. Если $e(t) = E$, то $E(p) = E/p$, если $e(t) = E_m\sin(\omega t + \varphi)$, то $E(p) = \dot{E}_m\frac{1}{p - j\omega}$ и т. д.

**Пример 89.** Составить операторные изображения токов $i_1$ и $i_3$ схемы рис. 8.29, пользуясь законами Ома и Кирхгофа.

Решение. Так как в схеме нулевые начальные условия и нет магнитно-связанных индуктивных катушек, то составить уравнение можно проще, чем по методу контурных токов.

Изображение тока

$$I_1(p) = E(p)/Z_{вх}(p),$$

где $Z_{вх}(p)$ — входное сопротивление схемы в операторной форме относительно зажимов $ab$. Его определяют так же, как входное сопротивление для переменного тока, только $j\omega$ заменяют на $p$.

Входное операторное сопротивление

$$Z_{вх}(p) = R_1 + pL_1 + \frac{R_2\frac{1}{Cp}}{R_2 + \frac{1}{Cp}} = \frac{p^2L_1CR_2 + p(L_1 + R_1R_2C) + R_1 + R_2}{1 + R_2Cp}.$$

Следовательно,

$$I_1(p) = \frac{E(p)}{Z_{вх}(p)} = \frac{E(p)(1 + R_2Cp)}{p^2L_1CR_2 + p(L_1 + R_1R_2C) + R_1 + R_2}; \tag{8.48a}$$

уравнение (8.48а) совпадает с уравнением (8.48).

Найдем изображение $I_3(p)$. С этой целью выразим $I_3(p)$ через $I_1(p)$ и операторные сопротивления второй и третьей ветвей. Воспользуемся аналогией с переменным током. Для переменного тока

$$\dot{I}_3 = \dot{I}_1\frac{R_2}{R_2 + 1/(j\omega C)}.$$



Следовательно,

$$I_3(p) = I_1(p)\frac{R_2}{R_2 + 1/(Cp)}.$$

Если в последнее выражение подставить $I_1(p)$ из уравнения (8.48а), то будет получено уравнение (8.49).

Таким образом, безразлично, каким способом составлять изображение токов: результат будет одинаков.

**Пример 90.** Для схемы рис. 8.29 составить изображение напряжения на зажимах $ce$, если считать, что начальные условия нулевые (как в примере 89).

Решение. Изображение напряжения на зажимах $ce$ равно произведению изображения тока $I_3(p)$ на операторное сопротивление конденсатора:

$$U_{ce}(p) = I_3(p)\frac{1}{Cp} = \frac{E(p)R_2}{p^2R_2L_1C + p(R_1R_2C + L_1) + R_1 + R_2}. \tag{8.50}$$

**§ 8.46. Изображение функции времени в виде отношения $N(p)/M(p)$ двух полиномов по степеням $p$.** Для тока $I_{11}(p)$ в примере 89, если принять $E(p) = E/p$, то

$$N(p) = E(1 + R_2Cp);$$

$$M(p) = [p^2R_2L_1C + p(R_1R_2C + L_1) + R_1 + R_2]p.$$

Если в том же примере принять $e(t) = E_m\sin(\omega t + \psi)$, то

$$E(p) = \dot{E}_m\frac{1}{p - j\omega} \text{ и}$$

$$N(p) = \dot{E}_m(1 + R_2Cp);$$

$$M(p) = (p - j\omega)[p^2R_2L_1C + p(R_1R_2C + L_1) + R_1 + R_2].$$

Обозначим высшую степень оператора $p$ в полиноме $N(p)$ через $n$, а высшую степень $p$ в полиноме $M(p)$ — через $m$.

Часть корней уравнения $M(p) = 0$ обусловлена характером изменения во времени возмущающей силы, воздействующей на систему; остальные корни обусловлены свойствами самой цепи, ее конфигурацией и значениями параметров.

Если исключить из рассмотрения сверхпроводящие электрические цепи, то во всех физически осуществимых электрических цепях при воздействии любых ЭДС всегда $n < m$. Лишь для физически неосуществимых электрических цепей степень $n$ может оказаться равной $m$. Пример цепи, для которой степень $n$ равна степени $m$, дан на рис. 8.30. Если считать, что сопротивление проводов и внутреннее сопротивление источника нулевые, то

$$I(p) = \frac{E/p}{1/(Cp)} = \frac{ECp}{p}.$$

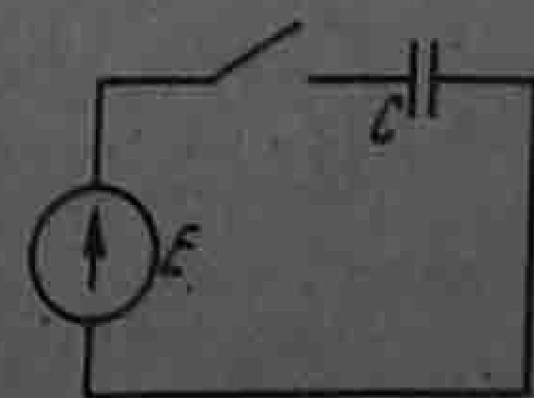



Рис. 8.30

**§ 8.47. Переход от изображения к функции времени.** В § 8.45 указывалось, что вторым этапом расчета переходных процессов с помощью операторного метода является переход от изображения к функции времени. Эту операцию можно осуществить различными путями.

Первый путь состоит в применении формул соответствия между функциями оператора $p$ и функциями времени $t$. Часть формул соответствия приведена в § 8.39. В научной литературе имеются специальные исследования, содержащие большое число формул соответствия (1518), охватывающих все возможные практические задачи. Формулами соответствия рекомендуется пользоваться в том случае, когда среди корней уравнения $M(p) = 0$ есть несколько одинаковых (кратные корни).

Второй путь состоит в применении так называемой формулы разложения. Формула разложения в § 8.49 выведена, исходя из предложения, что уравнение $M(p) = 0$ не имеет кратных корней (при наличии кратных корней формула разложения записывается иначе — см. § 8.50).

Третий путь — непосредственное применение формулы обратного преобразования Лапласа с использованием теории вычетов (см. § 8.50).

Формулой разложения широко пользуются на практике, и ее принято рассматривать как основную формулу для перехода от изображения к функции времени.

Рассмотрим два примера на применение формул соответствия, а затем — после рассмотрения вопроса о разложении сложной дроби на простые — перейдем к выводу формулы разложения.

**Пример 91.** В схеме рис. 8.31, *а* ток источника тока линейно нарастает во време-
ни: $j(t) = 2{,}5t$ А (рис. 8.31, *б*); $R = 40$ кОм, $C = 2$ мкФ. Определить закон изменения
во времени тока $i_1$ через резистор $R$.

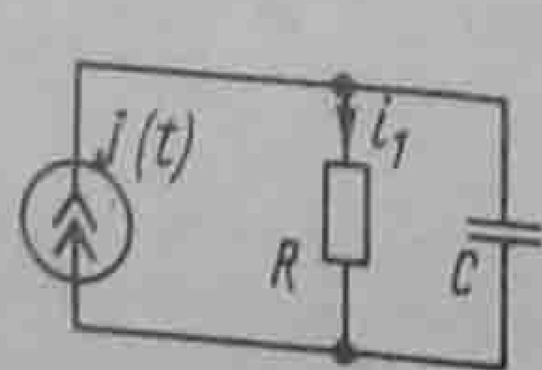
Р е ш е н и е. Изображение тока $j(t)$ равно $2{,}5/p^2$ (см. соотношение 12 § 8.39). Сопротивление параллельно соединенных $R$, $C$

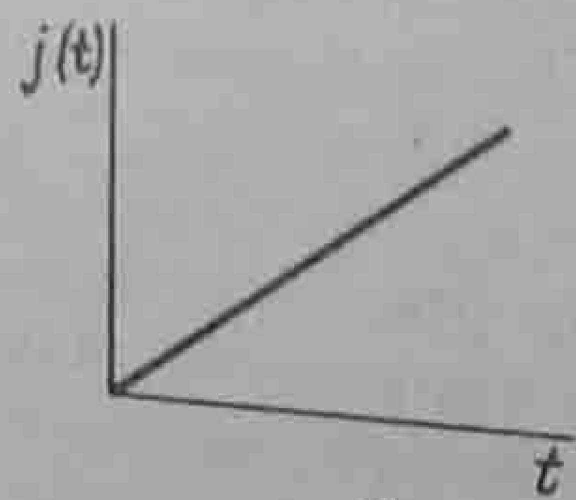
$$Z(p) = \frac{R}{RCp + 1}.$$

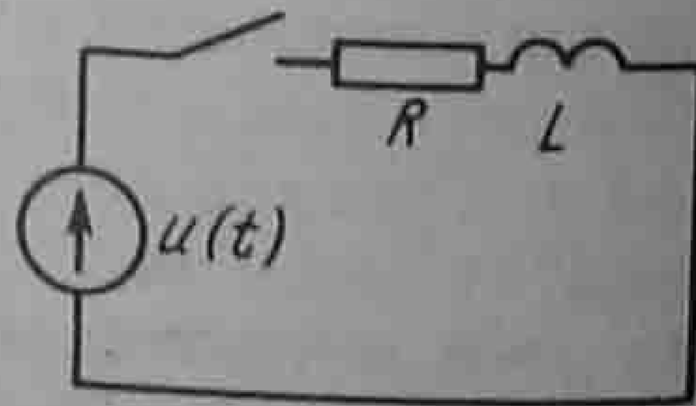
Изображение тока через $R$

$$I_1(p) = \frac{j(p)Z(p)}{R} = \frac{2{,}5}{RC}\frac{1}{p^2(p + a)},$$

где $a = 1/(RC) = 12{,}5$ с$^{-1}$.




а) б) в)

Рис. 8.31



Согласно соотношению 8 § 8.39,

$$\frac{1}{p^2(p + a)} \doteq \frac{t}{a} - \frac{1}{a^2}(1 - e^{-at}),$$

$$i_1(t) = 2{,}5[t - 0{,}08(1 - e^{-12{,}5t})]\ \text{А}.$$

**Пример 92.** В схеме рис. 8.31, *в* $u(t) = 100e^{-at}$ В, где $a = 0{,}5$с$^{-1}$; $R = 2$ Ом; $L =$
$= 4$ Гн. Найти $i = f(t)$ и $u_L = f(t)$, а также значения $i$ и $u_L$ при $t = 1$ с.

Р е ш е н и е. Согласно соотношению 2 § 8.39, функции $e^{-at}$ соответствует изо-
бражение $1/(p + a)$. Следовательно,

$$U(p) = \frac{100}{p + a};\quad Z(p) = R + pL;$$

$$I(p) = \frac{U(p)}{Z(p)} = \frac{100}{(p + a)(pL + R)} = \frac{100 \cdot 1}{L(p + a)(p + b)};$$

$$\frac{100}{L} = 25\ \text{А/с};\ b = R/L = 0{,}5 = a;\ I(p) = 25\frac{1}{(p + a)^2}.$$

По соотношению 5 § 8.39 $\dfrac{1}{(p + a)^2} \doteq e^{-at}$. Поэтому $i(t) = 25te^{-0{,}5t}$.

Напряжение на $L$:

$$u_L = L\frac{di}{dt} = 100e^{-0{,}5t}(1 - 0{,}5t).$$

При $t = 1$ с $i = 25 \cdot 1e^{-0{,}5} = 15{,}15$ А; $u_L = 100e^{-0{,}5}(1 - 0{,}5) = 30{,}3$ В.

**§ 8.48. Разложение сложной дроби на простые.** Из курса математики известно, что дробь

$$\frac{N(x)}{M(x)} = \frac{a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0}{b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1x + b_0} \quad (8.51)$$

при условии, что $n < m$ и полином $M(x) = 0$ не имеет кратных корней, может быть представлена в виде суммы простых дробей:

$$\frac{N(x)}{M(x)} = A_1\frac{1}{x - x_1} + A_2\frac{1}{x - x_2} + \ldots + A_m\frac{1}{x - x_m}, \quad (8.52)$$

или

$$\frac{N(x)}{M(x)} = \sum_{k=1}^{m} A_k\frac{1}{x - x_k},$$

где $x_k$ — корни уравнения $M(x) = 0$.

Для определения коэффициента $A_1$ умножим обе части уравнения (8.52) на $(x - x_1)$. В результате получим

$$\frac{N(x)}{M(x)}(x - x_1) = A_1 + (x - x_1)\sum_{k=2}^{k=m} A_k\frac{1}{x - x_k}. \quad (8.53)$$

Рассмотрим выражение (8.53) при $x \to x_1$. Правая часть уравнения равна $A_1$, а левая представляет собой неопределенность, так как множитель $(x - x_1)$ при $x \to x_1$ равен нулю и знаменатель $M(x)$ при $x = x_1$ также равен нулю [$x_1$ есть корень уравнения $M(x) = 0$].

Раскроем неопределенность по правилу Лопиталя. С этой целью производную от числителя разделим на производную от знаменателя и найдем предел дроби:

$$\lim_{x \to x_1} \frac{(x - x_1)N(x)}{M(x)} = \lim_{x \to x_1} \frac{N(x) + (x - x_1)N'(x)}{M'(x)} = \frac{N(x_1)}{M'(x_1)},$$

где $M'(x)$—производная от $M(x)$ по $x$ $M'(x)$— значение $M'(x)$ при $x = x_1$; $N(x_1)$ — значение $N(x)$ при $x = x_1$.

Следовательно, из (8.53) при $x \to x_1$ получаем уравнение

$$N(x_1)/M'(x_1) = A_1, \tag{8.54}$$

или

$$A_1 = N(x_1)/M'(x_1). \tag{8.55}$$

Аналогично,

$$A_k = N(x_k)/M'(x_k). \tag{8.56}$$

Таким образом,

$$\frac{N(x)}{M(x)} = \frac{N(x_1)}{M'(x_1)}\frac{1}{x - x_1} + \frac{N(x_2)}{M'(x_2)}\frac{1}{x - x_2} + \ldots + \frac{N(x_m)}{M'(x_m)}\frac{1}{x - x_m}, \tag{8.57}$$

или

$$\frac{N(x)}{M(x)} = \sum_{k=1}^{k=m} \frac{N(x_k)}{M'(x_k)}\frac{1}{x - x_k}. \tag{8.58}$$

**Пример 93.** Найти коэффициенты разложения дроби $1/(x^2 + 5x + 6)$.

Решение. Корни уравнения $M(x) = 0$: $x_1 = -2$, $x_2 = -3$; $M'(x) = 2x + 5$; $M'(x_1) = -2 \cdot 2 + 5 = +1$; $M'(x_2) = -1$; $N(x_1) = N(x_2) = 1$. По формуле (8.56),

$$A_1 = N(x_1)/M'(x_1) = 1/(+1) = +1;$$

$$A_2 = N(x_2)/M'(x_2) = -1.$$

**§ 8.49. Формула разложения.** Переход от изображения $N(p)/M(p)$ к функции времени часто производят с помощью формулы

$$\frac{N(p)}{M(p)} = \sum_{k=1}^{m} \frac{N(p_k)}{M'(p_k)} e^{p_k t}, \tag{8.59}$$

которую называют *формулой разложения*.



Левая часть формулы является функцией $p$, правая часть — соответствующей ей функцией времени $t$.

Вывод формулы можно осуществить следующим образом. Пусть изображение какой-либо функции времени, например тока, $I(p) = N(p)/M(p)$.

Для получения тока как функции времени $i(t)$ представим сначала $N(p)/M(p)$ в виде суммы простых дробей — разложим $N(p)/M(p)$. С этой целью в формуле (8.58) заменим $x$ на $p$:

$$I(p) = \frac{N(p)}{M(p)} = \sum_{k=1}^{m} \frac{N(p_k)}{M'(p_k)}\frac{1}{p - p_k}. \tag{8.60}$$

Перейдем от изображения к оригиналу. Оригиналом левой части является $i(t)$. Оригинал правой части равен сумме оригиналов ее слагаемых.

Учтем, что множители $N(p_k)/M'(p_k)$ у слагаемых суммы правой части (8.60) есть постоянные числа (не функции $p$!). Кроме того, функциями $p$ в правой части являются только множители $1/(p - p_k)$; им соответствуют функции времени вида $e^{p_k t}$ [см. формулу (8.28)]. Поэтому

$$i(t) = \sum_{k=1}^{m} \frac{N(p_k)}{M'(p_k)} e^{p_k t}. \tag{8.61}$$

Переход от изображения (функции $p$) к оригиналу (функции $t$) с помощью формулы разложения (8.61) основан на том, что изображение представлено в виде суммы простых дробей $\frac{N(p_k)}{M'(p_k)}\frac{1}{p - p_k}$, а оригиналами их являются показательные функции $\frac{N(p_k)}{M'(p_k)} e^{p_k t}$.

Число слагаемых $\frac{N(p_k)}{M'(p_k)} e^{p_k t}$ равно числу корней уравнения $M(p) = 0$. Коэффициенты $N(p_k)/M'(p_k)$ можно сопоставить с постоянными интегрирования дифференциального уравнения (уравнений) цепи в классическом методе расчета.

Если среди корней уравнения $M(p) = 0$ есть нулевой корень ($p = 0$), то ему в правой части уравнения (8.61) соответствует слагаемое $\frac{N(0)}{M'(0)} e^{0t} = \frac{N(0)}{M'(0)}$. Слагаемое $N(0)/M'(0)$ представляет собой составляющую искомого тока (напряжения), обусловленную постоянными вынуждающими силами. Если постоянных вынуждающих сил в схеме нет, то $N(0)/M'(0) = 0$.

Важно сделать некоторые замечания к формуле (8.61).

1. Формула разложения применима при любых начальных условиях и при любых практически встречающихся формах напряжения источника ЭДС или тока, воздействующего на схему.

2. Если начальные условия не нулевые, то в состав $N(p)$ войдут внутренние ЭДС.

3. Если уравнение $M(p) = 0$ имеет комплексно-сопряженные корни, то слагаемые, соответствующие им в формуле (8.61), оказываются также комплексно-сопряженными и в сумме дают действительное слагаемое.

4. Если воздействующая на схему ЭДС синусоидальна: $E_m \sin(\omega t + \psi)$ и изображение ЭДС взято в виде $E_m \frac{1}{p - j\omega}$, где комплексная амплитуда $\dot{E}_m = E_m e^{j\psi}$, то при использовании формулы разложения из правой части ее для перехода от комплекса к мгновенному значению следует взять коэффициент при $j$ (взять мнимую часть)[1]. В соответствии с этим внутренние ЭДС, которые появляются в правой части формулы разложения при ненулевых начальных условиях в цепях с синусоидальной ЭДС должны быть умножены на коэффициент $j$.

Умножить внутренние ЭДС на $j$ необходимо потому, что только в этом случае наличие этих ЭДС будет учтено при взятии мнимой части от правой части формулы разложения. В цепях с постоянной ЭДС внутренние ЭДС умножать на $j$ не нужно.

5. Если воздействующее на схему напряжение синусоидально, то принужденная составляющая решения входит в число слагаемых $\sum \frac{N(p_k)}{M'(p_k)} e^{p_k t}$ и определяется корнем $p = j\omega$. Вычисление принужденной составляющей в виде члена этой суммы, соответствующего корню $p = j\omega$, для сложных схем в большинстве случаев более громоздко, чем непосредственное вычисление ее с помощью символического метода. Поэтому для сложных схем переменного тока принужденную составляющую рекомендуется вычислять символическим методом.

С помощью формулы, подобной формуле (8.61), можно определять не только токи и напряжения, но и многие другие функции времени: заряд конденсатора, скорость перемещения какого-либо тела механической системы и т. п.

**Пример 94.** Определить ток $i_1(t)$ в схеме рис. 8.17 с помощью формулы разложения и сравнить с результатом решения классическим методом (см. пример 80), если $E = 150$ В; $R = R_1' = R_3 = 50$ Ом; $C = 100$ мкФ; $u_C(0) = 50$ В.

Р е ш е н и е. Составим послекоммутационную операторную схему (рис. 8.32), имея в виду, что начальные условия ненулевые. Внутренняя ЭДС $u_C(0)/p$ позволяет учесть, что до коммутации конденсатор был заряжен до напряжения $u_C(0)$ током $i_2$, поэтому она направлена встречно току $I_2(p)$. Узел $0$ схемы заземлим. Потенциал узла $1$ обозначим $\varphi_1(p)$ и определим его по методу узловых потенциалов:

[1] Мнимую, а не действительную часть из формулы разложения берут потому, что заданная ЭДС $E_m \sin(\omega t + \psi)$ есть мнимая часть комплекса $E_m e^{j\omega t}$ (см. гл. 3).



$$\varphi_1(p) = \frac{\frac{E}{p}\frac{1}{R_1} + \frac{u_C(0)}{p} Cp}{\frac{1}{R_1} + Cp + \frac{1}{R_3}}.$$

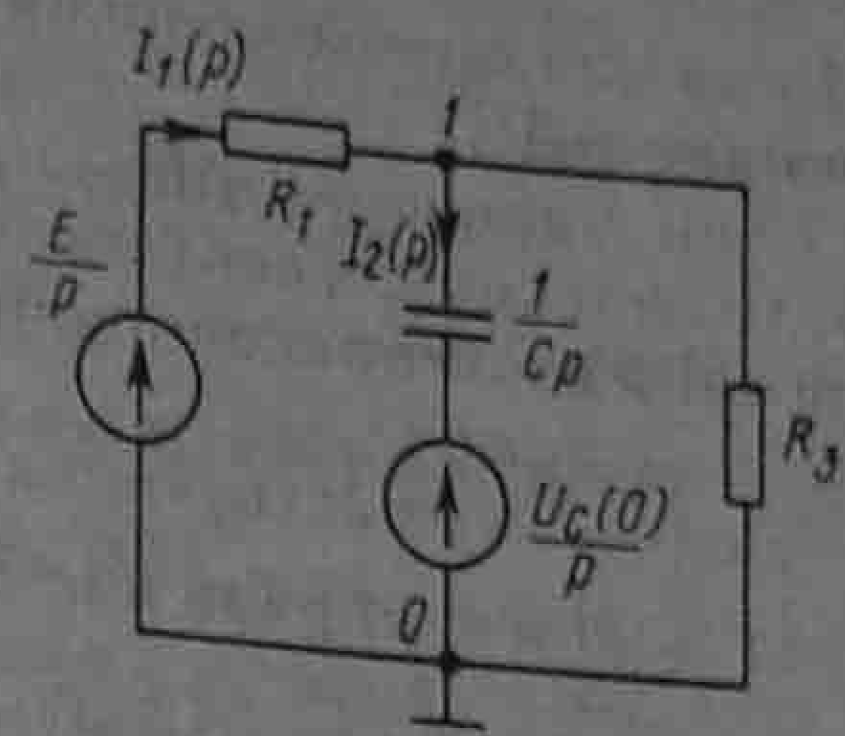



Рис. 8.32

По закону Ома для участка цепи с ЭДС,

$$I_1(p) = \frac{0 - \varphi_1(p) + E/p}{R_1}.$$

После преобразований

$$I_1(p) = \frac{[E - u_C(0)]R_3Cp + E}{p(R_1R_3Cp + R_1 + R_3)} = \frac{N(p)}{M(p)}.$$

Уравнение $M(p) = 0$ имеет корни

$$p_1 = 0 \text{ и } p_2 = -\frac{R_1 + R_3}{R_1R_3C} = -400\ \text{с}^{-1},$$

поэтому

$$N(p_1) = E = 150;$$

$$N(p_2) = (150 - 50) \cdot 50 \cdot 100(-400) \cdot 10^{-6} + 150 = -50;$$

$$M'(p) = 2R_1R_3Cp + R_1 + R_3;$$

$$M'(p_1) = 100;\ M'(p_2) = -100.$$

Ток в схеме рис. 8.18

$$i_1(t) = \frac{150}{100} + \frac{(-50)e^{-400t}}{(-100)} = 1{,}5 + 0{,}5e^{-400t}\ \text{А},$$

что совпадает с результатом примера 80.

**Пример 95.** Найти $i(t)$ в схеме рис. 8.19 путем применения формулы разложения и сравнить рузультат с результатом решения той же задачи классическим методом (см. пример 81).

Р е ш е н и е. Изображение синусоидальной ЭДС 127 sin $(314t - 50°)$ $E(p) = \dot{E}_m \frac{1}{p - j\omega}$, где $\dot{E}_m = 127e^{-j50°}$ В.

В схеме ненулевые начальные условия:

$$I(p)\,(R_{22} + pL) = E(p) + Li(0)\ i(0_-) = -25{,}35\ \text{А}.$$

Так как действующая в схеме ЭДС синусоидальна и изображение ее взято в виде $\dot{E}_m \frac{1}{p - j\omega}$ ($\dot{E}_m$ — комплексная амплитуда), то в дальнейшем от правой части формулы разложения следует взять коэффициент при мнимой части (см. п. 4 § 8.49), поэтому умножим внутреннюю ЭДС $Li(0)$ на $j$.

После небольших преобразований найдем

$$I(p) = \frac{\dot{E}_m + jLi(0)(p - j\omega)}{(p - j\omega)(R_2 + pL)} = \frac{N(p)}{M(p)}.$$

Следовательно,

$$N(p)=E_m+jLi(0)(p-j\omega); \quad M(p)=(p-j\omega)(R_2+pL).$$

Уравнение $M(p)=0$ имеет корни $p_1=j\omega\,\text{c}^{-1}$ и $p_2=-R_2/L=-210\,\text{c}^{-1}$, поэтому

$$M'(p)=R_2+pL(p-j\omega);\ M'(p_1)=2+3j=3{,}61\text{e}^{j56°20'};$$

$$M'(p_2)=-3{,}61\text{e}^{j56°20'}=3{,}61\text{e}^{-j123°40'};\ N(p_1)=127\text{e}^{-j50°};$$

$$N(p_2)=127\text{e}^{-j50°}+j(-210-j314)\frac{3}{314}(-25{,}35)=5{,}4-j46{,}4=47{,}1\text{e}^{-j83°24'}.$$

Ток

$$i(t)=\text{Im}\left[\frac{127\text{e}^{j(\omega t-50°)}}{3{,}61\text{e}^{j56°20'}}+\frac{47{,}1\text{e}^{-j83°24'}}{3{,}61\text{e}^{-j123°40'}}\text{e}^{-200t}\right]=$$

$$=35{,}2\sin(\omega t-106°20')+13{,}1\sin 40°16'\text{e}^{-210t}\ \text{A};$$

$$13{,}1\sin 40°16'=8{,}45.$$

Результат совпадает с результатом примера 81.

**§ 8.50. Дополнения к операторному методу.** 1. Для перехода от изображения $F(p)$ к функции времени $f(t)$ может быть использовано *обратное преобразование Лапласа*:

$$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\nu-j\infty}^{\nu+j\infty}F(p)\text{e}^{pt}\text{d}p. \qquad \text{(a)}$$

Функция $F(p)$ аналитична в области $\text{Re}\,p>\nu$ и стремится к нулю при $|p|\to\infty$. При практическом использовании этой формулы интеграл по бесконечной прямой, параллельной оси ординат, заменяют контурным интегралом, охватывающим все полюсы функции $F(p)$:

$$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\oint F(p)\text{e}^{pt}\text{d}p. \qquad \text{(б)}$$

*Полюсами* называют значения $p$, при которых $F(p)$ обращается в бесконечность. В том случае, когда $F(p)=N(p)/M(p)$, полюсами являются корни уравнения $M(p)=0$. В теории функций комплексного переменного доказывается, что правая часть формулы (б) равна сумме вычетов (Res) подынтегральной функции во всех ее полюсах, т. е.

$$\frac{1}{2\pi j}\oint F(p)\text{e}^{pt}\text{d}p=\sum\text{Res}F(p)\text{e}^{pt}.$$

*Вычетом функции* в некотором полюсе называют величину, на которую уменьшается разделенный на $2\pi j$ контурный интеграл от этой функции, когда контур при его стягивании пересечет этот полюс. Но вычет функции $\frac{N(p)}{M(p)}\text{e}^{pt}$ в простом полюсе $p_k$ равен $\frac{N(p_k)}{M'(p_k)}\text{e}^{p_kt}$.



Поэтому

$$f(t)=\sum_{k=1}^{m}\frac{N(p_k)}{M'(p_k)}\text{e}^{p_kt}.$$

Таким образом, используя обратное преобразование Лапласа, вывели формулу разложения (8.61).

2. Запишем формулу разложения при наличии кратных корней. Положим, что уравнение $M(p)=0$ имеет $q$ простых корней ($p_1, p_2, \ldots, p_q$), корень $p_r$ кратности $r$ и корень $p_s$ кратности $s$. Тогда

$$\frac{N(p)}{M(p)}\doteq\sum_{k=1}^{q}\frac{N(p_k)}{M'(p_k)}\text{e}^{p_kt}+\frac{1}{(r-1)!}\frac{\text{d}^{r-1}}{\text{d}p^{r-1}}\cdot\left[\frac{N(p)(p-p_r)^r\text{e}^{pt}}{M(p)}\right]_{p=p_r}+\frac{1}{(s-1)!}\frac{\text{d}^{s-1}}{\text{d}p^{s-1}}\times$$

$$\times\left[\frac{N(p)(p-p_s)^s\text{e}^{pt}}{M(p)}\right]_{p=p_s}.$$

**Пример 96.** Найти оригинал $\frac{N(p)}{M(p)}=\frac{1}{p^2(p+a)}$.

Р е ш е н и е. Корню $p=-a$ соответствует оригинал $\frac{N(p)}{M'(p)_{p=-a}}\text{e}^{pt}=\frac{1}{a^2}\text{e}^{-at}$, корню $p=0$ второй кратности — оригинал

$$\frac{\text{d}}{\text{d}p}\left[\frac{p^2\text{e}^{pt}}{p^2(p+a)}\right]_{p=0}=\frac{\text{d}}{\text{d}p}\left(\frac{\text{e}^{pt}}{p+a}\right)_{p=0}=$$

$$=\left(\frac{t\text{e}^{pt}(p+a)-\text{e}^{pt}}{(p+a)^2}\right)_{p=0}=\frac{t}{a}-\frac{1}{a^2}.$$

Следовательно, $\frac{1}{p^2(p+a)}\doteq\frac{\text{e}^{-at}}{a^2}+\frac{t}{a}-\frac{1}{a^2}$.

**§ 8.51. Переходная проводимость.** В § 2.15 указывалось, что ток $i$ любой ветви схемы может быть представлен в виде произведения напряжения $U$ на входе схемы на собственную или взаимную проводимость $g$: $i=Ug$.

При переходных процессах это соотношение также имеет силу. Если на вход какой-либо цепи в момент $t=0$ включается постоянное напряжение $U$ (ЭДС $E$), то ток $i(t)$ в любой ветви этой схемы равен произведению постоянного напряжения $U$ на проводимость $g(t)$:

$$i(t)=Ug(t). \qquad (8.62)$$

При переходном процессе проводимость является функцией времени, поэтому в скобках указывается время $t$; $g(t)$ называют

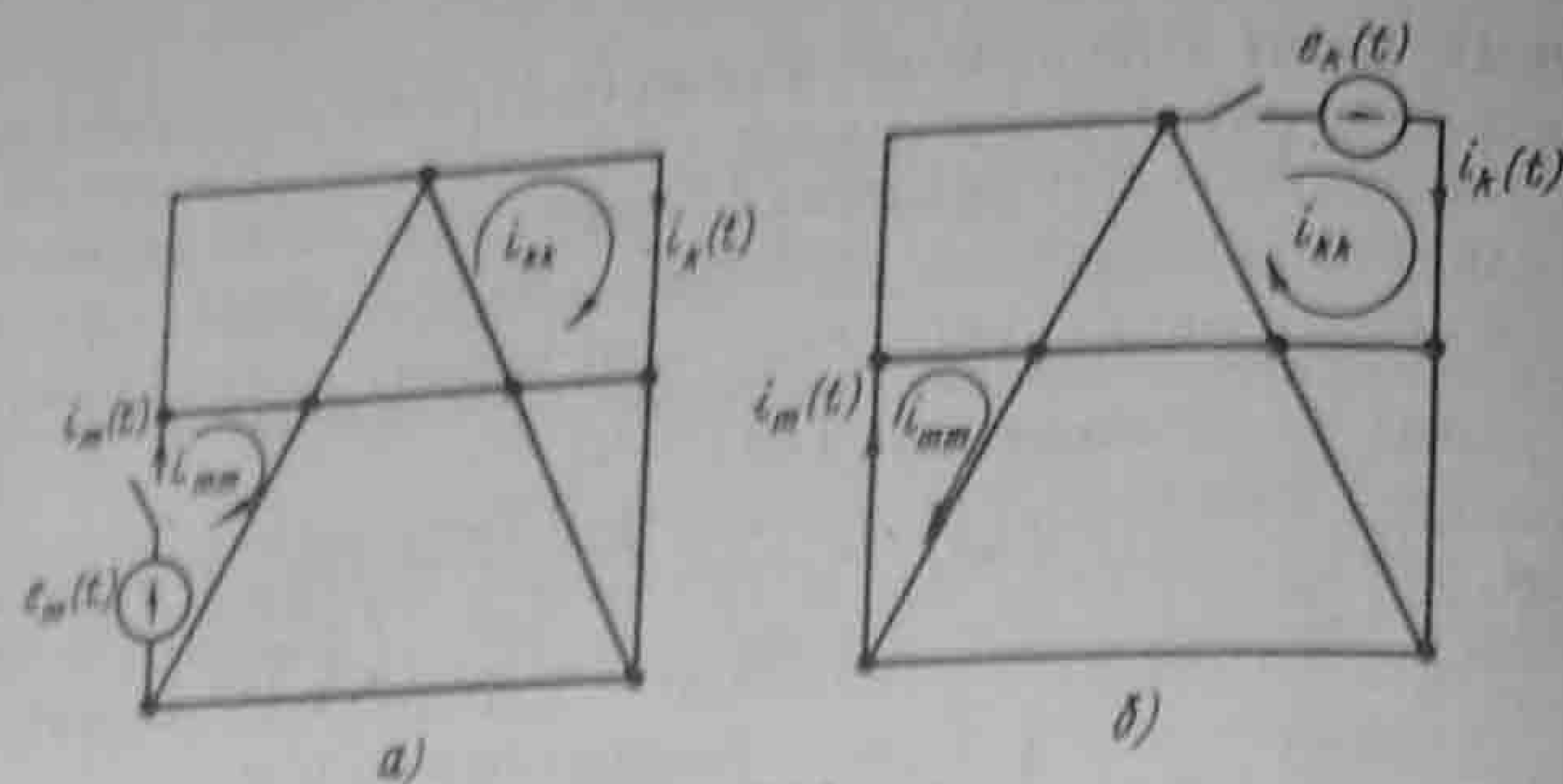



Рис. 8.33

*переходной проводимостью.* Она измеряется в тех же единицах (См), что и обычная проводимость.

Если в формуле (8.62) принять $U = 1$ В, то $i(t) = g(t)$, т. е. переходная проводимость какой-либо ветви схемы численно равна току $i(t)$ в этой ветви при подключении цепи к источнику постоянного напряжения в 1 В. Индексы у $g(t)$ указывают на то, какую именно переходную проводимость имеют в виду. Если индексы одинаковы, то имеют в виду собственную переходную проводимость ветви, номер которой соответствует цифре, указанной в индексе; если индексы разные, то — проводимость между теми ветвями, номера которых указаны в индексе. Например, если источник постоянного напряжения $U$ при нулевых начальных условиях включают в первую ветвь, то ток первой ветви $i_1(t) = Ug_{11}(t)$, а ток третьей ветви $i_3(t) = Ug_{31}(t)$.

Переходную проводимость можно определить расчетным либо опытным путем. При расчете $g_{kk}(t)$ классическим или операторным методом ток $k$-ветви находят при включении источника постоянного напряжения в $k$-ветвь; $g_{km}(t)$ ток $k$-ветви вычисляют при включении источника постоянного напряжения $U$ в $m$-ветвь. Далее, в полученных формулах полагают $U = 1$ В. При опытном определении переходной проводимости ток $i(t)$ соответствующей ветви находят путем осциллографирования.

В § 2.16 было доказано, что $g_{km} = g_{mk}$. Это свойство вытекает из симметрии определителя относительно главной диагонали.

Аналогично можно доказать, что операторное изображение проводимости $g_{km}(p)$ равно операторному изображению $g_{mk}(p)$. Но если равны изображения двух переходных проводимостей, то равны и сами переходные проводимости, т. е. $g_{km}(t) = g_{mk}(t)$.

Данное равенство свидетельствует о том, что на переходные процессы распространяется теорема взаимности. Для переходных процессов теорема взаимности формулируется следующим образом (см. «скелетные» схемы рис. 8.33): в любой линейной электрической цепи ток переходного процесса $k$-ветви $i_k(t)$, вызываемый включением источника ЭДС $e_m(t)$ в $m$-ветвь (рис. 8.33, *а*), равен току переходного процесса $i_m(t)$ в $m$-ветви, вызываемому включением источника ЭДС $e_k(t)$ в $k$-ветвь (рис. 8.33, *б*), при условии, что $e_k(t) = e_m(t)$.



**§ 8.52. Понятие о переходной функции.** При подключении линейной электрической цепи с нулевыми начальными условиями к источнику постоянного напряжения $U$ между какими-то двумя точками $a$ и $в$ схемы возникает напряжение $u_{ab}(t)$, являющееся функцией времени и пропорциональное воздействующему напряжению $U$:

$$u_{ab}(t) = Uh(t), \tag{8.62a}$$

где $h(t)$ — *переходная функция.* Это безразмерная величина, численно равная напряжению между точками $a$ и $в$ схемы, если на ее вход подать постоянное напряжение в 1 В; $h(t)$, так же как и $g(t)$, можно определить расчетным либо опытным путем.

**Пример 97.** Определить переходную проводимость схемы рис. 8.2.

Р е ш е н и е. При замыкании ключа $i(t) = \frac{E}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t})$.

По определению, переходная проводимость равна току в цепи при $E = 1$ В.

Следовательно, $g(t) = \frac{1}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t})$.

**Пример 98.** Найти собственную переходную проводимость первой ветви $g_{11}(t)$, взаимную переходную проводимость между третьей и первой ветвями $g_{31}(t)$ и переходную функцию напряжения на конденсаторе $h_{uC}(t)$ для схемы рис. 8.34. Параметры схемы: $R_1 = 1000$ Ом; $R_2 = 2000$ Ом; $C = 50$ мкФ.

Р е ш е н и е. По определению,

$$i_1 = Eg_{11}(t);\quad i_3 = Eg_{31}(t);\quad u_C = Eh_{uC}(t).$$

С помощью классического метода определим:

$$i_1 = \frac{E}{R_1 + R_2} + \frac{ER_2}{(R_1 + R_2)R_1}e^{pt};\ i_3 = \frac{E}{R_1}e^{pt};$$

$$u_C = E\frac{R_2}{R_1 + R_2}(1 - e^{pt});\quad p = -\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C}.$$

Полагая в этих формулах $E = 1$ В, найдем:

$$g_{11}(t) = \frac{1}{R_1 + R_2} + \frac{R_2}{R_1(R_1 + R_2)}e^{-\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C}t};$$

$$g_{31}(t) = \frac{1}{R}e^{pt};\quad h_{uC}(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2}(1 - e^{pt}).$$

Подстановка числовых значений дает:

$$g_{11}(t) = 0{,}00033 + 0{,}00067e^{-30t}\text{См};$$

$$g_{31}(t) = 0{,}001\,e^{-30t}\text{См};\quad h_{uC} = \frac{2}{3}(1 - e^{-30t}).$$

**Пример 99.** Определить взаимную переходную проводимость между первой и третьей ветвями схемы рис. 8.4, *а* при включении источника ЭДС в первую ветвь и следующих значениях параметров: $R_1 = R_2 = 100$ Ом; $L_1 = 1$ Гн; $C = 100$ мкФ.

Р е ш е н и е. Изображение тока третьей ветви

$$I_3(p) = \frac{ER_2C}{p^2 R_2 L_1 C + p(R_1 R_2 C + L_1) + R_1 + R_2} = \frac{N(p)}{M(p)}$$

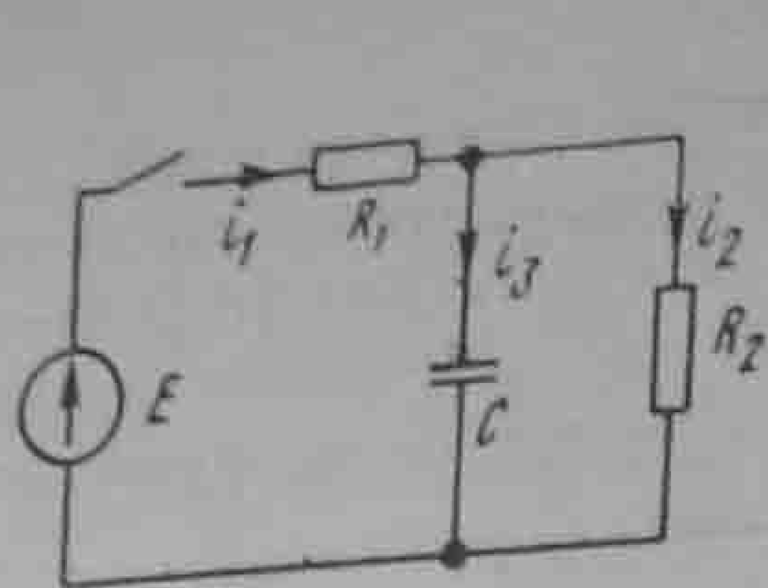



Рис. 8.34

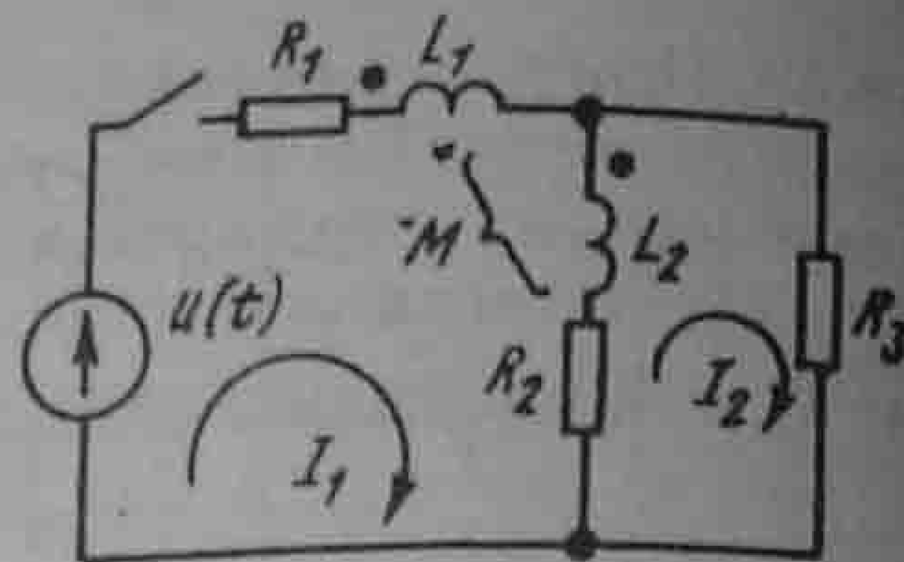



Рис. 8.35

Корни уравнения $M(p)=0$ (см. пример 76): $p_1=-100+j\,100\ \text{с}^{-1}$; $p_2=-100-j\,100\ \text{с}^{-1}$.

Полагая $E=1$ В, в соответствии с формулой разложения найдем

$$i_3(t)=\frac{R_2\,Ce^{p_1t}}{2p_1R_2L_1C+(R_1R_2C+L_1)}+\frac{R_2\,Ce^{p_2t}}{2p_2R_2L_1C+(R_1R_2C+L_1)}.$$

После подстановки значений параметров, корней $p_1$ и $p_2$ и использования формулы $(e^{jx}-e^{-jx})/2j=\sin x$ получим

$$g_{31}(t)=0{,}01\,e^{-100t}\sin 100t\ \text{См}.$$

Таким образом, взаимная переходная проводимость между третьей и первой ветвями схемы рис. 8.4, *а* при данных значениях параметров как функция времени представляет собой затухающую синусоиду.

**Пример 100.** В схеме рис. 8.35 $u(t)=170\sin(314t+30°)$ В; $R_1=10$ Ом; $R_2=5$ Ом; $R_3=15$ Ом; $L_1=30$ мГн; $L_2=50$ мГн; $M=25$ мГн. Найти $i_1(t)$ с помощью формулы разложения.

Решение. Составим уравнения по методу контурных токов:

$$I_1(p)[R_1+R_2+p(L_1+L_2+2M)]-I_2(p)[R_2+p(L_2+M)]=U(p);$$

$$-I_1(p)[R_2+p(L_2+M)]+I_2(p)[R_2+R_3+pL_2]=0.$$

Совместное их решение дает

$$I_1(p)=\frac{U_m(20+0{,}05p)}{(p-j\omega)(0{,}000875p^2+2{,}6p+275)}=\frac{N(p)}{M(p)}.$$

Корни уравнения $M(p)=0$:

$$p_1=314\,j,\ p_2=-2860\ \text{и}\ p_3=-114\ \text{с}^{-1};$$

$$M'(p)=0{,}000875\,p^2+2{,}6\,p+275+(p-j\omega)(0{,}00175\,p+2{,}6);$$

$$N(p_1)=4301\,e^{j68°20'};\ N(p_2)=123\cdot170e^{j210°};$$

$$N(p_3)=14{,}29\cdot170e^{j30°};\ M'(p_1)=838e^{j77°};\ M'(p_2)=6930e^{j6°16'};\ M'(p_3)=806e^{-j110°40'}.$$

Ток

$$i(t)=\operatorname{Im}\left\{\frac{N(p_1)}{M'(p_1)}e^{p_1t}+\frac{N(p_2)}{M'(p_2)}e^{p_2t}+\frac{N(p_3)}{M'(p_3)}e^{p_3t}\right\}=$$

$$=\operatorname{Im}\{5{,}13e^{j(\omega t-8°40')}+3{,}03e^{j203°44'}e^{-2860t}+$$

$$+3{,}01e^{j140°}e^{-114t}=5{,}13\sin(\omega t-8°40')-$$

$$-1{,}16e^{-2860t}+1{,}97e^{-114t}\ \text{А}\}.$$



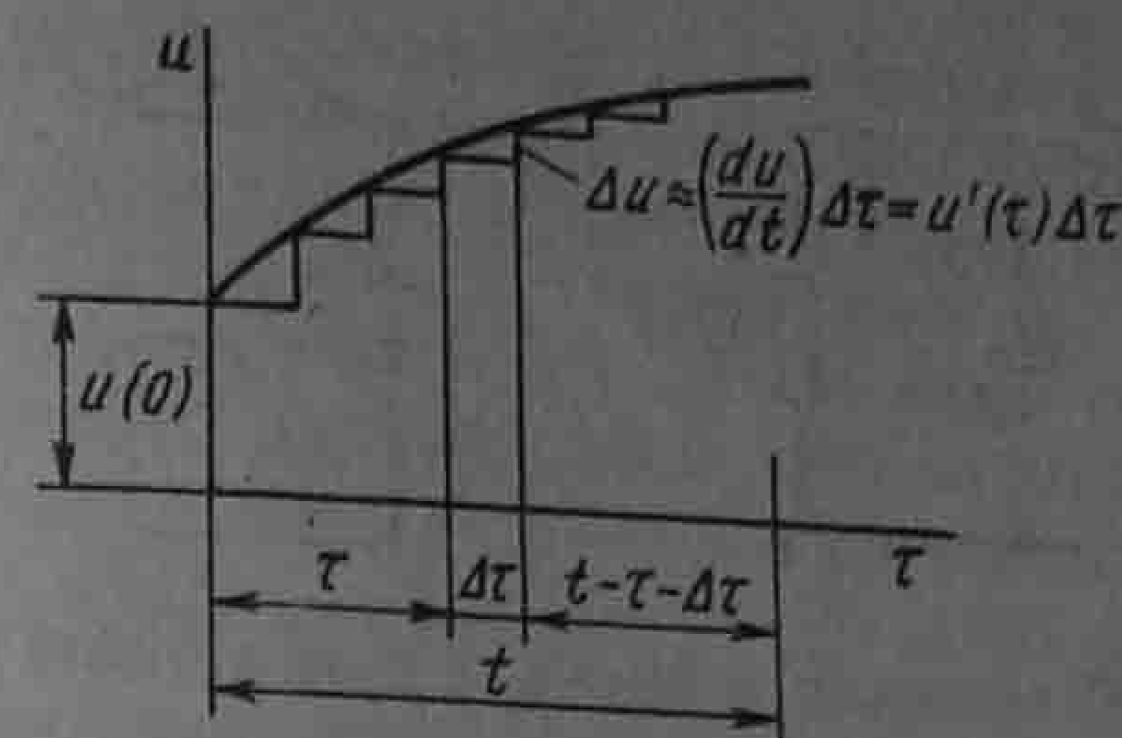



Рис. 8.36

**§ 8.53. Интеграл Дюамеля.** Познакомимся с третьим методом расчета переходных процессов в линейных электрических цепях — расчетом с помощью интеграла Дюамеля.

При использовании интеграла Дюамеля переменную, по которой производится интегрирование, обозначим $\tau$, а под $t$ по-прежнему будем понимать тот момент времени, в который требуется найти ток в цепи. Пусть к цепи с нулевыми начальными условиями в момент времени $t=0$ подключается напряжение $u(\tau)$ (рис. 8.36).

Для того чтобы найти ток в цепи в момент времени $t$, заменим плавную кривую ступенчатой и просуммируем токи от начального напряжения $u(0)$ и от всех ступенек напряжения, вступающих в действие с запозданием во времени.

Напряжение $u(0)$ в момент времени $t$ вызовет в цепи ток $u(0)\times g(t)$, где $g(t)$ — переходная проводимость. В момент времени $\tau+\Delta\tau$ (рис. 8.36) возникает скачок напряжения

$$\Delta u\approx\frac{du}{d\tau}\Delta\tau=u'(\tau)\,\Delta\tau.$$

Для того чтобы найти составляющую тока в момент времени $t$, вызываемую этим скачком напряжения $\Delta u$, необходимо $u'(\tau)\,\Delta\tau$ умножить на значение переходной проводимости с учетом времени действия скачка до момента времени $t$. Из рис. 8.36 видно, что это время равно $t-\tau-\Delta\tau$. Следовательно, приращение тока от этого скачка составляет $u'(\tau)\,g(t-\tau-\Delta\tau)\,\Delta\tau$.

Полный момент времени $t$ получим, если просуммируем все частичные токи от отдельных скачков и прибавим их к току $u(0)\,g(t)$: $i(t)=u(0)g(t)+\Sigma u'(\tau)\,g(t-\tau-\Delta\tau)\,\Delta\tau$.

Число членов суммы равно числу ступенек напряжения. Очевидно, что ступенчатая кривая тем лучше заменяет плавную кривую, чем больше число ступенек. С этой целью заменим конечный интервал времени $\Delta\tau$ на бесконечно малый $d\tau$ и перейдем от суммы к интегралу:

$$i(t)=u(0)g(t)+\int_0^t u'(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau. \qquad (8.63)$$

Формулу (8.63) называют *интегралом Дюамеля.*

С помощью интеграла Дюамеля можно найти не только ток, но и любую другую физическую величину, например напряжение. В этом случае в формуле вместо переходной проводимости $g(t)$ будет входить переходная функция $h(t)$, если на входе цепи действует источник ЭДС (напряжения), и переходное сопротивление $R(t)$, если на входе цепи действует источник тока.

**§ 8.54. Последовательность расчета с помощью интеграла Дюамеля.** Расчет с помощью интеграла Дюамеля проводят в четыре этапа:

1) определение переходной проводимости $g(t)$ [переходной функции $h(t)$] для исследуемой цепи;

2) нахождение $g(t-\tau)$ [$h(t-\tau)$]. С этой целью в формуле для $g(t)$[$h(t)$] заменяют $t$ на $(t-\tau)$;

3) определение $u'(\tau)$. Для этого находят производную от заданного напряжения $u(t)$ по времени $t$ и в полученном выражении заменяют $t$ на $\tau$;

4) подстановка найденных на этапах 1, 2, 3 функций в формулу (8.63), интегрирование по переменной $\tau$ и подстановка пределов.

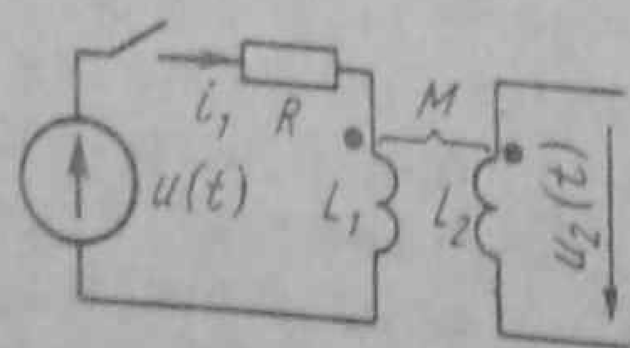
**Пример 101.** Найти $i_1 = f(t)$ и $u_2 = f(t)$ при замыкании ключа из схеме рис. 8.37, *а*. Напряжение источника ЭДС $u(t) = 100\,(1 - e^{-at})$В; $a = 0{,}25$ с$^{-1}$; $R = 0{,}5$ Ом; $L_1 = 1$ Гн; $M = 0{,}5$ Гн.

Решение. Переходная проводимость цепи, состоящей из последовательно включенных $R$ и $L$, $g(t) = \frac{1}{R}(1 - e^{-bt})$, где

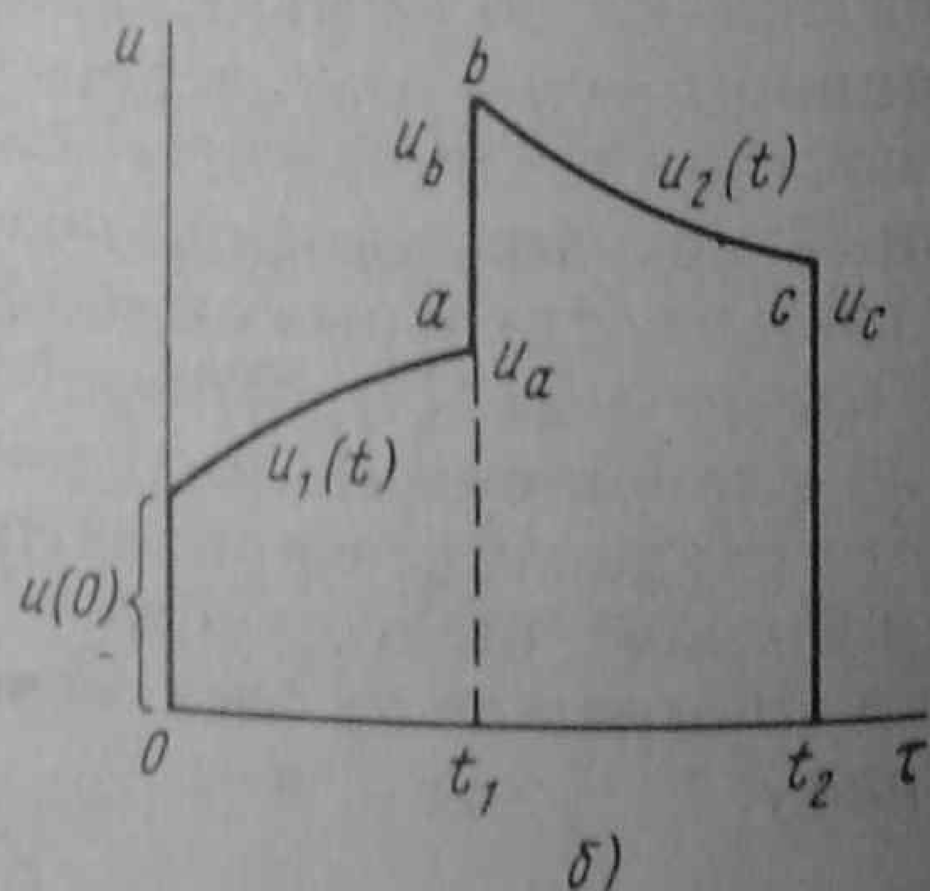
$$b = R/L_1;\ g(t-\tau) = \frac{1}{R}[1 - e^{-b(t-\tau)}].$$

Первое слагаемое в формуле (8.63) выпадает, так как $u(0) = 0$. При этом

$$u'(t) = \frac{d}{dt}100\,(1 - e^{-at}) = 100ae^{-at};\quad u'(\tau) = 100a\,e^{-a\tau};$$



а)



б)

Рис. 8.37



$$i_1(t) = \int_0^t u'(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau = \frac{100a}{R}\int_0^t e^{-a\tau}[1 - e^{-b(t-\tau)}]\,d\tau.$$

При интегрировании учитываем, что $e^{-bt}$ от $\tau$ не зависит:

$$i_1(t) = 200\,(1 + e^{-0{,}5t} - 2e^{-0{,}25t})\ \text{А}.$$

Напряжение на зажимах вторичной обмотки

$$u_2(t) = M\frac{di_1}{dt} = 50\,(e^{-0{,}25t} - e^{-0{,}5t})\ \text{В}.$$

**§ 8.55. Применение интеграла Дюамеля при сложной форме напряжения.** Пусть напряжение $u(t)$ изменяется во времени по сложному закону, например в соответствии с рис. 8.37, *б*. Начальное напряжение равно $u(0)$. В интервале от $t = 0$ до $t = t_1$ напряжение плавно растет, и закон его изменения $u_1(t)$. В момент $t = t_1$ оно меняется скачком от $u_a$ до $u_b$, а затем снова плавно растет, но уже по другому закону $u_2(t)$ во времени. При $t = t_2$ напряжение скачком уменьшается от $u_c$ до нуля.

Требуется найти ток в каждом из трех интервалов времени. Под первым интервалом будем понимать интервал времени от $t = 0$ до $t = t_1$ (не включая скачка напряжения от $u_2$ до $u_b$); под вторым — от $t_1$ до $t_2$, включая скачок от $u_a$ до $u_b$, но не включая скачок от $u_c$ до 0; под третьим — при $t > t_2$, включая скачок от $u_c$ до 0.

Интегрирование по-прежнему проводим по $\tau$, понимая под $t$ фиксированный момент времени, в который требуется найти ток. На основании принципа наложения ток в любой момент времени $t$ определится как сумма токов от всех напряжений, воздействовавших на цепь до момента $t$.

В первый интервал времени

$$i(t) = u(0)g(t) + \int_0^t u'_1(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau.$$

Во второй интервал времени

$$i(t) = u(0)g(t) + \int_0^{t_1} u'_1(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau +$$

$$+ (u_b - u_a)\,g(t - t_1) + \int_{t_1}^t u'_2(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau,$$

где слагаемое $(u_b - u_a)\,g(t - t_1)$ обусловлено скачком напряжения от $u_a$ и $u_b$ в момент времени $t_1$.

В третий интервал времени

$$i(t) = u(0)g(t) + \int_0^{t_1} u'_1(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau +$$

$$+ (u_b - u_a)\, g(t - t_1) + \int_{t_1}^{t_2} u'_2(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau +$$

$$+ (0 - u_c)\, g(t - t_2).$$

**Пример 102.** В электрической цепи рис. 8.37, *а* в момент времени $t = 0$ замыкается ключ и напряжение $u(t)$ изменяется в соответствии с рис. 8.37, *б*; $u(0) = 50$ В. В первый интервал времени от $t = 0$ до $t = t_1 = 4$ с напряжение $u_1(t) = 150 - 100\, e^{-at}$, где $a = 0{,}25$ с$^{-1}$. Во второй интервал времени от $t = t_1 = 4$ с до $t = t_2 = 6$ с $u_2(t) = 50 + 100\, e^{-c(t-t_1)}$, где $c = 0{,}4$ с$^{-1}$. Параметры схемы рис. 8.37, *а* $R = 0{,}5$ Ом; $L_1 = 1$ Гн (вторичная цепь разомкнута).

Найти закон изменения тока $i_1$ во времени для обоих интервалов времени, а также значения тока $i_1$ при $t$, равном 2 и 5 с.

Р е ш е н и е . В соответствии с § 8.54 переходная проводимость

$$g(t) = \frac{1}{R}(1 - e^{-bt}); \quad b = R/L = 0{,}5c^{-1}; \quad g(t-\tau) = \frac{1}{R}[1 - e^{-b(t-\tau)}].$$

В первый интервал времени $u'(\tau) = 100\, a e^{-a\tau}$. Поэтому

$$i_1(t) = u(0)g(t) + \int_0^t u'(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau =$$

$$= \frac{u(0)}{R}(1 - e^{-bt}) + \frac{100a}{R}\int_0^t e^{-a\tau}[1 - e^{-b(t-\tau)}]d\tau =$$

$$= 100(1 - e^{-0{,}5t}) + 200(1 + e^{-0{,}5t} - 2e^{-0{,}25t}).$$

При $t = 2$ с $i_1 = 100(1 - e^{-1}) + 200(1 + e^{-1} - 2\, e^{-0{,}5}) = 94{,}9$ А.

Во второй интервал времени (включая скачок $u_b - u_a = 36{,}9$ В)

$$i_1(t) = u(0)g(t) + \int_0^t u'_1(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau + (u_b - u_a)\, g(t - t_1) + \int_{t_1}^t u'_2(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau;$$

$$u'_2(\tau) = -100ce^{-c\tau} e^{ct_1};$$

$$i_1(t) = 100(1 - e^{-0{,}5t}) + 200(0{,}632 - 1{,}718e^{-0{,}5t}) + \frac{36{,}9}{0{,}5}[1 - e^{-0{,}5(t-t_1)}] -$$

$$- \frac{100c}{(b-c)R}[-\frac{b}{c}e^{-ct} + \frac{b-c}{c}e^{-ct_1} + e^{-ct_1}e^{-b(t-t_1)}]\, e^{-ct_1}.$$

При $t = 5$ с $i_1 = 204{,}32$ А.



**§ 8.56. Сравнение различных методов расчета переходных процессов.** Классический и операторный методы расчета теоретически можно применять для решения задач любой сложности. Каким из них пользоваться, во многом зависит от навыка и привычки.

Однако классический метод более физически прозрачен, чем операторный, в котором решение уравнений во многом формализовано.

Если при сравнении методов исходить из объема вычислительной работы, то решение уравнений первого, второго, а иногда и третьего порядков для источников постоянной (синусоидальной) ЭДС или тока целесообразно проводить классическим методом, а решение уравнений более высоких порядков — операторным. Объясняется это тем, что чем выше порядок характеристического уравнения, тем более громоздкой и трудоемкой оказывается операция нахождения постоянных интегрирования в классическом методе. Операторный метод имеет перед классическим явное преимущество при решении задач, в которых определение принужденной компоненты искомой величины оказывается затруднительным вследствие сложного характера вынуждающей силы, а также при решении уравнений в частных производных (см. § 12.13 — 12.15). Если воздействующее напряжение изменяется во времени, например линейно или в виде всплеска одной или нескольких экспонент, рекомендуется применять операторный метод или интеграл Дюамеля. Но основной областью применения интеграла Дюамеля являются случаи, когда напряжение изменяется по сложному закону во времени, например при наличии скачков напряжения (см. § 8.55), или когда переходная проводимость $g(t)$ и (или) воздействующее на схему напряжение заданы графически (в последнем случае интеграл Дюамеля берется путем численного интегрирования).

Рассматриваемый в § 8.66 метод расчета переходных процессов, получивший название метода пространства состояний, используется главным образом, когда расчет осуществляется с применением ЭВМ. Для ручного счета этот метод громоздок.

Классический и операторный метод, а также метод пространства состояний в аналитической форме и интеграл Дюамеля имеет общий недостаток: необходимость определения всех корней характеристического уравнения, что для уравнений высоких степеней (например, 5, 6, 7-й,...) требует много времени. В этих случаях может быть рекомендовано числовое решение на ЭВМ уравнений, составленных по методу пространства состояний; может быть применен и спектральный метод в том виде, в каком он рассмотрен, например, в гл. 9. Кроме того, в этих случаях используют моделирующие установки.

**§ 8.57. Дифференцирование электрическим путем.** Для четырехполюсников рис. 8.38, *а*, *б* при определенных условиях выходное напряжение $u_2(t)$ пропорционально производной от входного на-

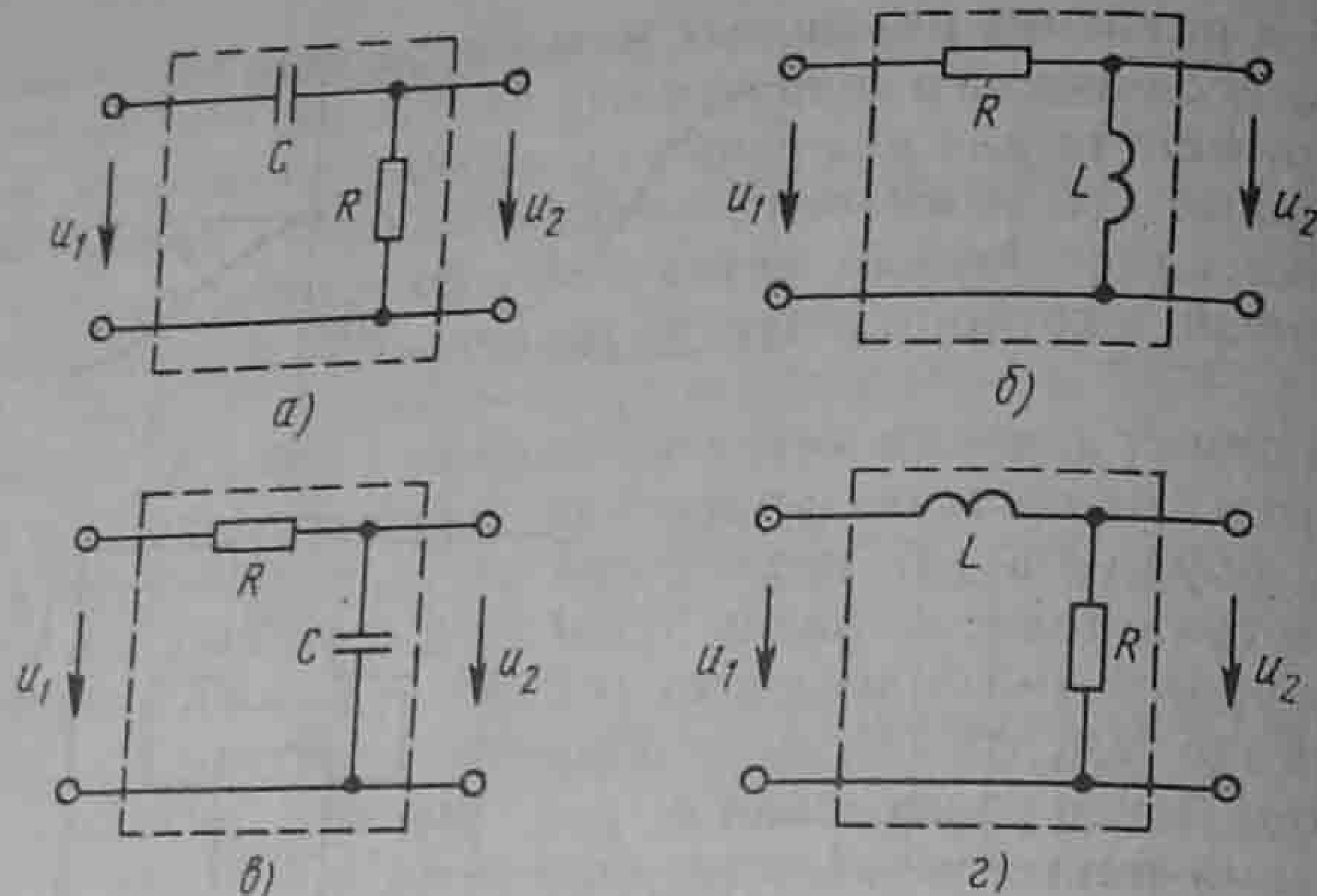



Рис. 8.38

пряжения $u_1(t)$, т. е. $u_2(t) \approx du_1(t)/dt$. Схему рис. 8.38, *а* применяют чаще схемы рис. 8.38, *б*, так как при практическом осуществлении она обладает меньшими габаритами, массой и более удобна при регулировке.

Если $u_1(t) \risingdotseq U_1(p)$, то $du_1(t)/dt \risingdotseq pU_1(p)$. Отсюда следует, что четырехполюсник осуществляет дифференцирование, если для него $U_2(p) \equiv pU_1(p)$. Для схемы рис. 8.38, *а* $U_2(p) = U_1(p)\dfrac{RCp}{RCp+1}$. Чтобы схема осуществила дифференцирование, необходимо выполнить условие $|RCp| \lll 1$, тогда $U_2(p) \approx RCp\ U_1(p)$. Для синусоидального процесса заменим $p$ на $j\omega$ и тогда схема рис. 8.38, *а* будет выполнять свои функции, если $\omega RC \lll 1$.

Аналогично, доказывается, что для схемы рис. 8.38, *б* необходимо выполнить условие $(\omega L/R) \lll 1$. Если $u_1(t)$ — несинусоидальная периодическая функция, то эти условия должны выполняться для наивысшей частоты функции $u_1(t)$.

При дифференцировании импульсных воздействий длительностью $t_и$ параметры схем рис. 8.38, *а*, *б* должны удовлетворять условиям $RC \lll t_и$ и $L/R \lll t_и$. Эти условия получим из двух предыдущих, если в первом приближении будем считать, что поступление на вход четырехполюсника импульса длительностью $t_и$ соответствует воздействию на вход одной полуволны синусоиды частотой $\omega = 2\pi/(2t_и) = \pi/t_и$.

**§ 8.58. Интегрирование электрическим путем.** Для четырехполюсников рис. 8.38, *в*, *г* при определенных условиях выходное напряжение $u_2(t) \equiv \int u_1(t)\,dt$.



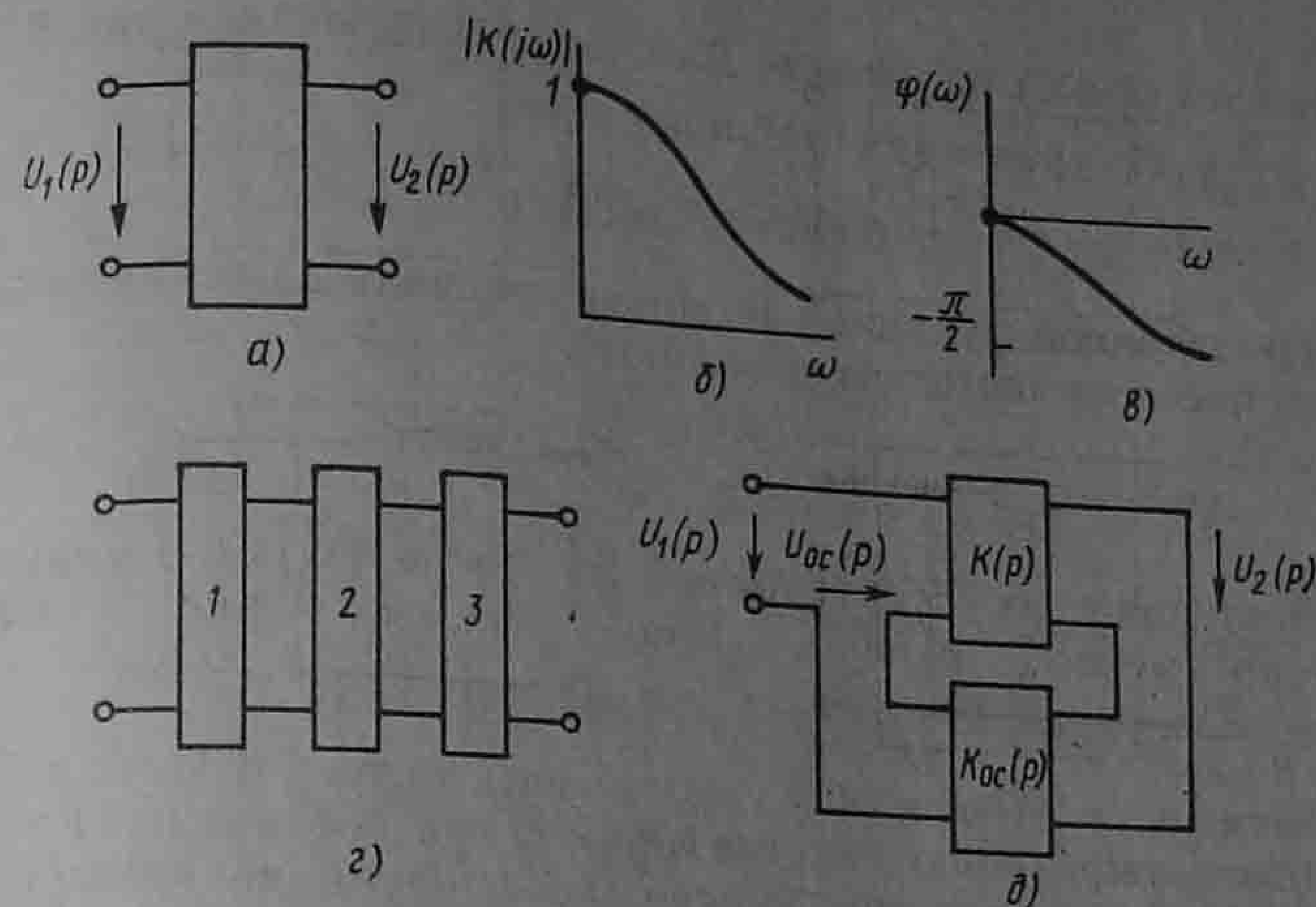



Рис. 8.39

Схема рис. 8.38, *в* предпочтительнее схемы рис. 8.38, *г* по причинам, упомянутым в § 8.57.

Если $u_1(t) \risingdotseq U_1(p)$, то $\int u_1(t)\,dt \risingdotseq U_1(p)/p$. Отсюда следует, что схема выполняет свои функции, если соотношение между ее параметрами обеспечивает выполнение соотношения $U_2(p) \equiv U_1(p)/p$.

Для схемы рис. 8.38, *в* $U_2(p) = U_1(p)/(RCp+1)$, т. е. для нее должно быть $|RCp| \ggg 1$. Заменив $p$ на $j\omega$, найдем условие $\omega RC \ggg 1$, при котором схема рис. 8.37, *в* будет выполнять функции интегрирующего звена при синусоидальном процессе. Для схемы рис. 8.38, *г* $(\omega L/R \ggg 1)$.

При интегрировании импульсных воздействий длительностью $t_и$ должны быть выполнены следующие условия: $RC \ggg t_и$ для схемы рис. 8.38, *в* и $(L/R) \ggg t_и$ для схемы рис. 8.38, *г*.

Напряжение с выхода интегрирующего (дифференцирующего) устройства подается для наблюдения (записи) на электронный осциллограф.

**§ 8.59. Передаточная функция четырехполюсника на комплексной частоте.** Под *передаточной функцией* четырехполюсника $K(p)$ на комплексной частоте $p$ понимают отношение выходного напряжения $U_2(p)$ ко входному $U_1(p)$ (рис. 8.39, *а*)

$$K(p) = U_2(p)/U_1(p); \qquad (а)$$

$K(p)$ зависит от схемы четырехполюсника, числового значения эле-

ментов схемы и от частоты $p$. Для четырехполюсника рис. 8.38, *г* $K(p)=\frac{R}{R+pL}$. Из уравнения (а) следует, что

$$U_2(p)=K(p)U_1(p). \quad (б)$$

Под передаточной функцией четырехполюсника для синусоидального процесса на частоте $\omega$ понимают

$$K(j\omega)=\frac{\dot U_2(j\omega)}{\dot U_1(j\omega)}=|K(j\omega)|\,e^{j\varphi(\omega)}; \quad (в)$$

$K(j\omega)$ получают из $K(p)$ заменой $p$ на $j\omega$, $|K(j\omega)|$ — модуль, а $\varphi(\omega)$ — аргумент $K(j\omega)$. Для схемы рис. 8.38, *г* $K(j\omega)=\frac{R}{R+j\omega L}$, $|K(j\omega)|=\frac{R}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}$, $\varphi(\omega)=\operatorname{arctg}\left(-\frac{\omega L}{R}\right)$.

Зависимости $|K(j\omega)|$ и $\varphi(\omega)$ изображены на рис. 8.39, *б, в*. Если несколько четырехполюсников, например три, соединены каскадно (рис. 8.39, *г*) и известны передаточные функции каждого четырехполюсника, то передаточная функция каскада в соответствии с формулой (б) равна произведению передаточных функций этих четырехполюсников

$$K(p)=K_1(p)K_2(p)K_3(p). \quad (г)$$

**Пример 103.** На рис. 8.39, *д* изображена *замкнутая система* (система с обратной связью). Она состоит из основного четырехполюсника с передаточной функцией $K(p)$ и четырехполюсника обратной связи с $K_{ос}(p)$. Функцию последнего часто выполняет усилитель, работающий в режиме пропорционального усиления. Вывести формулу передаточной функции всей системы $K_{ж}(p)$.

Р е ш е н и е. На вход основного четырехполюсника поступает основной сигнал $U_1(p)$ и сигнал с выхода четырехполюсника обратной связи, поэтому

$$U_2(p)=[U_1(p)\pm U_{ос}(p)]K(p). \quad (д)$$

Кроме того,

$$U_{ос}(p)=K_{ос}(p)U_2(p). \quad (е)$$

Подставим (е) в (д). Получим

$$K_{ж}(p)=\frac{U_2(p)}{U_1(p)}=\frac{K(p)}{1\pm K(p)K_{ос}(p)}. \quad (ж)$$

Если $1-K(p)K_{ос}(p)=0$, то в системе возникнут автоколебания, амплитуда их будет ограничиваться нелинейностью системы. Плюс в формуле (д) и минус в формуле (ж) соответствуют положительной обратной связи. Минус в формуле (д) и плюс в (ж) — отрицательной.

**§ 8.60. Переходные процессы при воздействии импульсов напряжения.** Ток в любой схеме при действии на нее импульса напряжения (рис. 8.40, *а*) можно найти, например, тремя способами:

1) применяя интеграл Дюамеля;

2) определяя ток при $t<t_1$ так же, как от действия постоянного напряжения $U$; при $t>t_1$ действующее на систему напряжение рав-



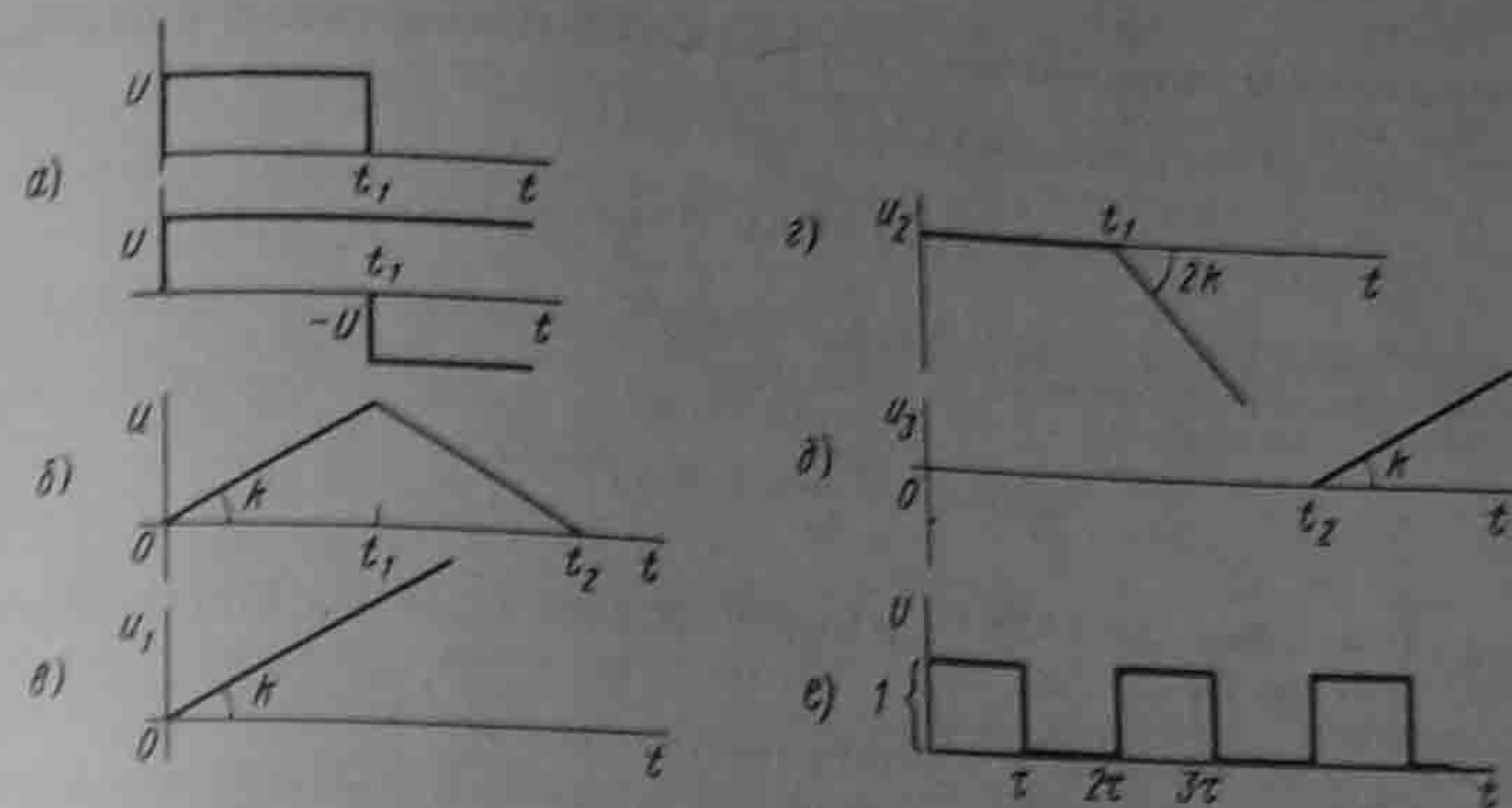



Рис. 8.40

но нулю. Следовательно, система освобождается от вынуждающих ЭДС и по ней протекают свободные токи, обусловленные запасом энергии в индуктивных и емкостных элементах системы;

3) представляя импульс в виде двух постоянных напряжений. Положительное напряжение $U$ действует начиная с $t=0$, отрицательное — начиная с $t=t_1$. При $t<t_1$ токи в цепи определяются одним напряжением $U$; при $t>t_1$ — обоими напряжениями с учетом сдвига второго напряжения на время $t_1$.

Рассмотрим третий способ. Положим, что требуется найти ток в цепи при подключении ее к источнику напряжения, имеющего форму равнобедренного треугольника (рис. 8.40, *б*). Задача решается в три приема.

Сначала определяем ток в интервале времени от $t=0$ до $t\leqslant t_1$ от действия напряжения $u_1=kt$ (рис. 8.40, *в*). Затем для интервала времени $t_2\geqslant t\geqslant t_1$ находим ток в цепи от действия двух напряжений (рис. 8.40, *в, г*): от продолжающего действовать напряжения $u_1=kt$ и от вступающего в действие при $t=t_1$ дополнительного напряжения $u_2=-2k(t-t_1)$.

Для интервала времени $t>t_2$ ток определяется действием трех напряжений: продолжающих действовать напряжений $u_1$ и $u_2$ и вновь вступающего в действие при $t=t_2$ напряжения $u_3=k(t-t_2)$ [при $t\geqslant t_2$ сумма напряжений $u_1$, $u_2$ и $u_3$ (рис. 8.40, *д*) даст нуль].

Из трех перечисленных способов наиболее экономным является первый.

При воздействии серий импульсов переходный процесс рассчитывают часто операторным методом.

**Пример 104.** На последовательно соединенные $R$ и $L$ поступает серия прямоугольных импульсов напряжения единичной амплитуды; длительность импульса $\tau$ и

длительность паузы также τ (рис. 8.40, *е*). Используя третий способ в сочетании с теоремой запаздывания (см. § 8.40), определить ток в цепи.

Решение. Найдем изображение напряжения:

$$U(p)=\frac{1}{p}\left(1-e^{-p\tau}+e^{-2p\tau}-e^{-3p\tau}+\dots\right).$$

Выражение в скобках представляет собой бесконечную геометрическую прогрессию со знаменателем $-e^{-p\tau}$. Сумма членов ее равна $\frac{1}{1+e^{-p\tau}}$. Изображение тока

$$I(p)=\frac{1}{p(1+e^{-p\tau})(R+pL)}.$$

Применим формулу разложения. Корни знаменателя: $p'=0$; $p''=-R/L$; $\tau p_k=(a_k+jb_k)\tau=j\pi(2k+1)$ $(-\infty<k<\infty)$.

Группируя член $k=0$ с $k=-1$, член $k=1$ с членом $k=-2$ и т. д., получим

$$i(t)=\frac{1}{2R}-\frac{e^{-\frac{R}{L}t}}{R\left(1+e^{\frac{R}{L}\tau}\right)}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin\left[\pi(2k+1)\frac{t}{\tau}-\varphi_{2k+1}\right]}{z_{2k+1}};$$

$$z_{2k+1}=\sqrt{R^2+\left[\frac{(2k+1)\pi L}{\tau}\right]^2};\quad \varphi_{2k+1}=\operatorname{arctg}\frac{(2k+1)\pi L}{R\tau}.$$

**§ 8.61. Дельта-функция, единичная функция и их свойства. Импульсная переходная проводимость.** *Дельта-функцией* $\delta(t)$ или единичным импульсом (рис. 8.41, *а*) называют прямоугольный импульс амплитудой $1/\Delta\tau$ и длительностью $\Delta\tau$ при $\Delta\tau\to 0$. Единичным называют потому, что площадь его равна единице: $\frac{1}{\Delta\tau}\Delta\tau=1$. Размерность $\delta(t)$ — $c^{-1}$.

*Единичной функцией* $1(t)$ (рис. 8.41, *б*) называют функцию, равную единице при $t>0$ и равную нулю при $t<0$. Единичная функция $1(-t)$ (рис. 8.41, *в*) равна нулю при $t>0$ и единице при $t<0$. Функции $1(t)$ и $1(-t)$ имеют нулевую размерность. Свойства $\delta(t)$:

1) из определения $\delta(t)$ следует, что

$$\int_0^t \delta(t)\,dt=\begin{cases}1 & t>0;\\ 0 & t<0;\end{cases}$$

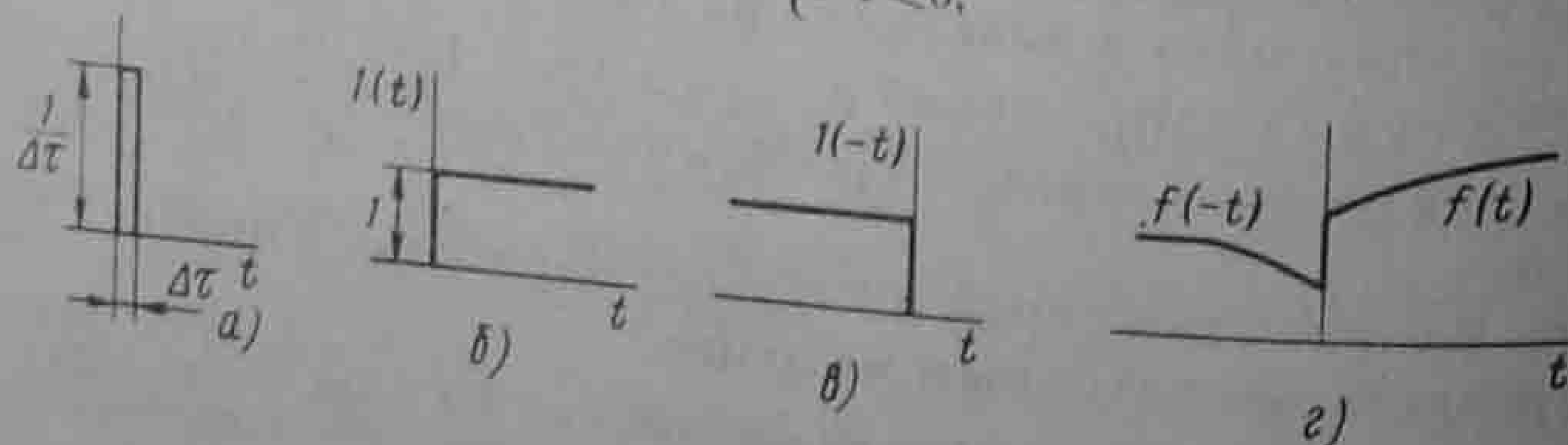



Рис. 8.41



2) производная функции $1(t)$ равна δ-функции:

$$d1(t)/dt=\delta(t);$$

3) δ-функция обладает фильтрующим действием:

$$f(t)\delta(t-t_1)=f(t_1)\delta(t-t_1);$$

4) изображение по Лапласу δ-функции равно 1:

$$\int_0^\infty \delta(t)e^{-pt}dt=1,\quad \text{а } \delta(t-t_0)\doteq e^{-pt_0}$$

на основании теоремы смещения.

Единичные функции $1(t)$ и $1(-t)$ также обладают фильтрующим действием. Умножение произвольной функции $f(t)$ на $1(t)$ обращает произведение $f(t)1(t)$ в нуль при $t<0$. Аналогично,

$$f(t)1(-t)=\begin{cases}0 & t>0;\\ f(t) & t<0.\end{cases}$$

Импульсное (игольчатое) напряжение или ток в виде δ-функции единичной площади записывают так: $\delta(t)\cdot 1$. Здесь единица имеет размерность В·с или А·с соответственно.

В соответствии с рис. 8.41, *а* импульсное напряжение единичной площади, равное $\delta(t)\cdot 1$ В·с, можно представить как сумму двух прямоугольных импульсов: импульса напряжения $1/\Delta\tau$, вступающего в действие при $t=0$, и импульса $-(1/\Delta\tau)$, вступающего в действие при $t=\Delta\tau$.

При $t>\Delta\tau$ и нулевых начальных условиях ток на входе цепи при воздействии на нее напряжения в виде δ-функции $i(t)=1\frac{1}{\Delta\tau}[g(t)-g(t-\Delta\tau)]$.

Разложив $g(t-\Delta\tau)$ в ряд Тейлора по степеням $\Delta\tau$ и учитывая малость $\Delta\tau$, получим

$$i(t)=1\frac{1}{\Delta\tau}[g(t)-g(t)+\Delta\tau g'(t)]=1\cdot\frac{1}{\Delta\tau}\Delta\tau g'(t)=g'(t)\cdot 1,$$

где $g'(t)=\frac{dg(t)}{dt}$ — *импульсная переходная проводимость*. Для моментов времени $t>\Delta\tau$ она численно равна току в цепи при воздействии на цепь напряжения в виде δ-функции.

Аналогично, $h'(t)=\frac{dh(t)}{d(t)}$ — *импульсная переходная функция*. Для $t>\Delta\tau\to 0$ она численно равна напряжению на выходе четырехполюсника при воздействии на его вход импульса напряжения $\delta(t)\cdot 1$ В·с. В интервале времени от $0_-$ до $0_+$ (во время действия импульса) $u_2(t)=h'(t)\cdot 1+h(0_+)\delta(t)=h^\delta(t)$.

Наряду с понятиями "переходная проводимость" $g(t)$ и "им-

пульсная переходная проводимость" $g'(t)$ применяют дуальные им понятия: *переходное сопротивление* $r(t)$ и *импульсное переходное сопротивление* $r'(t)$. Переходное сопротивление $r_{ab}(t)$ численно равно напряжению на входе цепи $u_{ab}(t)$ при воздействии на ее вход единичного тока:

$$u_{ab}(t) = 1(A) r_{ab}(t).$$

Импульсное переходное сопротивление $r'_{ab}(t)$ численно равно напряжению на входе цепи $u_{ab}(t)$, после того как на ее вход воздействовал импульс тока в виде δ-функции единичной площади:

$$u_{ab}(t) = \delta(t) \cdot 1(\mathrm{A} \cdot \mathrm{c}) \cdot r'_{ab}(t).$$

Величины $r(t)$ и $r'(t)$ могут быть входными и взаимными, однако $g(t)$ и $R(t)$ не являются взаимно обратными величинами; $g(t)$ определяется при питании схемы от источника ЭДС, а $R(t)$ — при питании схемы от источника тока.

Подчеркнем, что в литературе по переходным процессам в зависимости от рассматриваемого вопроса под одним и тем же названием — импульсная переходная функция — понимают либо функцию $h'(t)$, либо $h^{\delta}(t)$. Между этими функциями имеется зависимость

$$h^{\delta}(t) = h(0_+)\,\delta(t) + h'(t);$$

$h'(t)$ характеризует реакцию четырехполюсника (его выходное напряжение) после окончания воздействия на его вход единичным импульсом напряжения $1 \cdot \delta(t)$ В · с, а $h^{\delta}(t)$ — напряжение на выходе четырехполюсника и во время действия импульса и после окончания.

Аналогичные соотношения существуют между двумя импульсными переходными проводимостями

$$g^{\delta}(t) = g(0_+)\,\delta(t) + g'(t)$$

и между двумя импульсными переходными сопротивлениями

$$R^{\delta}(t) = R(0_+)\,\delta(t) + R'(t)$$

при воздействии на вход схемы единичным импульсом тока. С помощью $h^{\delta}(t)$ интеграл Дюамеля запишется так:

$$u_2(t) = \int_0^t u(\tau)\, h^{\delta}(t-\tau)\, d\tau.$$

Здесь $h^{\delta}(t-\tau) = h(0)\,\delta(t) + h'(t-\tau)$.

Формулу интеграла Дюамеля в математических работах называют *формулой свертки* двух функций в данном случае функций $u(t)$ и $h^{\delta}(t)$.



**§ 8.62. Определение $h(t)$ и $h^{\delta}(t)$ через $K(p)$.** Как упоминалось, при воздействии на вход четырехполюсника единичного напряжения $u_1(t) = 1(t)$ напряжение на выходе его $u_2(t) = h(t)$. Если это положение записать относительно изображений, учитывая, что $1(t) \doteq \dfrac{1}{p}$ и обозначив изображение $h(t)$ через $H(p)$, то $H(p) = K(p)/p$. Отсюда

$$K(p) = pH(p). \tag{8.64}$$

Определим теперь $h(t)$ через $K(p)$. Поскольку $h(t) \doteq H(p)$, а $H(p)$ определено предыдущей строкой, то

$$h(t) \doteq \frac{K(p)}{p}. \tag{8.65}$$

При воздействии на вход четырехполюсника единичным импульсом напряжения $u_1(t) = 1 \cdot \delta(t) \doteq 1 = u_1(p)$, напряжение на выходе его

$$u_2(t) = h^{\delta}(t) \doteq U_1(p)K(p) = 1 \cdot K(p),$$

таким образом

$$h^{\delta}(t) \doteq K(p). \tag{8.66}$$

**Пример 105.** Запишем $h(t)$, $h'(t)$, $h^{\delta}(t)$ для схемы рис. 8.38, *а*: $h(t) = 1 \cdot e^{-t/RC}$; $h'(t) = -\dfrac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}$;

$$h^{\delta}(t) \doteq K(p) = \frac{RCp}{RCp+1} = \frac{RCp+1-1}{RCp+1} = 1 - \frac{1}{RCp+1} \doteq h(0_+)\delta(t) - \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}.$$

**§ 8.63. Метод пространства состояний.** Метод пространства состояний (метод переменных состояния) представляет собой упорядоченный способ нахождения состояния системы в функции времени, использующий матричный метод решения системы дифференциальных уравнений первого порядка, записанных в форме Коши (в нормальной форме). Применительно к электрическим цепям под переменными состояния понимают величины, определяющие энергетическое состояние цепи, т. е. токи через индуктивные элементы и напряжения на конденсаторах. Значения этих величин полагаем известными к началу процесса. Переменные состояния в обобщенном смысле назовем $x$. Так как это некоторые функции времени, то их можно обозначить $x(t)$.

Пусть в системе $n$ переменных состояния. Матрицу-столбец переменных состояния в $n$-мерном пространстве состояний обозначим $[x] = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$, $m$ выходных величин (токи, напряжения) обозначим $y$,

матрицу-столбец выходных величин $[y]=\begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ \dots \\ y_m \end{bmatrix}$.

Источники воздействий (источники ЭДС и тока) будем именовать $z$. Матрица-столбец источников воздействий $[z]=\begin{bmatrix} z_1 \\ \dots \\ \dots \\ z_p \end{bmatrix}$.

Для электрических цепей можно составить матричные уравнения вида (программа решения на ЭВМ уравнения (8.67) приведена в [23]).

$$[\dot{x}]=[M][x]+[N][z]; \tag{8.67}$$

$$[y]=[P][x]+[Q][z], \tag{8.68}$$

где $[M]$, $[N]$, $[P]$, $[Q]$ — некоторые матрицы, определяемые структурой цепи и значениями ее параметров.

На основании принципа наложения решение (8.67)

$$[x(t)]=e^{[M]t}[x(0)]+\int_0^t e^{[M](t-\tau)}[N][z(\tau)]d\tau, \tag{8.69}$$

где $[x(0)]$ — матрица начальных значений $x$.

Первое слагаемое в формуле (8.69) описывает свободные процессы в системе, второе — принужденные и свободные при нулевом исходном состоянии [вывод формулы (8.69) см. в конце параграфа].

Из (8.68) и (8.69) находим

$$[y(t)]=[P]e^{[M]t}[x(0)]+\int_0^t [P]e^{[M](t-\tau)}[N][z(\tau)]\,d\tau+[Q][z(t)]. \tag{8.70}$$

Поясним формулу (8.69) на простом примере. Ток в схеме рис. 8.42 до коммутации был $i(0_-)=E/(2R)$. Уравнение состояния для этой схемы $di/dt=-(R/L)i+(E/L)$, т. е.

$$[\dot{x}]=di/dt; [M]=-R/L; [N]=1/L; [z]=E;$$

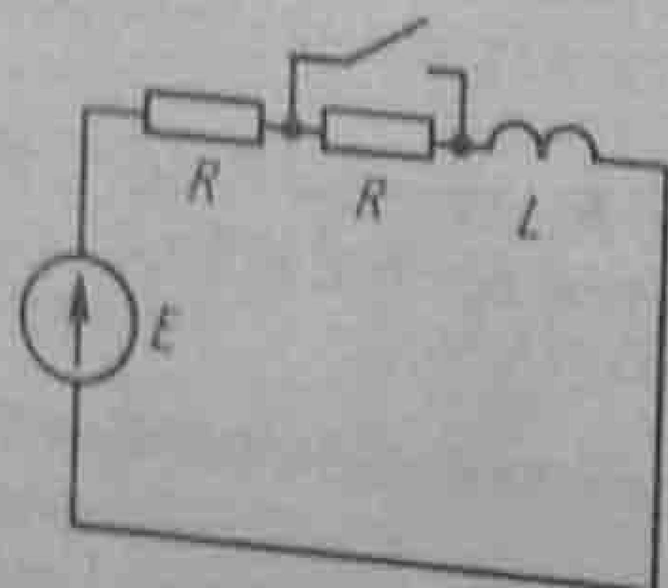



Рис. 8.42

$$i(t)=e^{-\frac{R}{L}t}\frac{E}{2R}+\int_0^t e^{-\frac{R}{L}(t-\tau)}\frac{E}{L}d\tau=$$

$$=\frac{E}{R}-\frac{E}{2R}e^{-\frac{R}{L}t}.$$



Матричную функцию $e^{[M]t}$ в формуле (8.69) вычисляют по формуле (теореме) Сильвестра [13]:

$$e^{[M]t}=e^{\lambda_1 t}[A_1]+e^{\lambda_2 t}[A_2]+\dots+e^{\lambda_n t}[A_n], \tag{8.71}$$

где

$$[A_r]=\frac{\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq r}}^{n}([M]-\lambda_j[1])}{\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq r}}^{n}(\lambda_r-\lambda_j)}; \tag{8.72}$$

$\lambda_r$ — собственные значения (характеристические числа) квадратной матрицы $[M]$, т. е. корни уравнения

$$\det([M]-\lambda[1])=0. \tag{8.73}$$

Из уравнения (8.73) следует, что уравнение относительно $\lambda$ составляют, приравнивая нулю определитель матрицы $[M]$, в котором все элементы этой матрицы $a_{mm} (m=1, \dots, n)$, расположенные по главной диагонали, заменяют на элементы $a_{mm}-\lambda$.

Характеристические числа $\lambda$ — это не что иное, как корни характеристического уравнения послекоммутационной схемы. Запись решения в виде ряда (8.71) предполагает, что все характеристические числа различны (нет кратных корней). Если же среди корней уравнения $\det([M]-\lambda[1])=0$ будет кратный корень $\lambda_s$ кратности $s$, то составляющая $e^{[M]t}$, обусловленная этим корнем, имеет вид

$$\frac{1}{(s-1)!}\frac{d^{s-1}}{d\lambda^{s-1}}\left[\frac{e^{[\lambda]t}\,Adj(\lambda[1]-[M])}{\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq s}}(\lambda-\lambda_j)}\right]_{\lambda=\lambda_s}, \tag{8.74}$$

где $Adj(\lambda[1]-[M])$ — присоединенная матрица к матрице $\lambda[1]-[M]$. В ней все элементы $a_{ij}$ заменены на алгебраические дополнения, а затем проведено транспонирование. Составляющие решения по формуле (8.74) соответствуют части решения по формуле разложения (см. § 8.50), учитывающей кратные корни. При машинном счете функцию $e^{[M]t}$ подсчитывают разложением в ряд:

$$e^{[M]t}=[1]+[M]t+\frac{[M]^2t^2}{2!}+\dots.$$

**Пример 106.** Методом пространства состояний исследовать переходный процесс в схеме рис. 8.43, *а*. До коммутации был установившийся режим: $E=4$ В, $J=1$ А; $R=2$ Ом; $L=1$ Гн; $C=1$ Ф.

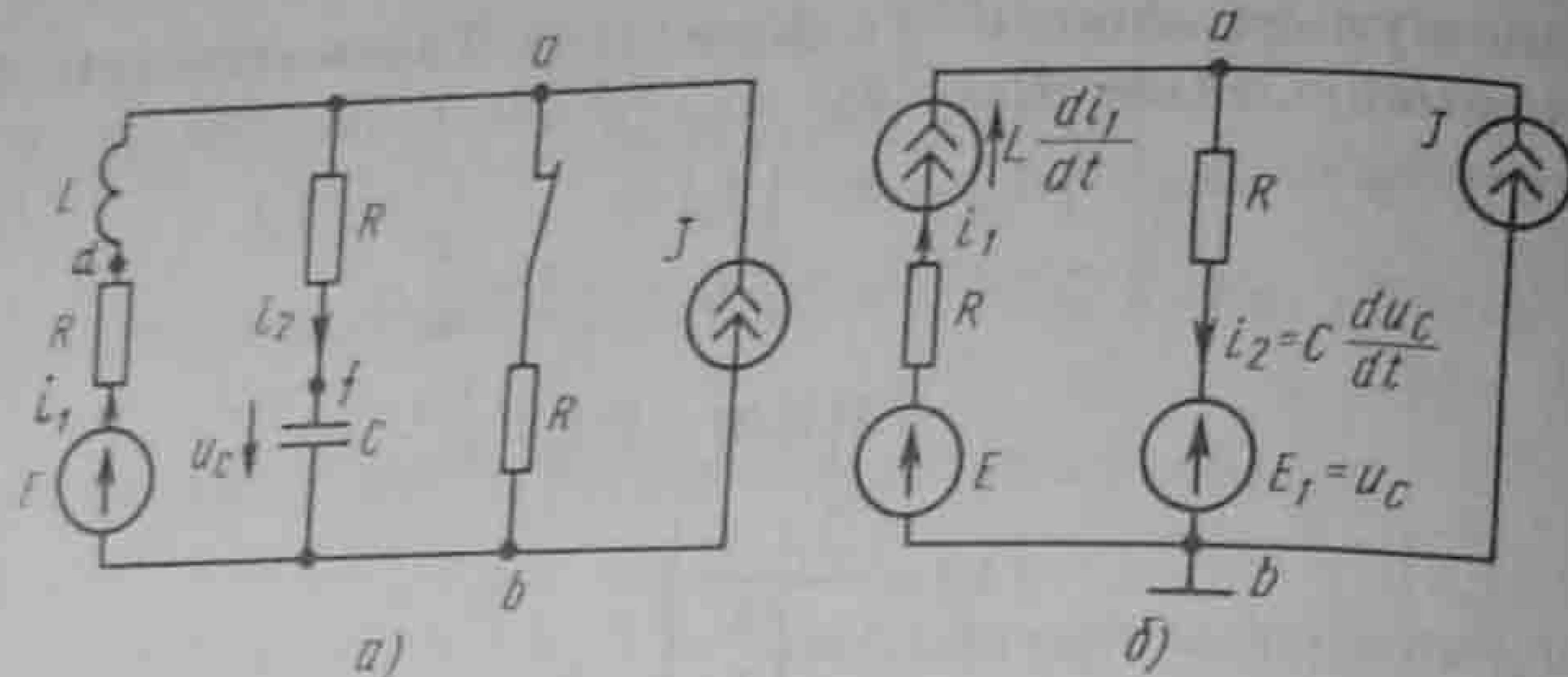



Рис. 8.43

Решение. Обозначим токи и напряжения в соответствии с рис. 8.43, *а*. До коммутации

$$i_1(0_)=\frac{E}{2R}-\frac{J}{2}=0{,}5\ \text{А};\quad u_C(0_)=R\left(\frac{J}{2}+\frac{E}{2R}\right)=3\ \text{В}.$$

В качестве переменных состояний выбираем ток $i_1$ и напряжение на конденсаторе $u_C$.

Известно несколько способов составления уравнений состояния. Рассмотрим наиболее целесообразный, основанный на сведении послекоммутационной схемы к резистивной с источниками ЭДС и тока. С этой целью индуктивные элементы в послекоммутационной схеме заменяем на источники тока, которые доставляют ток в том же направлении, что и в исходной схеме (в рассматриваемом примере $L$ заменяем на источник тока $i_1$ с напряжением на нем $Ldi_1/dt$), а конденсатор $C$ — на источник ЭДС, причем в соответствии с теоремой конденсации ЭДС этого источника должна быть направлена встречно току в ветви с конденсатором, т. е. встречно напряжению $u_C$ на конденсаторе (в рассматриваемом примере конденсатор $C$ с напряжением на нем $u_C$ заменен на источник ЭДС $E_1=u_C$).

В результате схема окажется без индуктивных и емкостных элементов (чисто резистивной), но с дополнительными источниками тока и ЭДС (рис. 8.43, *б*).

В полученной резистивной схеме один из узлов заземлим. Составим уравнения по методу узловых потенциалов и определим потенциалы незаземленных узлов. В рассматриваемом примере не заземлен всего один узел *а*. Поэтому

$$\varphi_a=\frac{(i_1+J)+(u_C/R)}{1/R}=(i_1+J)R+u_C.$$

По известным потенциалам узлов рассчитаем напряжения на источниках тока $L_k di_k/dt$, эквивалентирующих индуктивные элементы $L_k$, и токи $i_m=C_m du_{Cm}/dt$ через источники ЭДС, эквивалентирующие емкостные элементы емкостью $C_m$.

Для первой ветви схемы рис. 8.43, *б*

$$\varphi_a=(i_1+J)R+u_C=E-i_1R-L\frac{di_1}{dt}.$$

Отсюда

$$\frac{di_1}{dt}=-\frac{2R}{L}i_1-\frac{u_C}{L}+\frac{E}{L}-\frac{R}{L}J.$$

Ток второй ветви $i_2$ можно определить по первому закону Кирхгофа или по закону Ома для участка цепи с источником ЭДС:

$$i_2=C\frac{du_C}{dt}=\frac{\varphi_a-u_C}{R}=\frac{(i_1+J)R+u_C-u_C}{R}=i_1+J.$$



Следовательно, $du_C/dt=(i_1/C)+(J/C)$. Таким образом, уравнения переменных состояния для послекоммутационной схемы рис. 8.43, *а* таковы:

$$\frac{di_1}{dt}=-\frac{2R}{L}i_1-\frac{1}{L}u_C+\frac{1}{L}E-\frac{R}{L}J;$$

$$\frac{du_C}{dt}=\frac{1}{C}i_1+0\cdot u_C+0\cdot E+\frac{1}{C}J,$$

или $[\dot{x}]=[M][x]+[N][z]$, где $[\dot{x}]=\begin{bmatrix}\frac{di_1}{dt}\\ \frac{du_C}{dt}\end{bmatrix}$;

$$[x]=\begin{bmatrix}i_1\\u_C\end{bmatrix};[M]=\begin{bmatrix}-\frac{2R}{L} & -\frac{1}{L}\\ \frac{1}{C} & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix};$$

$$[N]=\begin{bmatrix}\frac{1}{L} & -\frac{R}{L}\\ 0 & \frac{1}{C}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -2\\0 & 1\end{bmatrix};[z]=\begin{bmatrix}E\\J\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix};$$

$$[x(0)]=\begin{bmatrix}0{,}5\\3\end{bmatrix}.$$

Составим уравнение для определения характеристических чисел $\lambda$:

$$\det([M]-\lambda[1])=\begin{vmatrix}-4-\lambda & -1\\ 1 & -\lambda\end{vmatrix}=0.$$

Таким образом, $\lambda^2+4\lambda+1=0$; $\lambda_1=-0{,}27$; $\lambda_2=-3{,}73\ \text{с}^{-1}$. По формуле (8.72),

$$[A_1]=\frac{[M]-\lambda_2[1]}{\lambda_1-\lambda_2}=\frac{\begin{bmatrix}-4 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}+3{,}73\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}}{3{,}46}=\begin{bmatrix}-0{,}078 & -0{,}289\\ 0{,}289 & 1{,}077\end{bmatrix};$$

$$[A_2]=\frac{[M]-\lambda_1[1]}{\lambda_2-\lambda_1}=\begin{bmatrix}1{,}077 & 0{,}289\\ -0{,}289 & -0{,}078\end{bmatrix}.$$

По формуле (8.69),

$$\begin{bmatrix}i_1\\u_C\end{bmatrix}=\left\{e^{-0{,}27t}[A_1]+e^{-3{,}73t}[A_2]\right\}\begin{bmatrix}0{,}5\\3\end{bmatrix}+$$

$$+\int_0^t\left\{e^{-0{,}27(t-\tau)}[A_1]+e^{-3{,}73(t-\tau)}[A_2]\right\}\begin{bmatrix}1 & -2\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}d\tau.$$

Выполнив подсчеты, получим

$$i_1=-1+0{,}75e^{-0{,}27t}+0{,}75e^{-3{,}73t}\ \text{А};$$

$$u_C=6-2{,}8e^{-0{,}27t}-0{,}2e^{-3{,}73t}\ \text{В}.$$

Если за выходную величину $y$ принять напряжение $u_{df}$ между точками $d$ и $f$, то

$$[u_{d,f}]=[-R\ \ -1]\begin{bmatrix} i_1 \\ u_C \end{bmatrix}+[1\ 0]\begin{bmatrix} E \\ J \end{bmatrix}.$$

Поясним переход от (8.67) к (8.69).

Решение неоднородного уравнения (8.67) можно получить в виде суммы полного решения однородного уравнения и частного решения неоднородного. Полное решение однородного уравнения

$$[x]=[M][x] \text{ для } t \geqslant \tau, \tag{8.75}$$

где $\tau$ — постоянная величина, найдем по аналогии с решением скалярного дифференциального уравнения $\dot{x}=mx$, $x=e^{m(t-\tau)}x(\tau)$, в виде

$$[x_n(t)]=e^{[M](t-\tau)}\{x_n(\tau)\}. \tag{8.76}$$

Подставив (8.76) в (8.75), убедимся в справедливости решения однородного уравнения (8.75). Функцию $e^{[M]t}$ обозначим $[\varphi(t)]$, а $e^{[M](t-\tau)}=[\varphi(t-\tau)]$. Так как

$$e^{[M]t}=[1]+[M]t+\frac{[M]^2t^2}{2!}+\ldots, \text{ то } [\varphi(0)]=[1].$$

В соответствии с методом вариации произвольных постоянных частное решение неоднородного уравнения представим в виде $[x_ч(t)]=[\varphi(t-\tau)][u(t)][x(\tau)]$.

Общее решение

$$[x(t)]=[\varphi(t-\tau)][x(\tau)]+[\varphi(t-\tau)][u(t)][x(\tau)]=[\varphi(t-\tau)][[1]+[u(t)]][x(\tau)]=$$
$$=[\varphi(t-\tau)][R(t)],$$

где $R(t)$ нужно определить.

Подставим

$$[x(t)]=[\varphi(t-\tau)][R(t)] \tag{8.77}$$

в уравнение (8.67):

$$[[\dot{\varphi}(t-\tau)]-[M][\varphi(t-\tau)]][R(t)]+[\varphi(t-\tau)][\dot{R}(t)]=[N][z]. \tag{8.78}$$

Поскольку $[\varphi(t-\tau)]$ есть матрица, столбцы которой являются решением уравнения (8.75), то первый член выражения (8.78) — нулевая матрица. Следовательно,

$$[\dot{R}(t)]=[\varphi(t-\tau)]^{-1}[N][z]. \tag{8.79}$$

Проинтегрируем (8.79) от $\tau$ до $t$:

$$[R(t)]-[R(\tau)]=\int_\tau^t[\varphi(\lambda-\tau)]^{-1}[N][z]d\lambda. \tag{8.80}$$

Из уравнений (8.77) и (8.80) следует

$$[\varphi(t-\tau)]^{-1}[x(t)]=[\varphi(0)]^{-1}[x(\tau)]+\int_\tau^t[\varphi(\lambda-\tau)]^{-1}[N][z(\lambda)]\,d\lambda, \tag{8.81}$$

но $[\varphi(0)]=[1]$. Умножая (8.81) слева на $[\varphi(t-\tau)]$ и учитывая, что

$$[\varphi(t-\tau)][\varphi(\lambda-\tau)]^{-1}=e^{[M](t-\tau)}e^{-[M](\lambda-\tau)}=e^{[M](t-\lambda)}=[\varphi(t-\lambda)],$$

получим

$$[x(t)]=[\varphi(t-\tau)][x(\tau)]+\int_\tau^t[\varphi(t-\lambda)][N][z(\lambda)]d\lambda. \tag{8.82}$$



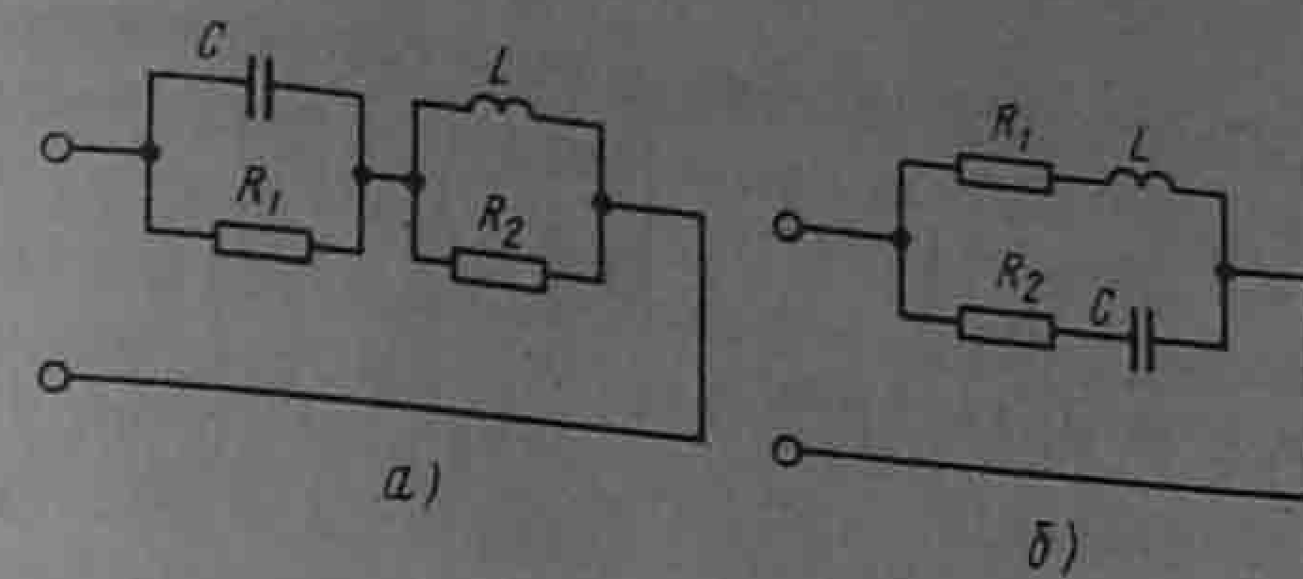



Рис. 8.44

Полагая в (8.82) $\tau=0$ и заменяя затем переменную $\lambda$ на $\tau$, получим формулу (8.69).

## § 8.64. Дополняющие двухполюсники.

Два двухполюсника, содержащие элементы $R$, $L$, $C$, называют дополняющими, если входное сопротивление при их последовательном (параллельном) соединении оказывается чисто активным, не зависящим от комплексной частоты $p$. Так, двухполюсник из параллельно соединенных $L$ и $R_2$ и двухполюсник из параллельно соединенных $C$ и $R_1$ (рис. 8.44, *а*) являются дополняющими при их последовательном соединении и выполнении условия $R_1=R_2=R=\sqrt{L/C}$. Двухполюсники $R_2$, $C$ и $R_1$, $L$ при их параллельном соединении (рис. 8.44, *б*) являются дополняющими при том же условии.

Элементы двух дополняющих двухполюсников взаимно дуальны. Элементам $L_1$, $C_1$, $R_1$ одного соответствуют такие дуальные элементы $C_2$, $L_2$, $R_2$ дополняющего, что произведение сопротивлений двух взаимно дуальных элементов должно быть равно $R^2$, где $R$ — произвольное активное сопротивление.

Последовательное соединение $L_1$ и $C_1$ в исходном двухполюснике заменяют на параллельное соединение $C_2=L_1/R^2$ и $L_2=C_1R^2$ в дополняющем. Параллельное соединение $C_1$ и $L_1$ в исходном двухполюснике заменяют на последовательное соединение $L_2=C_1R^2$ и $C_2=L_1/R^2$ в дополняющем.

## § 8.65. Системные функции и понятие о видах чувствительности.

Системные функции $H(p)$ — это обобщенное название функций, характеризующих четырехполюсник. Ими могут быть, например, передаточная функция напряжения $U_2(p)/U_1(p)$, передаточная функция тока $I_2(p)/I_1(p)$ и т. п. Если какой-либо параметр ($R$, $L$, $C$) в схеме четырехполюсника изменяется, то изменяются модуль и аргумент системной функции и можно говорить о чувствительности системной функции к изменению этого параметра.

Под *классической чувствительностью* понимают отношение относительного изменения функции $\Delta H(p)/H(p)$ к относительному изменению параметра $\Delta x/x$

$$S_x^{H(p)}=\lim\left(\frac{\Delta H}{H}:\frac{\Delta x}{x}\right)=\frac{x}{H(p)}\frac{dH(p)}{dx}.$$

Применительно к установившемуся синусоидальному режиму рассматривают чувствительность модуля и чувствительность аргумента $H(j\omega)$.

Для резонансных систем с высокой добротностью пользуются понятием *корневой чувствительности,* имея в виду чувствительность $H(p)$ к изменению положения нуля или полюса этой функции, находящегося вблизи мнимой оси плоскости комплексной частоты. Понятие чувствительности используют главным образом в задачах синтеза. Электрические цепи стремятся сформировать так, чтобы они были по возможности малочувствительны к изменению параметра. Если $H(p)$ зависит от многих параметров и все они могут изменяться, то верхней границей возможной ошибки считают сумму модулей чувствительностей по всем параметрам. При определении классической чувствительности можно воспользоваться теоремой вариаций (см. § 2.19) и теоремой Теллегена (см. § 3.43).

**§ 8.66. Обобщенные функции и их применение к расчету переходных процессов.** *Обобщенными функциями* (ОФ) называют функции времени $f(t)$, которые терпят разрыв, например, при $t = 0$. Значение функции при $t < 0$ обозначим $f_-(t)$, при $t > 0$ $f_+(t)$ (рис. 8.41, *г*). Имея в виду фильтрующее свойство единичных функций, можно записать

$$f\{t\} = f_-(t)1(-t) + f_+(t)1(t).$$

В общем случае $f(t)$ может содержать также $\delta$-функцию и ее производные. Производная от $f(t)$

$$\frac{df\{t\}}{dt} = f'_-(t)1(-t) + f'_+(t)1(t) + f_-(t)\frac{d1(-t)}{d(-t)}\frac{d(-t)}{dt} + f_+(t)\frac{d1(t)}{dt} =$$

$$= f'_-(t)1(-t) + f'_+(t)1(t) + \delta(t)[f_+(0) - f_-(0)].$$

Используя ОФ, можно решать задачи на переходные процессы, о которых говорилось в § 8.28, а также задачи на импульсные воздействия. В этом случае необходимо составить уравнения для послекоммутационной схемы, выразить токи, напряжения и их производные через ОФ, и воспользовавшись фильтрующим свойством $1(-t)$, $1(t)$ и $\delta(t)$, приравнять в этих уравнениях коэффициенты, содержащие только $1(-t)$, только $1(t)$ и только $\delta(t)$, и затем решить их совместно.

**Пример 107.** Путем использования обобщенных функций решить задачу примера 86 (см. рис. 8.24).

Р е ш е н и е. В уравнении для послекоммутационной схемы

$$R\left(C_1\frac{du_{C1}}{dt} + C_2\frac{du_{C2}}{dt}\right) + u_{C1} = E \qquad (а)$$

подставим

$$u_{C1} = u_{C1-}(t)1(-t) + u_{C1+}(t)1(t); \quad u_{C2} = u_{C2-}(t)1(-t) + u_{C2+}(t)1(t);$$



$$u'_{C1} = u'_{C1-}(t)1(-t) + u'_{C+}(t)1(t) + \delta(t)[u_{C1}(0_+) - u_{C1}(0_-)];$$

$$u'_{C2} = u'_{C2-}(t)1(-t) + u'_{C2+}(t)1(t) + \delta(t)[u_{C2}(0_+) - u_{C2}(0_-)];$$

$$E = E1(-t) + E1(t).$$

Коэффиценты при $1(-t)$, $1(t)$ и $\delta(t)$ дают три уравнения:

$$R[C_1u'_{C1+}(t) + C_2u'_{C2-}(t)] + u_{C1-}(t) = E; \qquad (б)$$

$$R[C_1u'_{C1+}(t) + C_2u'_{C2+}(t)] + u_{C1+}(t) = E; \qquad (в)$$

$$u_{C1}(0_+)(C_1 + C_2) = C_1u_{C1}(0_-) + C_2u_{C2}(0_-). \qquad (г)$$

Из (б) $u_{C1-}(t) = E$, из (г) $u_{C1}(0_+) = C_1E/(C_1 + C_2)$; далее решаем (в) классическим или операторным методом, имея в виду, что $u_{C1+}(t) = u_{C2+}(t)$. В результате получаем тот же ответ, что и в примере 86.

**§ 8.67. Интеграл Дюамеля для огибающей.** Положим, что на вход четырехполюсника, имеющего переходную функцию $h(t)$, воздействует синусоидальное напряжение единичной амплитуды $u_1(t) = 1\sin\omega t = \mathrm{Im}\, e^{j\omega t}$. Тогда, используя формулу интеграла Дюамеля, определим: напряжение на выходе четырехполюсника:

$$u_2(t) = \mathrm{Im}\left\{[h(0) + \int_0^t h'(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau]\,e^{j\omega t}\right\} = \mathrm{Im}\left\{a(\omega, t)\,e^{j\omega t}\right\}. \qquad (а)$$

Здесь

$$a(\omega, t) = h(0) + \int_0^t h'(\tau)\,e^{-j\omega\tau}d\tau = m(\omega, t) + jn(\omega, t) = q(\omega, t)\,e^{j\varphi(\omega, t)}, \qquad (б)$$

где $a(\omega, t)$ — огибающая выходного напряжения при воздействии синусоидального $u_1(t)$. Воздействуем на вход четырехполюсника амплитудно-модулированным синусоидальным напряжением $u_1(t) = \mathrm{Im}\left\{U_m(t)\,e^{j\omega t}\right\}$ и определим

$$u_2(t) = \mathrm{Im}\left\{[h(0)U_m(t) + \int_0^t h'(\tau)U_m(t-\tau)\,e^{-j\omega\tau}d\tau]\,e^{j\omega t}\right\}.$$

Учтем, что $\dfrac{da(\omega, t)}{dt} = h'(\tau)e^{-j\omega\tau} = a'(\omega, \tau)$ и $h(0) = a(\omega, 0)$. Тогда

$$u_2(t) = \mathrm{Im}\left\{A(\omega, t)\,e^{j\omega t}\right\}, \qquad (в)$$

где

$$A(\omega, t) = a(\omega, 0)U_m(t) + \int_0^t a'(\omega, \tau)U_m(t-\tau)d\tau; \qquad (г)$$

$A(\omega, t)$ — огибающая выходного напряжения. Формулу (г) называют *интегралом Дюамеля для огибающей*, она позволяет, не вдаваясь в мелкие детали, выявить макроструктуру переходного процесса.

**Пример 108.** Определим огибающую тока в цепи, когда на вход последовательно соединенных $R$ и $L$ воздействует напряжение $u_1(t) = kt\sin\omega t$. Вместо $h(t)$ используем $g(t) = \frac{1}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t})$. В соответствии с формулой (б)

$$a(\omega, t) = g(0) + \int_0^t g'(\tau)\, e^{-j\omega\tau} d\tau = \frac{1}{R + j\omega L}[1 - e^{-qt}]; \quad q = \frac{R}{L} + j\omega.$$

Учтем, что $g(0) = 0$, $a'(\omega, \tau) = \frac{1}{L}e^{-q\tau}$, $U_m(t - \tau) = k(t - \tau)$.

Огибающая тока в цепи по формуле (г):

$$A(\omega, t) = \frac{k}{L}\int_0^t (t - \tau)e^{-q\tau}d\tau = \frac{kt}{R + j\omega L} + \frac{kL}{(R + j\omega L)^2}(e^{-qt} - 1) = \frac{kL}{R^2 + (\omega L)^2}\times$$

$$\times\sqrt{\left[\frac{Rt}{L} + e^{-\frac{Rt}{L}}\cos(\omega t + 2\varphi) - \cos 2\varphi\right]^2 + \left[\omega t + e^{-\frac{Rt}{L}}\sin(\omega t + 2\varphi) - \sin 2\varphi\right]^2}\; e^{-\beta(\omega, t)};$$

$$\beta(\omega, t) = \operatorname{arctg}\frac{\omega t + e^{-\frac{Rt}{L}}\sin(\omega t + 2\varphi) - \sin 2\varphi}{\frac{Rt}{L} + e^{-\frac{Rt}{L}}\cos(\omega t + 2\varphi) - \cos 2\varphi}; \quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{\omega L}{R}.$$

### Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение переходному процессу. 2. Что понимают под принужденными и свободными токами и напряжениями? 3. Сформулируйте законы (правила) коммутации. 4. Дайте определение зависимым и независимым начальным условиям. 5. Какие вы знаете способы составления характеристического уравнения. 6. Объясните, почему при составлении характеристического уравнения путем приравнивания нулю входного сопротивления $Z(p) = N(p)/M(p)$ в общем случае нельзя сокращать числитель и знаменатель дроби на общий множитель. 7. Чем определяется число корней характеристического уравнения? 8. Изложите сущность классического метода расчета и принцип составления уравнений для определения постоянных интегрирования. 9. Переходный процесс в некоторой цепи сопровождается биениями. О чем это может свидетельствовать? 10. Дайте обоснование обобщенным законам коммутации. 11. Запишите известные вам соотношения между $f(t)$ и $F(p)$, а также теоремы операторного метода и предельные соотношения. 12. Почему $p$ называют комплексной частотой? 13. Охарактеризуйте этапы расчета операторным методом. 14. В чем особенности расчета переходных процессов операторным методом при синусоидальном источнике и ненулевых начальных условиях? 15. Охарактеризуйте свойства единичной функции $1(t)$ и свойства дельта-функции $\delta(t)$. 16. Определите переходную и импульсную переходную проводимости (сопротивления) и функции. Укажите, с какой целью они используются. 17. Охарактеризуйте идею расчета с помощью интеграла Дюамеля. 18. Прокомментируйте известные вам формы записи интеграла Дюамеля. 19. Какими способами можно определить отзвук системы, когда на нее воздействует импульс напряжения или тока? 20. Поясните принцип работы интегрирующих и дифференцирующих цепей. Запишите условия, при которых эти цепи выполняют свои функции. 21. Чем следует руководствоваться при формировании дополняющих двухполюсников? 22. Поясните идею расчета переходных процессов с помощью обобщенных функций. 23. Перечислите основные этапы расчета методом переменных состояния. 24. Как составляют уравнения переменных состояния путем сведения послекоммутационной схемы к чисто резистивной? 25. Охарактеризуйте сильные и относительно слабые стороны известных вам методов расчета переходных процессов. 26. Что понимают под системными функциями?



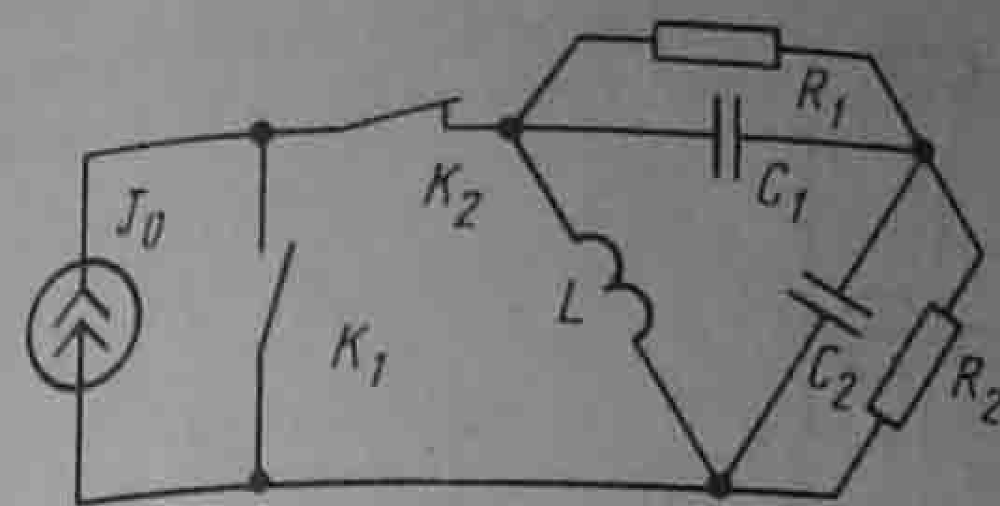
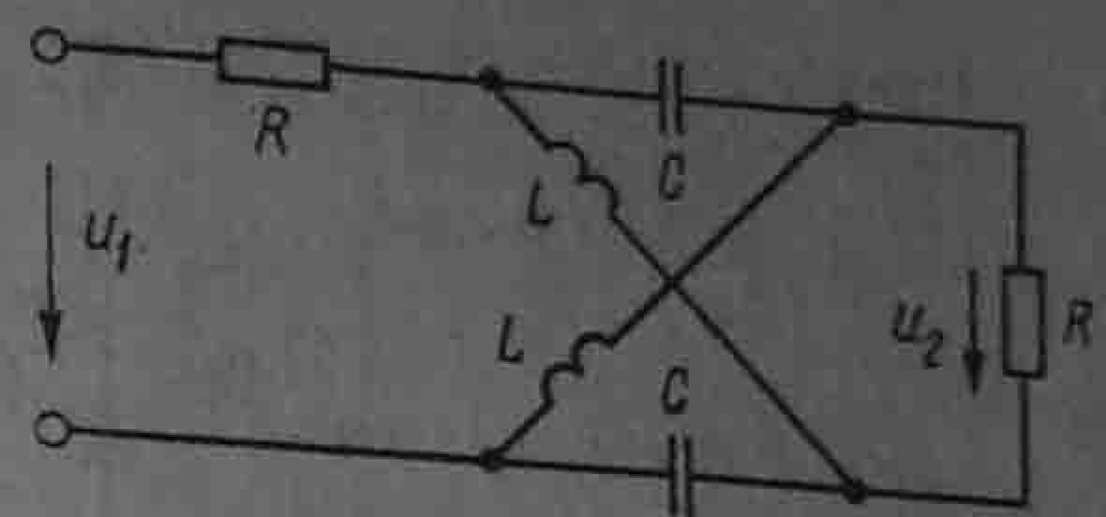
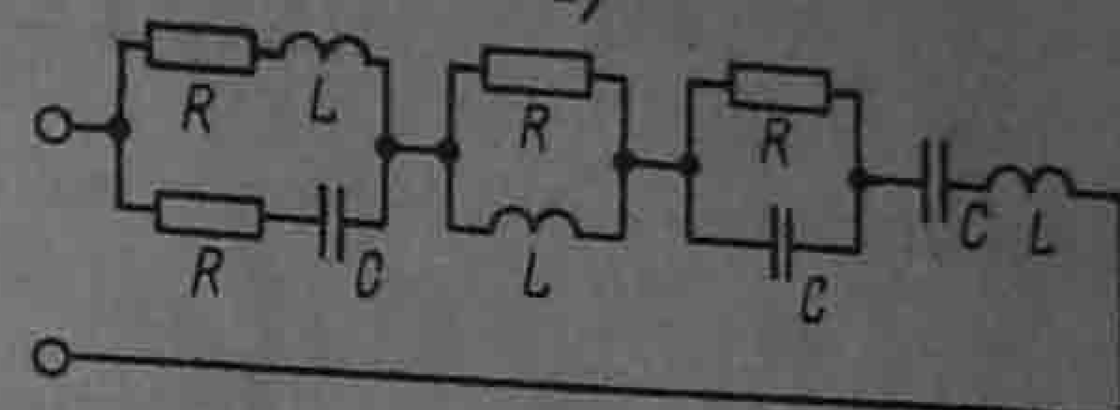


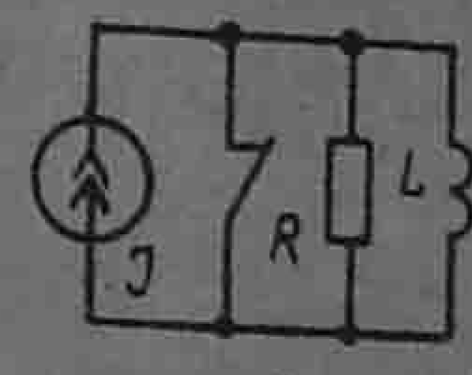
Рис. 8.45



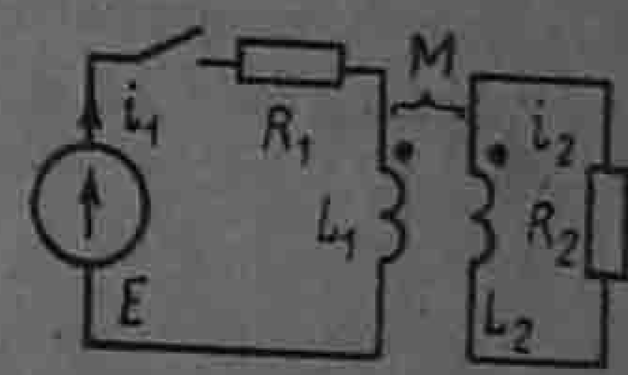
а)



б)



в)



г)

Рис. 8.46 ⟶

Какие виды чувствительности системных функций вы знаете? **27.** В схеме рис. 8.45 с источником тока $J_0$ в момент $t = 0$ одновременно размыкается ключ $K_2$ и замыкается $K_1$. Показать, что заряды, протекшие через сопротивление $R_1$ и $R_2$ за время от 0 до ∞, не зависят от емкостей $C_1$ и $C_2$. Определить величины этих зарядов. (*Ответ:* $\frac{LJ_0}{1 + (R_2/R_1)}$ и $\frac{LJ_0}{1 + (R_1/R_2)}$.) **28.** В схеме рис. 8.4, *в* при размыкании ключа происходит переходный процесс. Определить законы изменения во времени напряжений $u_{C1}$ и $u_{C2}$ на конденсаторах. Задано $j(t) = 1\sin(\omega t + 90°)$ А, $R = 1/\omega C = 1$ Ом; $\omega = 100$ рад/с. [*Ответ:* $u_{C1} = 0{,}447\sin(\omega t + 63°27') - 0{,}253 - 0{,}15e^{-200t}$ В; $u_{C2} = 0{,}447\sin(\omega t + 63°27') + 0{,}253 - 0{,}15e^{-200t}$ В.] **29.** Покажите, что в симметричной мостовой схеме (рис. 8.46, *а*), в которой выполняется условие $L/C = R^2$, переходная функция $h(t) = -\frac{1}{2} + e^{-\frac{R}{L}t}$. **30.** В схеме рис. 8.46, *б* $R = L = C = 1$. Покажите, что входная переходная проводимость равна $te^{-t}$. **31.** Покажите, что энергия, запасаемая в $L$ схемы рис. 8.46, *в* (начальные условия нулевые), равны тепловым потерям в $R$. **32.** Первичная обмотка трансформатора рис. 8.46, *г* при нулевых начальных условиях подключается к источнику постоянной ЭДС $E$, $R_1 = R_2 = R$; $L_1 = L_2 = M$. Определите $i_1(0_+)$, $i_2(0_+)$. [*Ответ* $i_1(0_+) = -i_2(0_+) = E/(2R)$.] **33.** Определите степень характеристического уравнения для схемы рис. 8.47. (*Ответ* — пятая.) **34.** Как определить $K(p)$ через $h(t)$ и через $h^\delta(t)$? **35.** По $h(t) = \frac{1}{3}(1 + 2e^{-\frac{3R}{L}t})$ четырехполюсника определите его $K(j\omega)$. (*Ответ:* $\frac{R + j\omega L}{3R + j\omega L}$.) **36.** По $K(j\omega) = \frac{-\omega^2 RLC}{R - RC\omega^2 L + j\omega L}$ некоторого четырехполюсника определите его $h(t)$ при $R = 0{,}2$ Ом, $C = 5$ Ф, $L = 1$ Гн. (*Ответ:* $h(t) = 1{,}62e^{-0{,}724t} - 0{,}62e^{-0{,}276t}$.) **37.** На вход четырехполюсника с

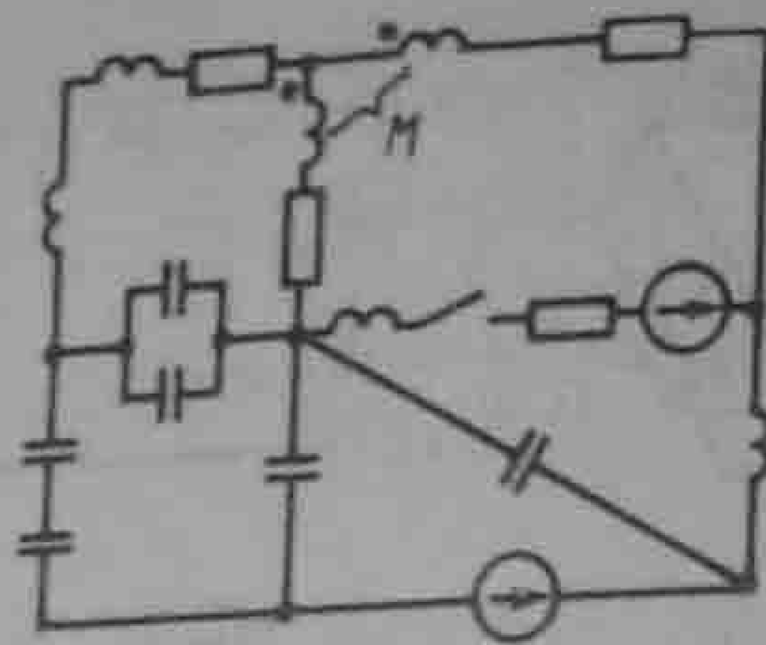



Рис. 8.47

$K(j\omega)=\dfrac{j\omega}{1+j2\omega}$ воздействует единичный импульс напряжения в виде δ-функции. Определите напряжение на выходе четырехполюсника после окончания действия импульса. (*Ответ*: $0{,}25e^{-0.5t}$.) 38. Решите задачи 11.4; 11.12; 11.15; 11.26; 11.29; 11.32; 11.38; 11.40; 11.47; 11.50; 11.55; 11.57.

## Глава девятая

# ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ. СПЕКТРАЛЬНЫЙ МЕТОД. СИГНАЛЫ

**§ 9.1. Ряд Фурье в комплексной форме записи.** Как известно из предыдущего (см. § 7.2), в ряд Фурье можно разложить любую периодическую функцию $f(t)$, удовлетворяющую условиям Дирихле.

Обозначим период функции $T$, а основную частоту — $\omega_0=2\pi/T$. Ряд Фурье можно записать двояко.

Первая форма записи:

$$f(t)=A_0+\sum_{k=1}^{\infty}A_k\sin(k\omega_0 t+\psi_k); \tag{9.1}$$

вторая форма записи:

$$f(t)=A_0+\sum_{k=1}^{\infty}(A_k'\sin k\omega_0 t+A_k''\cos k\omega_0 t), \tag{9.1a}$$

где $A_0$ — постоянная составляющая ряда; $A_k$ — амплитуда $k$-гармоники ряда; $\psi_k$ — начальная фаза $k$-гармоники;

$$A_k'=A_k\cos\psi_k;\ A_k''=A_k\sin\psi_k;$$

$$A_0=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)dt; \tag{9.2}$$



$$A_k'=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\sin k\omega_0 t\,dt; \tag{9.3}$$

$$A_k''=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\cos k\omega_0 t\,dt. \tag{9.4}$$

Из курса математики известно, что $\sin x=(e^{jx}-e^{-jx})/(2j)$. Следовательно,

$$\sin(k\omega_0 t+\psi_k)=\frac{1}{2j}[e^{j(k\omega_0 t+\psi_k)}-e^{-j(k\omega_0 t+\psi_k)}]. \tag{9.5}$$

Подставив правую часть формулы (9.5) в выражение (9.1), получим

$$f(t)=A_0+\frac{1}{2j}\sum_{k=1}^{\infty}A_k[e^{j(k\omega_0 t+\psi_k)}-e^{-j(k\omega_0 t+\psi_k)}]. \tag{9.5a}$$

Обозначим

$$\dot A_k=A_k e^{j\psi_k}; \tag{9.6}$$

$$\dot A_{-k}=-A_k e^{-j\psi_k}. \tag{9.7}$$

Тогда ряд (9.5а) можно записать так:

$$f(t)=A_0+\frac{1}{2j}\sum_{k=-\infty}^{k=\infty}\dot A_k e^{jk\omega_0 t}. \tag{9.8}$$

Формула (9.8) представляет собой комплексную форму записи ряда Фурье. Текущий индекс $k$ может принимать все целые числовые значения от $-\infty$ до $+\infty$, но не может равняться нулю, так как постоянная составляющая ряда выделена в виде отдельного слагаемого.

**Пример 109.** Представить функцию $f(t)=2+3\sin(\omega_0 t+30°)+2\sin(2\omega_0 t-45°)$ в комплексной форме записи.

Решение. $A_0=2$; $\dot A_1=3e^{j30°}$; $\dot A_{-1}=-3e^{-j30°}$; $\dot A_2=2e^{-j45°}$; $\dot A_{-2}=-2e^{j45°}$;

$$f(t)=2+\frac{1}{2j}[3e^{j(\omega_0 t+30°)}-3e^{-j(\omega_0 t+30°)}+2e^{j(2\omega_0 t-45°)}-2e^{-j(2\omega_0 t+45°)}].$$

Составим выражение для комплексной амплитуды $\dot A_k$. По определению [см. формулу (9.6)],

$$\dot A_k=A_k e^{j\psi_k}=A_k\cos\psi_k+jA_k\sin\varphi_k=A_k'+jA_k'', \tag{9.9}$$

где $A_k'$ определяется формулой (9.3), $A_k''$ — формулой (9.4).

Подставим правые части формул (9.3) и (9.4) в формулу (9.9):

$$A_k = \frac{2}{T}\int\limits_{-T/2}^{T/2} f(t)(\sin k\omega_0 t + j\cos k\omega_0 t)\mathrm{d}t = \frac{2j}{T}\int\limits_{-T/2}^{T/2} f(t)(\cos k\omega_0 t - j\sin k\omega_0 t)\mathrm{d}t,$$

или

$$\dot{A}_k = \frac{2j}{T}\int\limits_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-jk\omega_0 t}\mathrm{d}t. \qquad (9.10)$$

Подставим правую часть формулы (9.10) в формулу (9.8):

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} e^{jk\omega_0 t}\frac{1}{T}\int\limits_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-jk\omega_0 t}\mathrm{d}t. \qquad (9.11)$$

**§ 9.2. Спектр функции и интеграл Фурье.** Ряд Фурье — это тригонометрический ряд, представляющий собой изображение периодической функции суммой синусоид, амплитуды которых конечны, а аргументы кратны основной частоте $\omega_0$.

Под интегралом Фурье понимают тригонометрический ряд, представляющий непериодическую функцию суммой бесконечно большого числа синусоид, амплитуды которых бесконечно малы, а аргументы соседних синусоид отличаются на бесконечно малые значения.

Формулу для интеграла Фурье получают из формулы для ряда Фурье [из формулы (9.11)] предельным переходом при стремлении периода $T$ к бесконечности.

На функцию $f(t)$ при представлении ее интегралом Фурье накладывают ограничение, а именно, полагают, что $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ есть величина конечная (не бесконечно большая). Это серьезное ограничение. Ряд функций этому условию не удовлетворяет[1].

---

[1]Среди функций $f(t)$, для которых интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)dt$ расходится, наиболее важной для практики является функция $f(t) = A$, где $A$ — постоянное число. Для того чтобы эту функцию представить интегралом Фурье пользуются следующим приемом. Находят интеграл Фурье для функции $f(t) = Ae^{-\beta t}$, где $\beta > 0$ и $f(t) = 0$ при $t < 0$. Для этой функции $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)dt$ сходится, поэтому она может быть представлена интегралом Фурье. Далее в полученном выражении устремляют $\beta$ к нулю.



Так как по определению [см. формулу (9.2)], $A_0 = \frac{1}{T}\int\limits_{-T/2}^{T/2} f(t)\mathrm{d}t$, а при $T\to\infty$ $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ есть величина конечная, то $A_0 = 0$.

Преобразуем выражение $\frac{1}{T}\int\limits_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-jk\omega_0 t}\mathrm{d}t$, стоящее под знаком суммы в формуле (9.11). С этой целью произведение $k\omega_0$ заменим на $\omega$ [под $\omega$ будем понимать изменяющуюся (текущую) частоту]. В ряде Фурье разность двух смежных частот $\Delta\omega = \omega_0 = 2\pi/T$. Следовательно, $1/T = \Delta\omega/(2\pi)$.

При $T\to\infty$ заменив $\Delta\omega$ дифференциалом $\mathrm{d}\omega$, получим

$$\frac{1}{T}\int\limits_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-jk\omega_0 t}\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t.$$

Обозначим

$$S(j\omega) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t. \qquad (9.12)$$

Формула (9.12) дает возможность преобразовать функцию времени $f(t)$ в функцию частоты $S(j\omega)$; преобразование (9.12) называют *прямым преобразованием Фурье*, а $S(j\omega)$ — *спектром функции* $f(t)$. Это комплексная величина, зависящая от вида функции $f(t)$. В соответствии с (9.12) в (9.11) заменим $\frac{1}{T}\int\limits_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{j\omega t}dt$ на $\frac{1}{2\pi}S(j\omega)\mathrm{d}\omega$ и учтем, что при изменении $k$ от $-\infty$ до $+\infty$ $\omega = k\omega_0$ также изменяется от $-\infty$ до $+\infty$. Следовательно,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{\omega=-\infty}^{\omega=+\infty} S(j\omega)e^{j\omega t}\mathrm{d}\omega.$$

Заменив сумму интегралом, найдем

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} S(j\omega)e^{j\omega t}\mathrm{d}\omega. \qquad (9.13)$$

Формула (9.13) представляет собой запись *интеграла Фурье (формулу обратного преобразования Фурье)*. Она выражает непериодическую функцию $f(t)$ в виде бесконечно большого числа синусоидальных колебаний с бесконечно близкими частотами и бесконечно малыми амплитудами $S(j\omega)\mathrm{d}\omega$ [$S(j\omega)$ конечно, но произведение $S(j\omega)\mathrm{d}\omega$ бесконечно мало, так как бесконечно мало значение $\mathrm{d}\omega$].

В соответствии с формулой (9.13) для нахождения реакции системы на любое воздействие следует его представить в виде бесконечно большого числа гармонических воздействий, символическим методом найти реакцию системы на каждое из воздействий и затем просуммировать реакцию на все воздействия.

Преобразования (9.12) и (9.13) являются взаимно обратными.

Отметим, что представление функции $f(t)$ в комплексной форме в виде интеграла Фурье [формулы (9.13)] привело к необходимости формально ввести отрицательную угловую частоту. При этом сумма слагаемых подынтегральной функции (9.13) при $\pm\omega$ дает синусоидальные колебания частоты $\omega$.

Сопоставим формулу (9.12) с формулой преобразования по Лапласу:

$$F(p) = \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt, \tag{9.14}$$

если $f(t) = 0$ при $t < 0$.

Если учесть, что $f(t) = 0$ при $t < 0$, и заменить $p$ на $j\omega$, то (9.14) переходит в (9.12). Следовательно, формулы для спектра функции $S(j\omega)$ могут быть получены из соответствующих выражений для изображений по Лапласу, если в последних $p$ заменить на $j\omega$.

Пользуясь соотношениями § 8.39, найдем спектр функции $f(t) = e^{-\alpha t}$, полагая, что $f(t) = 0$ при $t < 0$.

Изображение по Лапласу $1/(\alpha + p)$. Заменим $p$ на $j\omega$ и получим спектр $S(j\omega) = 1/(\alpha + j\omega)$; $S(j\omega)$ есть комплексная величина, равная $S(\omega)e^{j\varphi_s}$. Модуль ее равен $1/\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}$, аргумент $\varphi_s = \mathrm{arctg}[-\omega/\alpha]$. Графики для экспоненциального импульса изображены на рис. 9.1, *а*, *б*.

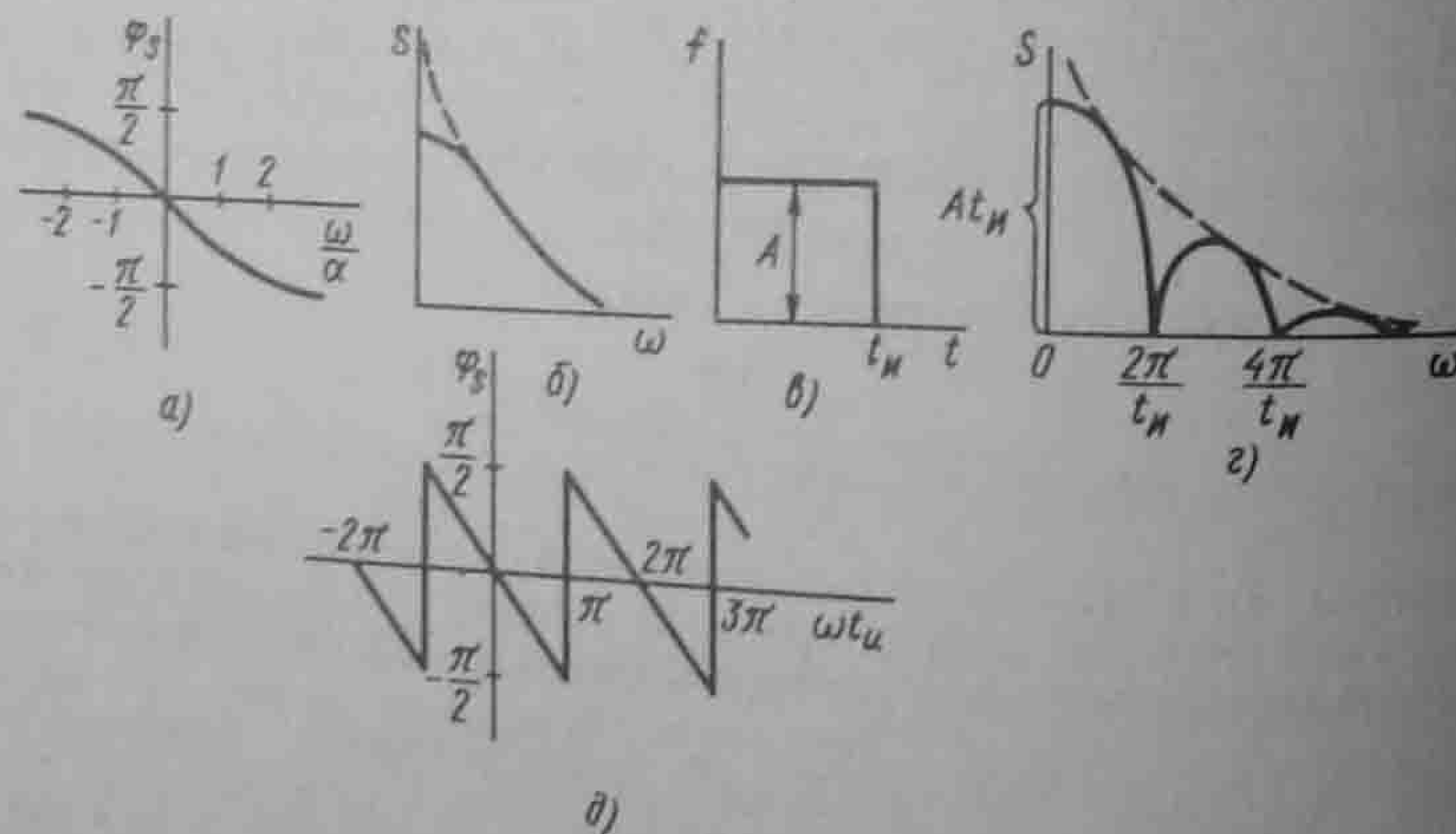



Рис. 9.1



**Пример 110.** Найти $S(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ для прямоугольного импульса (рис. 9.1, *в*) амплитудой $A$ и длительностью $t_и$.

Решение. По формуле (9.12) определим спектр

$$S(j\omega) = A\int_0^{t_и} e^{-j\omega t} dt = A\frac{1 - e^{-j\omega t_и}}{j\omega} = \frac{A}{j\omega}[1 - \cos\omega t_и + j\sin\omega t_и];$$

$$\sqrt{(1 - \cos\omega t_и)^2 + \sin^2\omega t_и} = \sqrt{2(1 - \cos\omega t_и)} = \sqrt{4\sin^2\frac{\omega t_и}{2}} = 2\left|\sin\frac{\omega t_и}{2}\right|.$$

Модуль

$$S(\omega) = \frac{2At_и}{\omega t_и}\sin\frac{\omega t_и}{2} = At_и\frac{|\sin\omega t_и|}{2}\Big/\frac{\omega t_и}{2}.$$

График этой функции приведен на рис. 9.1, *г*. Пунктиром показана огибающая. Аргумент $\varphi_s$ для прямоугольного импульса вычислим по формуле $\mathrm{tg}\varphi_s = \frac{\cos\omega t_и - 1}{\sin\omega t_и} = -\mathrm{tg}\frac{\omega t_и}{2}$. График $\varphi_s$ показан на рис. 9.1, *д*. При значениях $\omega t_и = \pi, 3\pi, \ldots$ $\varphi_s$ возрастает скачком на $\pi$.

Обратим внимание на то, что при определении $S(j\omega)$ путем замены $p$ на $j\omega$ в формуле для $F(p)$ следует соблюдать некоторую осторожность, если функция $f(t)$ имеет импульсный характер, иначе можно потерять импульсную компоненту в $S(j\omega)$ в виде дельта-функции. Например, изображение функции $1(t)$ по Лапласу равно $1/p$, тогда как спектр $S(j\omega)$ функции $1(t)$ равен не $1/j\omega$, а $\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$. Чтобы показать это, определим спектр функции $1(t)e^{-\beta t}$ $(\beta > 0)$, а затем устремим $\beta \to 0$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} 1(t) e^{-\beta t} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{\beta + j\omega} = \frac{\beta}{\beta^2 + \omega^2} - j\frac{\omega}{\beta^2 + \omega^2}.$$

Первое слагаемое правой части при $\beta \to 0$ и при $\omega \to 0$ стремится к бесконечности, т. е. имеет вид дельта-функции $a\delta(\omega)$, второе слагаемое правой части при $\beta \to 0$ равно $1/j\omega$. Чтобы вычислить коэффициент $a$, проинтегрируем $\beta/(\beta^2 + \omega^2) = a\delta(\omega)$ по $\omega$ от $-\infty$ до $+\infty$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta}{\beta^2 + \omega^2} d\omega = a\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega) d\omega.$$

Но $\beta\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\beta^2 + \omega^2} = \beta\frac{1}{\beta}\mathrm{arctg}\frac{\omega}{\beta}\Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$, а $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega) d\omega = 1$.

Поэтому $a = \pi$ и спектр $S(j\omega)$ функции $1(t)$ равен $\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$. В примере 110 при определении $S(j\omega)$ функции $f(t)$ (см. рис. 9.1, *в*) слагаемое в виде дельта-функции в спектре отсутствует, так как у функции имеются два равных по значению, но противоположных по

знаку скачка $[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}] - [\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}]e^{-j\omega\tau}$; при $\omega = 0$ слагаемые $\pi\delta(\omega)$ выпадают.

**§ 9.3. Спектр функции, смещенной во времени. Спектр суммы функций времени.** Если функции времени $f(t)$ соответствует спектр $S(j\omega)$, то функции $f(t-\tau)$ соответствует спектр $e^{-j\omega\tau}S(j\omega)$, что следует из теоремы смещения в области оригиналов (см. § 8.40), если заменить $p$ на $j\omega$.

Так как модуль функции $e^{-j\omega\tau}$ равен единице, то модуль спектра функции $f(t-\tau)$ равен модулю спектра функции $f(t)$, т. е. равен $S(\omega)$, однако аргумент спектра функции $f(t-\tau)$ отличается от аргумента спектра функции $f(t)$ на $-\omega\tau$.

Если $f(t)$ представляет собой сумму нескольких функций времени, например $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$, а каждая из них имеет спектр соответственно $S_1(j\omega)$ и $S_2(j\omega)$, то спектр $S(j\omega)$ функции $f(t)$ равен сумме спектров этих функций, т. е. $S(j\omega) = S_1(j\omega) + S_2(j\omega)$. Это следует из линейности преобразования (9.12). Однако модуль $S(\omega) \neq S_1(\omega) + S_2(\omega)$ и аргумент $\varphi_s(\omega) \neq \varphi_{s1}(\omega) + \varphi_{s2}(\omega)$.

**§ 9.4. Теорема Рейли.** Теорему Рейли (Релея) записывают следующим образом:

$$\int_0^{\infty} f^2(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} S^2(\omega)d\omega. \qquad (9.15)$$

Функция $f(t) = 0$ при $t<0$; $S(\omega)$ представляет собой модуль спектра $S(j\omega)$ функции $f(t)$:

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt. \qquad (9.16)$$

Если принять, что $f(t)$ есть напряжение, приложенное к активному сопротивлению в 1 Ом, то левая часть в (9.15) представляет собой энергию, выделяющуюся в этом сопротивлении.

Таким образом, площадь квадрата модуля спектра $S(\omega)$, разделенная на $\pi$, является энергией, рассеиваемой в активном сопротивлении, на которое воздействует $f(t)$.

Основой при выводе теоремы Рейли служит обратное преобразование Фурье:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S(j\omega)e^{j\omega t}d\omega.$$



Умножим обе части последнего равенства на $f(t)$ и проинтегрируем по $t$ от $-\infty$ до $+\infty$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)[\int_{-\infty}^{+\infty} S(j\omega)e^{j\omega t}d\omega]dt.$$

В правой части изменим порядок интегрирования:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)[\int_{-\infty}^{+\infty} S(j\omega)e^{j\omega t}d\omega]dt = \int_{-\infty}^{+\infty} S(j\omega)[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{j\omega t}dt]d\omega.$$

В соответствии с формулой (9.16)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{j\omega t}dt = S(-j\omega),$$

следовательно,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S(j\omega)S(-j\omega)d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S^2(\omega)d\omega.$$

Для перехода к формуле (9.15) учтем, что при $t<0$ функция $f(t) = 0$. Это дает возможность заменить в левой части нижний предел с $-\infty$ на 0. Приняв во внимание, что квадрат модуля $S^2(\omega)$ есть четная функция частоты, заменим $\int_{-\infty}^{+\infty}$ в правой части последнего уравнения на $2\int_0^{+\infty}$. В результате получим формулу (9.15).

Величину $S^2(\omega)$ называют *спектральной плотностью* энергии сигнала, а функцию $S^2(\omega) = f(\omega)$ — *энергетическим спектром*.

**§ 9.5. Применение спектрального метода.** Спектральный (частотный) метод исследования процессов в электрических цепях основан на использовании понятий спектров воздействующих импульсов и частотных свойств цепей. Особенно широко его применяют в радиотехнике при рассмотрении вопросов прохождения модулированных колебаний через усилители, фильтры и другие устройства, в импульсной технике при рассмотрении вопросов прохождения через четырехполюсники коротких импульсов длительностью порядка нескольких микросекунд, а в некоторых случаях даже нескольких наносекунд. Допускается, что модулированное колебание или соответственно импульс, пройдя через четырехполюсник, изменился по амплитуде, на некоторое время $t_0$ запоздал во времени, но недопустимо, чтобы существенно изменилась форма импульса (колебания) на выходе по сравнению с формой импульса

(колебания) на выходе. Недопустимость изменения формы импульса (колебания) следует из того, что именно в форме импульса (колебания) заключена информация, которую он несет.

Положим, что на вход некоторого четырехполюсника с передаточной функцией $K(j\omega) = K(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$ при нулевых начальных условиях воздействует сигнал $f_1(t)$, имеющий спектр $S_{вх}(j\omega)$. На выходе четырехполюсника появится сигнал $f_2(t)$, спектр которого

$$S_{вых}(j\omega) = K(j\omega)S_{вх}(j\omega), \tag{9.17}$$

где $S_{вх}(j\omega) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)e^{-j\omega t}dt.$

Так как сигнал $f_2(t)$ может отличаться от сигнала $f_1(t)$ по значению (по амплитуде), положим в $a$ раз, и запаздывать на некоторое время $t_0$, но по форме должен быть таким же, как и $f_1(t)$, то можно записать, что $f_2(t) = af_1(t - t_0)$.

Если к функции $f_2(t)$ применить преобразование Фурье, то окажется, что спектр функции $f_2(t)$ равен

$$aS_{вх}(j\omega)e^{-j\omega t_0}. \tag{9.18}$$

Сравнивая (9.17) и (9.18), замечаем, что

$$K(j\omega) = K(\omega)e^{j\varphi(\omega)} = ae^{-j\omega t_0}.$$

Следовательно, для прохождения импульса или модулированного колебания через четырехполюсник без искажения формы необходимо, чтобы модуль передаточной функции был постоянен (не зависел от частоты), а аргумент $\varphi(\omega) = -\omega t_0$ линейно изменялся в функции частоты (рис. 9.2, $a$).

В реальных четырехполюсниках эти условия могут быть выполнены лишь приближенно в некоторой полосе частот, которую называют *полосой пропускания*. Полоса пропускания ограничена значениями $\omega$, при которых отношение масимального значения $K(\omega)$ к минимальному равно $\sqrt{2}$ (рис. 9.2, $б$). Такой характеристикой обладает, например, схема рис. 3.42, $a$. Для этой полосы приближенно полагают, что $K(\omega) = \text{const}$; $\varphi(\omega) = -\omega t_0$.

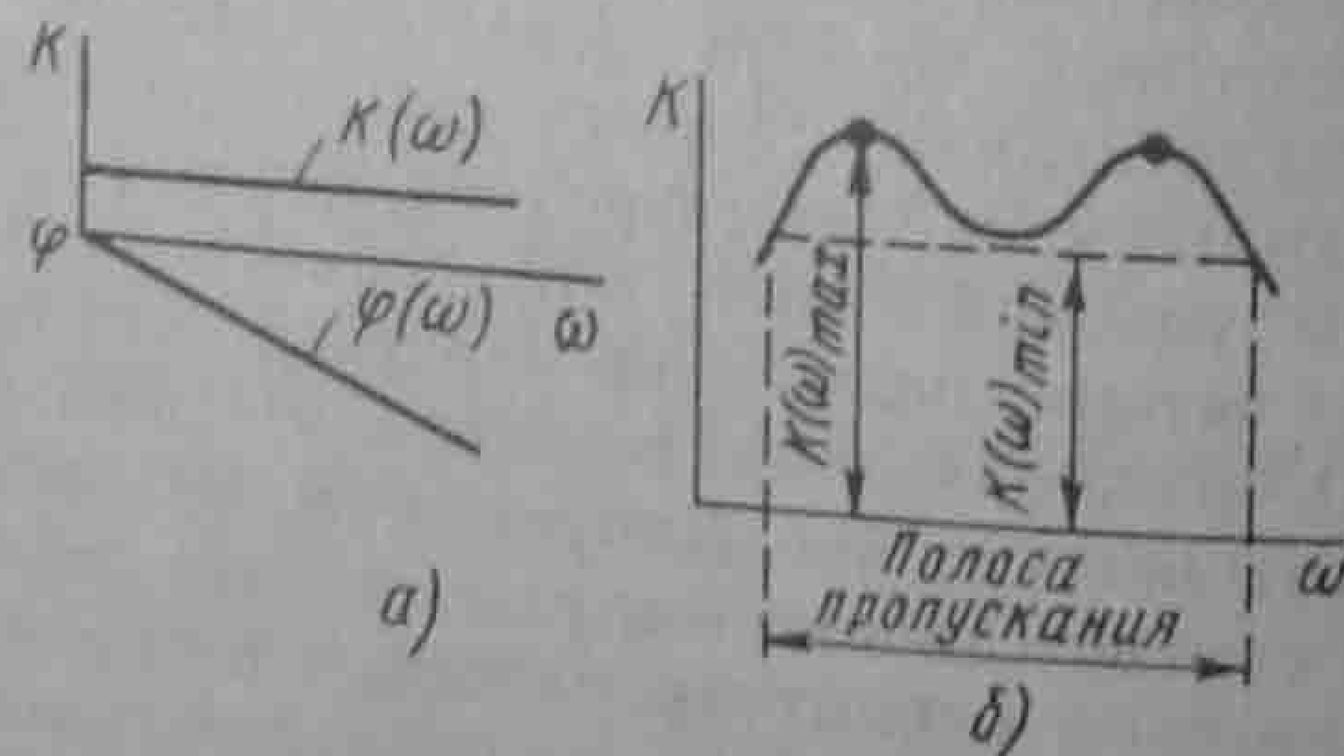



Рис. 9.2



Для того чтобы сигнал при прохождении через четырехполюсник не изменил своей формы, необходимо, чтобы важнейшие гармонические составляющие частотного спектра сигнала находились внутри полосы пропускания четырехполюсника. Для импульсных сигналов треугольной, трапецеидальной, прямоугольной, колоколообразной и некоторых других форм принимают, что они занимают полосу частот от $\omega = 0$ до $\omega = 2\pi/t_и$, где $t_и$ — длительность импульса.

Если же необходимо передать через четырехполюсник основную часть энергии сигнала (например, 90 % энергии сигнала), то полосу частот можно сузить примерно до $0 \div 1/t_и$.

Так как в полосе пропускания идеальные условия для прохождения импульса все же не выполняются, то, проходя через четырехполюсник, импульс в какой-то степени искажается. Определить степень искажения можно двумя способами, основанными на частотных представлениях.

Первый способ состоит в непосредственном применении прямого и обратного преобразований Фурье.

Основные этапы этого способа таковы: 1) нахождение спектра $U_1(j\omega)$ входного сигнала $u_1(t)$; 2) определение передаточной функции четырехполюсника $K(j\omega)$; 3) получение спектра выходного сигнала $U_2(j\omega) = K(j\omega)\ U_1(j\omega)$; 4) вычисление $u_2(t)$ по $U_2(j\omega)$.

Последнюю операцию можно осуществить с помощью формулы (9.13), но практически ее удобнее выполнить, используя таблицу изображения по Лапласу, заменив $j\omega$ на $p$ в $U_2(j\omega)$.

Такое решение мало чем отличается от решения той же задачи операторным методом и для сложных схем оказывается малопригодным, поскольку решение достаточно громоздко, и, пользуясь им, трудно сделать вывод о том, как тот или иной конкретный элемент схемы при неизменных остальных влияет на фронт и на вершину импульса. Пользуясь этим методом, трудно также судить о том, какие элементы схемы в наибольшей степени влияют на деформацию фронта, какие — на деформацию вершины импульса.

В литературе по импульсной технике получил распространение второй способ решения, также основанный на спектральных представлениях. В основу его положено то обстоятельство, что искажение формы фронта выходного импульса по сравнению с формой фронта входного импульса зависит от свойств передаточной функции четырехполюсника на высоких (теоретически на бесконечно больших) частотах, а искажение вершины импульса определяется свойствами передаточной функции на низких частотах (теоретически на частотах, близких к нулю).

Эти положения соответствуют предельным теоремам операторного метода (см. § 8.4).

Для того чтобы выяснить влияние отдельных элементов схемы

на искажение формы импульса, прежде всего составляют полную схему замещения четырехполюсника, учитывая в ней все факторы, влияющие на частотные свойства [паразитные емкости ламп, импульсных трансформаторов, индуктивности рассеяния трансформаторов, емкостные свойства *p-n*-переходов транзисторов, зависимость коэффициентов усиления транзисторов от скорости процесса (от частоты ω)].

Затем из полной схемы замещения образуют две расчетные схемы. Первая схема представляет собой *расчетную схему для высоких частот* и позволяет определить степень искажения фронта импульса. Эту схему получают из полной схемы замещения путем закорачивания последовательно включенных конденсаторов по пути следования сигнала (относительно больших по сравнению с паразитными) и разрыва индуктивных элементов, включенных параллельно резистивным элементам схемы.

Вторая схема представляет собой *расчетную схему для низких частот* и служит для выяснения степени деформирования вершины импульса. Эту схему получают из полной схемы замещения, оставляя в ней последовательно включенные конденсаторы по пути следования сигнала, а также индуктивные элементы, включенные параллельно резистивным сопротивлениям, и закорачивая последовательные индуктивные элементы по пути следования сигнала. Паразитные емкости в низкочастотной схеме не учитывают.

В каждой из этих расчетных схем с учетом упрощений, рассмотренных в § 8.16, число оставшихся индуктивных элементов и конденсаторов оказывается значительно меньше, чем в полной схеме замещения.

Для каждой из схем характеристическое уравнение оказывается часто первой или второй, редко третьей степени, и поэтому влияние каждого из элементов схемы на искажение фронта и вершины импульса может быть выявлено относительно легко. Расчет переходного процесса в высокочастотной и низкочастотной схемах производят обычно операторным методом.

Окончательный результат (кривую всего переходного процесса) получают, сопрягая решения этих двух схем. Вопрос об искажении заднего фронта импульса принципиально решается так же, как и вопрос об искажении переднего фронта импульса.

Проиллюстрируем сказанное примером. На рис. 9.3, *а* изображена схема лампового усилителя, где $R_н$ — нагрузочное сопротивление; $C_р$ — относительно большая разделительная емкость (через нее проходит только переменная составляющая выходной величины); $C_2$ — относительно малая емкость нагрузки и (или) емкость второго каскада усиления. Пунктиром показаны источник анодного напряжения $E_а$ и малые по сравнению с $C_р$ (по нескольку пикофарад) межэлектродные емкости $C_{са}$, $C_{ск}$ и $C_1$ (емкость анод — катод и емкость монтажа). В дальнейшем емкости $C_{са}$ и $C_{ск}$ не учитываем, как оказывающие малое влияние на работу схемы.



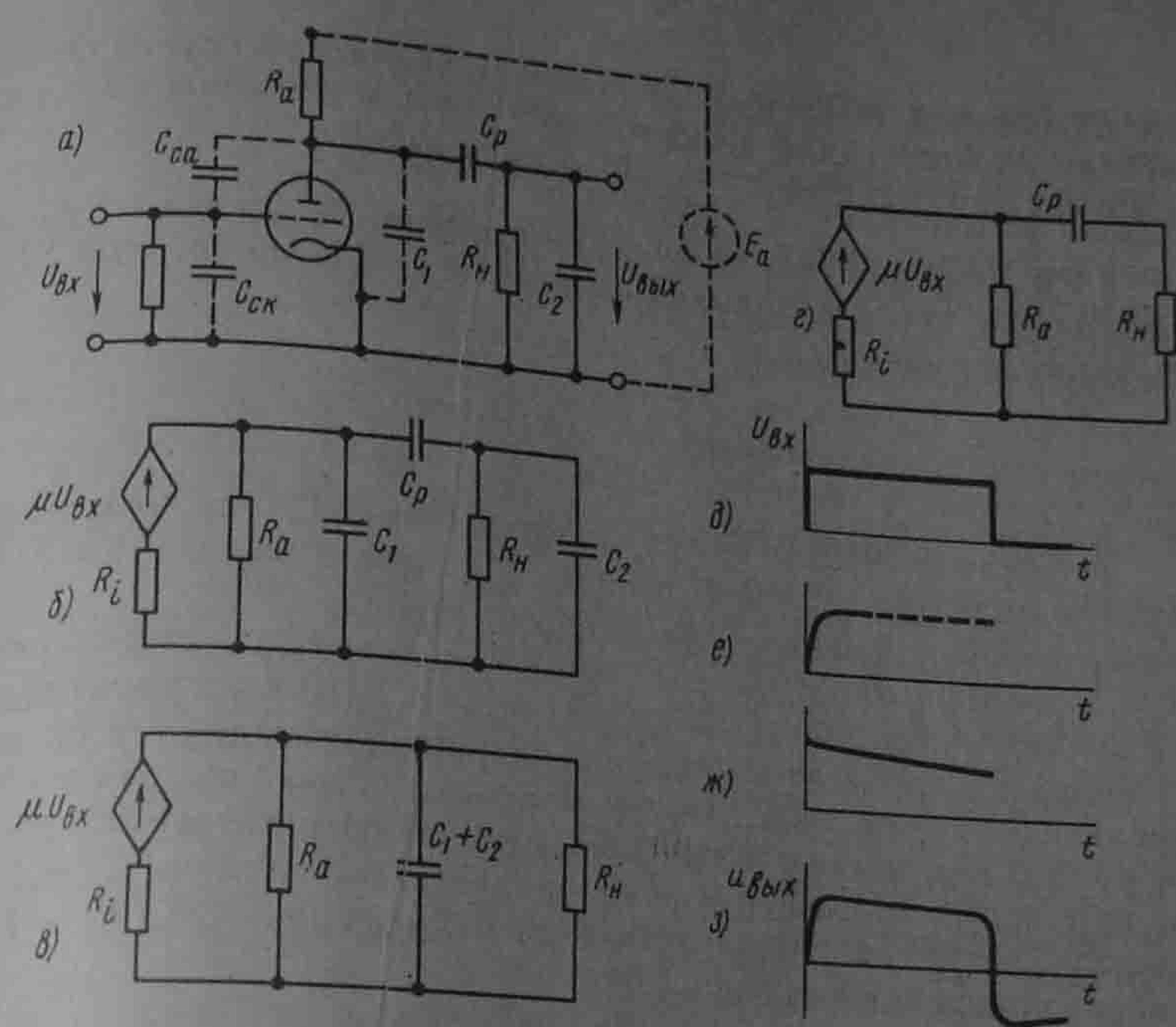



Рис. 9.3

Схема замещения для расчета переходного процесса при воздействии относительно малых по амплитуде переменных составляющих представлена на рис. 9.3, *б*. Она является схемой третьего порядка. Укороченные схемы для формирования фронта (рис. 9.3, *в*) и вершины импульса (рис. 9.3, *г*) являются схемами первого порядка.

Для схемы рис. 9.3, *в*

$$U_{вых}(p) = \frac{\mu}{R_i} \frac{U_{вх}(p)}{g_{э1} + p(C_1 + C_2)},$$

где $g_{э1} = (1/R_i) + (1/R_а) + (1/R_н)$.

Для схемы рис. 9.3, *г*

$$U_{вых}(p) = \frac{\mu R_н}{R_i g_{э2}} \frac{p C_р U_{вх}(p)}{1 + \frac{g_{э1}}{g_{э2}} R_н p C_р}; \quad g_{э2} = \frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_а}.$$

Если входное напряжение представляет собой прямоугольный импульс рис. 9.3, *д*, то фронт выходного напряжения будет в виде нарастающей экспоненты рис. 9.3, *е*, а вершина — в виде спадающей экспоненты рис. 9.3, *ж*. Результирующая кривая $u_{вых}$ изображе-

на на рис. 9.3, з. Подбор параметров усилителя осуществляют, исходя из допустимой деформации фронта и вершины выходного импульса по сравнению с входным импульсом.

**§ 9.6. Текущий спектр функции времени.** За последние годы в литературе стали использовать понятие *текущего спектра* $S_t(j\omega)$ функции времени $f(t)$:

$$S_t(j\omega) = \int_{-\infty}^{t} f(t)e^{-j\omega t}dt. \qquad (9.19)$$

Формула (9.19) отличается от выражения (9.12) тем, что верхний предел интеграла в ней $t$, а не $\infty$. В соответствии с этим $S_t(j\omega)$ является функцией не только $\omega$, но и времени $t$.

Таким образом, $S(j\omega)$ характеризует спектр в различные моменты времени $t$. Функция $S_t(j\omega)$ имеет модуль $S_t(\omega)$ и аргумент $\varphi_{st}(\omega)$. И модуль, и аргумент текущего спектра видоизменяются по мере увеличения $t$. Модуль спектра изображают обычно в виде семейства кривых в функции $\omega$, каждой из которых соответствует фиксированное время $t$. Если $f(t)$ — периодическая функция, а $t \to \infty$, то спектр $S_t(j\omega)$ будет дискретным. Если $f(t) = 0$ при $t < 0$, то текущий спектр определяют по формуле

$$S_t(j\omega) = \int_{0}^{t} f(t)e^{-j\omega t}dt. \qquad (9.20)$$

**§ 9.7. Основные сведения по теории сигналов.** Сигналы подразделяют на детерминированные и случайные. *Детерминированный* сигнал это такой сигнал, мгновенное значение которого можно предсказать для любого момента времени. *Случайный* сигнал — это, как правило, помехи, мешающие получать информацию из принятого сообщения. *Импульсный* сигнал — действует только определенный интервал времени. Сигналы в виде единичных функций $1(t)$, $1(-t)$ и дельта-функция $\delta(t)$ рассмотрены в § 8.61. Сигналы в виде модулированных колебаний рассмотрены в § 7.15. Сигнал называют одномерным, если он может быть описан одной функцией времени (например, напряжением на входе цепи).

Сигнал называют многомерным, если он образован совокупностью нескольких одномерных сигналов (например, напряжениями на зажимах многополюсника).

Непрерывный временной сигнал $f(t)$ — (см. рис. 9.4, *а*) — принято называть *аналоговым*. Название обусловлено тем, что его можно рассматривать как аналог некоторых физических процессов в рассматриваемом устройстве. Аналоговому сигналу соответствует сигнал в дискретной форме. Дискретные сигналы это сигналы в виде совокупности следующих друг за другом с интервалом $\Delta$ дис-



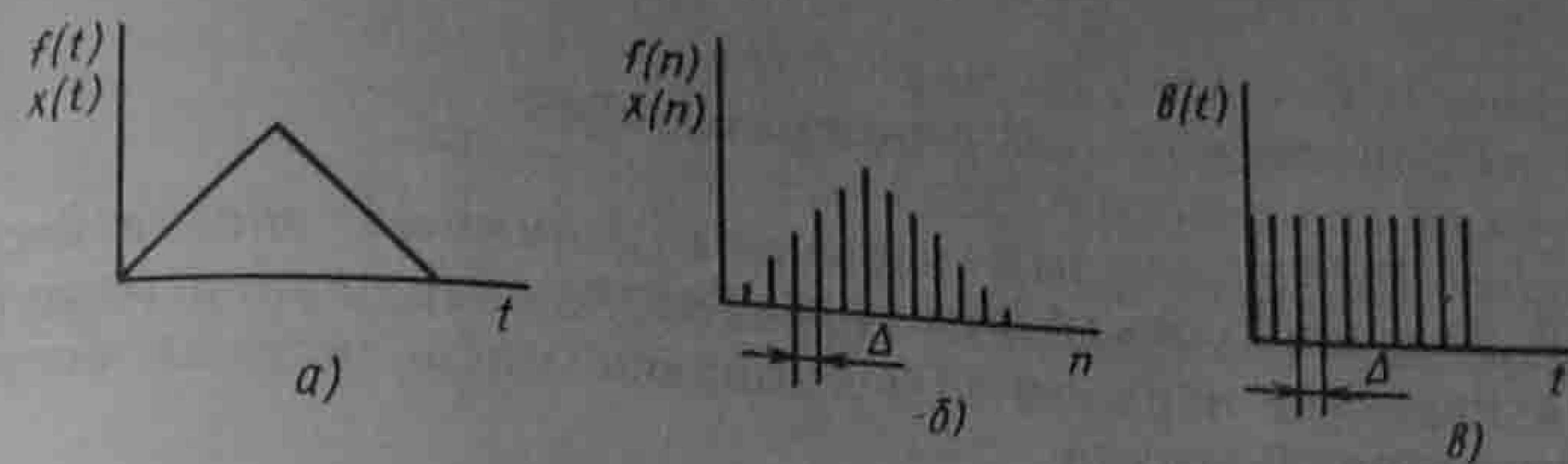



Рис. 9.4

кретных импульсов (см. рис. 9.4, *б*). Ширина каждого импульса одинакова, а площадь равна мгновенному значению сигнала в момент действия импульса.

*Цифровой* сигнал — это нормированный по уровню дискретный сигнал, представленный в цифровом виде (в двоичной форме записи). Например, $30 = 1\cdot 2^4 + 1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 0\cdot 2^0 \to 11110$. Переход от аналогового сигнала к цифровому осуществляют с помощью аналого-цифрового преобразователя (АЦП), выполненного в виде микросхемы. Обратный переход, с помощью цифроаналогового преобразователя (ЦАП). Обработка цифровых сигналов рассмотрена в Приложении Д, а цифровая фильтрация в Приложении Ж. Сигнал можно рассматривать как вектор в пространстве сигналов. В математике длину вектора принято называть нормой. Квадрат нормы аналогового сигнала $f(t)$ равен $\|f\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)dt$. Он характеризует энергию сигнала (см. § 9.4). Норма не чувствительна к изменению формы сигнала.

*Линейным нормированным пространством* сигналов называют пространство, в котором каждому сигналу соответствует свой вектор со своей нормой.

*Метрикой двух сигналов* $f_1(t)$ и $f_2(t)$ называют норму разности двух сигналов $\| f_1(t) - f_2(t) \|$. По метрике можно судить, например, насколько первый сигнал аппроксимирован вторым.

Энергия суммы двух сигналов $f_1(t) + f_2(t)$ равна $\int_{-\infty}^{\infty}[f_1(t) + f_2(t)]^2dt = \int_{-\infty}^{\infty} f_1^2(t)dt + \int_{-\infty}^{\infty} f_2^2(t)dt + 2\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)f_2(t)dt$. Величину $2\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)f_2(t)dt$ называют *взаимной энергией двух сигналов*. Если вещественные сигналы $f_1(t)$ и $f_2(t)$ имеют спектры $S_1(j\omega)$ и $S_2(j\omega)$, то взаимная энергия двух сигналов равна

$$2\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_2(j\omega)e^{j\omega t}d\omega\right]dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_2(j\omega)\left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)e^{j\omega t}dt\right]d\omega = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_2(j\omega)S_1(-j\omega)d\omega =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Re}[S_2(j\omega)\overset{*}{S}_1(j\omega)]d\omega. \quad (9.21)$$

Функцию $\mathrm{Re}[S_2(j\omega)\overset{*}{S}_1(j\omega)]$ называют *взаимным энергетическим спектром двух вещественных сигналов*. Взаимная энергия определяется главным образом перекрывающимися частями спектров этих сигналов. Формула

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_1(t)f_2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} S_2(j\omega)\overset{*}{S}_1(j\omega)d(\omega) \quad (9.22)$$

получила название *обобщенной теоремы Рейли*.

Сигналы называют *ортогональными*, если их взаимная энергия равна нулю. Ряд Фурье — пример совокупности ортогональных сигналов. Функции Уолша, принимающие на интервале $-\frac{T}{2} \div \frac{T}{2}$ значения $\pm 1$, — второй пример ортогональных сигналов.

*Автокорреляционная функция* сигнала $f(t)$ имеет вид

$$R(\tau) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)f(t-\tau)d\tau.$$

*Взаимной корреляционной функцией* двух сигналов $f_1(t)$ и $f_2(t)$ называют функцию

$$R_{12}(\tau) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_1(t)f_2(t-\tau)d\tau. \quad (9.23)$$

Свойства этих функций рассмотрены в приложении Г, а применение к помехам и дискретным сигналам — в приложениях Г, Ж, З, Д.

Отметим, что существенным преимуществом цифровых сигналов перед аналоговыми является возможность передавать по одному каналу несколько различных сигналов от разных источников различным потребителям, если осуществить разделение сигналов во времени.

**§ 9.8. Узкополосный и аналитический сигналы**. В теории передачи сигналов используют понятия узкополосного и аналитического сигналов. *Узкополосный* сигнал занимает узкую полосу частот и может быть представлен как сигнал, у которого во времени медленно изменяется амплитуда $a(t)$ и фаза $\varphi(t)$ : $s(t) = a(t)\cos[\omega_0 t + \varphi(t)]$. Условия медленности изменения: $\frac{da(t)}{dt}\frac{1}{\omega_0 a(t)} \ll 1$ и $\frac{d\varphi(t)}{dt}\frac{1}{\omega_0} \ll 1$. $\omega_0$ — опорная частота, $\omega_0(t) = \omega_0 + \frac{d\varphi(t)}{dt}$ — мгновенная частота. При обработке узкополосного сигнала огибающая его воспроизводится амплитудным детектором.

Положим, что сигнал $s(t) = \cos\omega t$, но $\cos\omega t = \frac{1}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})$. Таким образом, сигнал $s(t)$ можно представить в виде суммы двух сигналов. Один содержит только положительные, другой только отрицательные частоты. Запишем произвольный сигнал $s(t)$ через его частотный спектр $S(j\omega)$:



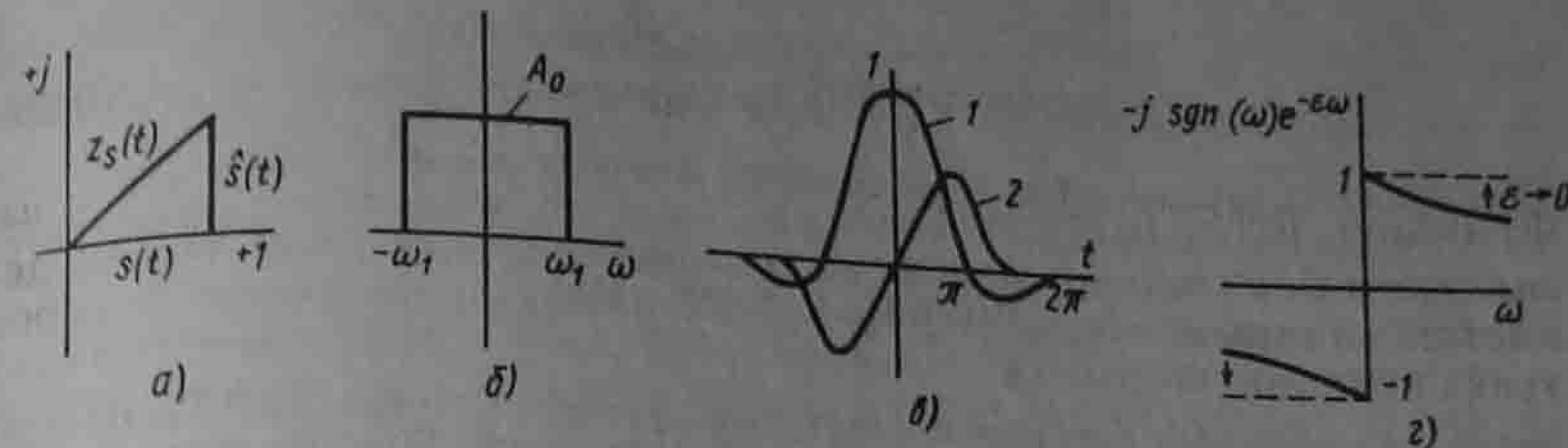



Рис. 9.5

$$s(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{0} S(j\omega)e^{j\omega t}d\omega + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{\infty} S(j\omega)e^{j\omega t}d\omega = \frac{1}{2}[\overset{*}{z}_s(t) + z_s(t)], \quad (9.24)$$

где

$$z_s(t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} S(j\omega)e^{j\omega t}d\omega, \quad (9.25)$$

$$\overset{*}{z}_s(t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{0} S(j\omega)e^{j\omega t}d\omega; \quad (9.26)$$

$z_s(t)$ соответствует интегрирование при $\omega > 0$, $\overset{*}{z}_s(t)$ — при $\omega < 0$.

$$z_s(t) = s(t) + j\hat{s}(t) \quad (9.27)$$

называют *аналитическим сигналом*, а $s(t) = \mathrm{Re}z_s(t)$ — условимся называть *исходным сигналом*, $\hat{s}(t) = \mathrm{Im}z_s(t)$ — сопряженным. На комплексной плоскости $z_s(t)$ представляет собой вектор, проекция на ось $+1$ которого $s(t)$, а на ось $+j = \hat{s}(t)$ (рис. 9.5, *а*). Сигнал $z_s(t)$ называют аналитическим потому, что если время $t$ рассматривать как комплексную переменную $t = t' + jt''$, то $z_s(t)$ будет являться аналитической функцией в верхней полуплоскости. Пусть исходный сигнал $s(t)$ имеет спектр $S(j\omega) = A_0$ в узкой области частот от $\omega = -\omega_1$ до $\omega = +\omega_1$ (узкополосный сигнал рис. 9.5, *б*). Ему соответствует аналитический сигнал

$$z_s(t) = \frac{A_0}{\pi}\int\limits_{0}^{\omega_1} e^{j\omega t}d\omega = \frac{A_0}{\pi t}[\sin\omega_1 t + j(1-\cos\omega_1 t)].$$

Исходный временной сигнал $s(t) = \mathrm{Re}z_s(t) = \frac{A_0\omega_1}{\pi}\frac{\sin\omega_1 t}{\omega_1 t}$, — кривая *1* на рис. 9.5, *в*.

Сопряженный сигнал $\hat{s}(t) = \mathrm{Im}z_s(t) = \frac{A_0\omega_1}{\pi}\frac{\sin^2\frac{\omega_1 t}{2}}{\frac{\omega_1 t}{2}}$ — кривая *2* на рис. 9.5, *в*.

Обратим внимание на то, что когда $s(t)$ проходит через максимум, $\hat{s}(t)$ проходит через нуль.

**§ 9.9. Частотный спектр аналитического сигнала.** Так как $z_s(t) = s(t) + j\hat{s}(t)$, то спектр $z_s(t)$ равен сумме спектров функций $s(t)$ и $j\hat{s}(t)$. Если спектр $s(t)$ равен $S(j\omega)$, то спектр $\hat{s}(t)$ равен

$$-j\,\mathrm{sgn}(\omega)S(j\omega)=\begin{cases} jS(j\omega), \text{ при } \omega<0; \\ -jS(j\omega), \text{ при } \omega>0. \end{cases} \qquad (9.28)$$

Соотношение (9.28) следует из формулы (9.25) и из определения

$$s(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega)e^{j\omega t}d\omega.$$

Способ получения $\tilde{s}(t)$ с помощью квадратурного фильтра вытекает из (9.28). На вход этого фильтра подают сигнал $s(t)$. Фильтр, сохраняя модули $S(j\omega)$ при всех частотах неизменными, изменяет аргументы всех спектральных составляющих на $-90°$ при $\omega>0$ и на $+90°$ при $\omega<0$.

**§ 9.18. Прямое и обратное преобразование Гильберта.** Поскольку спектр сопряженного сигнала $\tilde{s}(t)$ равен $\tilde{S}(j\omega)=-j\,\mathrm{sgn}(\omega)S(j\omega)$, то сам сигнал $\tilde{s}(t)$ может быть определен как свертка функций $s(t)$ и некоторой функции времени $f(t)$, которая определяется по обратному преобразованию Фурье от функции $-j\,\mathrm{sgn}(\omega)$.

Последнюю представим так:

$$-j\,\mathrm{sgn}(\omega)=\lim_{\alpha\to 0}[-j\,\mathrm{sgn}(\omega)e^{-\alpha|\omega|}] \text{ (рис. 9.5, г).}$$

Тогда

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\lim_{\alpha\to 0}\left[\int_{-\infty}^{0} e^{(\alpha+jt)\omega}d\omega-\int_{0}^{\infty} e^{(-\alpha+jt)\omega}d\omega\right]=\frac{1}{\pi t}. \qquad (9.29)$$

По формуле свертки

$$\tilde{s}(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{s(\tau)d\tau}{t-\tau}. \qquad (9.30)$$

Из (9.28) следует $S(j\omega)=j\,\mathrm{sgn}(\omega)\tilde{S}(j\omega)$. Поэтому, по формуле свертки,

$$s(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\tilde{s}(\tau)d\tau}{\tau-t}. \qquad (9.31)$$

Формулу (9.30) называют формулой *прямого*, а формулу (9.31) — *обратного преобразования Гильберта*. Для них приняты обозначения $H$ и $H^{-1}$. Так, $\tilde{s}(t)=H[s(t)]$, $s(t)=H^{-1}[\tilde{s}(t)]$. Ядра подынтегральных функций (9.30) и (9.31) при $\tau=t$ терпят разрыв, поэтому интегралы следует понимать в смысле главного значения. Например, интеграл (9.30) вычисляют так:

$$\tilde{s}(t)=\frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{-\infty}^{t-\varepsilon}\frac{s(\tau)d\tau}{t-\tau}+\int_{t+\varepsilon}^{\infty}\frac{s(\tau)d\tau}{t-\tau}\right].$$

**Вопросы для самопроверки**

1. Чем принципиально отличается ряд Фурье от интеграла Фурье? Запишите и прокомментируйте формулы прямого и обратного преобразования Фурье. 2. Чем объяснить, что при обратном преобразовании Фурье кроме положительной угловой частоты [illegible] и отрицательная? 3. Любая ли функция $f(t)$ может быть преобразована по Фурье? 4. Для функции $f(t)$ известна $F(p)$. Как записать $S(j\omega)$ этой функции? 5. Постройте графики модуля и аргумента спектров функций $te^{-at}$ и



$(1-at)e^{-at}$; функции равны нулю при $t<0$. (*Ответ*: для $te^{-at}$ $|S(j\omega)|=\frac{1}{a^2}\frac{1}{1+|\frac{\omega}{a}|^2}$, $\psi=-\mathrm{arctg}\frac{2\omega a}{a^2-\omega^2}$.) 6. Сформулируйте и докажите теорему Рейли, дайте ей физическое толкование. 7. На резистор сопротивлением $R=10$ Ом воздействует импульс напряжения, модуль спектра которого $S(\omega)=2\sqrt{\pi}$ при $0<\omega<10^6$. В остальной области частот $S(\omega)=0$. Определите энергию, выделившуюся в резисторе? (*Ответ*: 400 Дж). 8. Что понимают под полосой пропускания реального четырехполюсника? 9. Определите полосу частот, занимаемую прямоугольным импульсом длительностью 1 мкс. (*Ответ*: $6{,}28\cdot10^6$ рад/с.) 10. Чем руководствуются при составлении укороченных схем четырехполюсника при исследовании деформации фронта и вершины проходящего через него короткого импульса? 11. Определите текущий спектр $S_t(j\omega)$ функции $f(t)=e^{-at}$, полагая, что $f(t)=0$ при $t<0$. (*Ответ*: $\frac{1-e^{-(a+j\omega)t}}{a+j\omega}$.) 12. Проверьте правильность формулы $\delta(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\cos\omega t\,dt$. 13. Покажите, что спектр $\delta$-функции равен 1. 14. Покажите, что если функция $f(t)$ имеет спектр $S(j\omega)$, то спектр функции $af(at)$ равен $S(j\frac{\omega}{a})$. 15. Покажите, что если сигнал $s(t)$ представляет собой амплитудно-модулированное колебание $U(1+m\sin\Omega t)\sin\omega t$, то при $\omega\gg\Omega$ сопряженный сигнал $\tilde{s}(t)\cong U(1+m\sin\Omega t)\cos\omega t$. 16. Определить автокорреляционную функцию прямоугольного сигнала $f(t)$, рис. 9.16, *в*. [*Ответ*: $R(\tau)=A^2t_и(1-\frac{|\tau|}{t_и})$.]

## Глава десятая

# СИНТЕЗ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

**§ 10.1. Характеристика синтеза.** *Синтезом линейной электрической цепи* называют определение структуры цепи и числовых значений составляющих ее элементов $R$, $L$, $C$ по известным операторным или временным характеристикам этой цепи при воздействии на вход напряжения определенной формы. Одному и тому же операторному выражению, принятому в качестве исходного при синтезе, может соответствовать несколько различных схем разной структуры. Поэтому, после того как получено несколько решений, выбирают из них наиболее подходящее. Чаще всего критериями при окончательном выборе схемы являются стоимость, габариты и масса устройства, а также чувствительность при изменении того или иного параметра схемы.

Задачи синтеза ставят и решают в теории сложных фильтров, в теории корректирующих контуров в автоматике, связи, радиотехнике, а также в кибернетике при создании предсказывающих и сглаживающих устройств.

Синтез развивался главным образом по двум направлениям: 1) известным операторным функциям [по $Z(p)$ для двухполюсников и передаточной функции для четырехполюсников]; 2) временным характеристикам, т. е. по известному временному отклику системы при воздействии единичного напряжения.

Эти два направления взаимно дополняют и развивают друг друга. В настоящее время наибольшие результаты достигнуты на первом из упомянутых направлений.

В § 10.2 — 10.9 даны основные сведения о синтезе цепей по заданной операторной функции (более полно об этом см., например, [3]). Методика синтеза цепей по заданным временны́м функциям здесь не рассматривается (для ознакомления с ней следует обратиться к специальным руководствам).

В теории автоматического регулирования распространен синтез, основанный на использовании логарифмических частотных характеристик, в импульсной технике подбор параметров электронных и полупроводниковых схем, т. е. в известном смысле синтез этих схем, производят, используя спектральный метод, рассмотренный в гл. 9.

**§ 10.2. Условия, которым должны удовлетворять входные сопротивления двухполюсников.** Если представить входное сопротивление двухполюсника в виде отношения двух полиномов, расположенных по убывающим степеням оператора $p$,

$$Z(p)=\frac{N(p)}{M(p)}=\frac{a_n p^n+a_{n-1}p^{n-1}+\ldots+a_1 p+a}{b_m p^m+b_{m-1}p^{m-1}+\ldots+b_1 p+b_0}, \tag{10.1}$$

то должны выполняться следующие пять условий:

1) все коэффициенты $a$ и $b$ в числителе и знаменателе должны быть неотрицательны (в дальнейшем будет ясно, что условие 1 вытекает из условия 3);

2) наивысшая (наименьшая) степень полинома числителя ($n$) не может отличаться от наивысшей (наименьшей) степени полинома знаменателя ($m$) более чем на единицу;

3) если условиться значения $p$, при которых $Z(p)=0$, называть нулями функции $Z(p)$, а значения $p$, при которых $Z(p)=\infty$, — полюсами $Z(p)$, то нули и полюсы должны быть расположены только в левой части плоскости $p$;

4) нули и полюсы, расположенные на мнимой оси плоскости $p$, должны быть только простые, не кратные;

5) если вместо $p$ в выражение $Z(p)$ подставить $j\omega$, то при любом значении $\omega$ должно быть $\operatorname{Re}Z(j\omega)\geqslant 0$.

Поясним эти требования. Из § 8.11 известно, что свободные процессы описываются слагаемыми вида $A_k e^{p_k t}$ и обязательно должны затухать во времени; $p_k$ — корни уравнения $Z(p)=0$. Но затухать свободные процессы (слагаемые вида $A_k e^{p_k t}$) могут только в том случае, когда действительная часть $p_k$ отрицательна. Отсюда следует, что нули уравнения $Z(p)=0$ должны обязательно находиться в левой части плоскости $p$.

Поскольку каждому планарному двухполюснику соответствует дуальный, а входная проводимость дуального двухполюсника $Y(p)=$ $=Z(p)/k$, где $k$ — некоторый коэффициент, имеющий размерность



Ом в квадрате (см. § 3.43), то входное сопротивление дуального двухполюсника равно $k/Z(p)$. Нули дуального двухполюсника, являющиеся полюсами исходного, также должны быть расположены в левой части плоскости $p$.

Из курса математики известно, что если имеются два кратных корня уравнения $N(p)=0$, то соответствующие им слагаемые в решении берут в виде $(C_1+C_2t)e^{pt}$. Если допустить, что на мнимой оси могут быть два кратных корня $p=j\beta$, то соответствующая им свободная составляющая $(C_1+C_2t)e^{j\beta}$ нарастала бы до бесконечности, чего физически быть не может. Коэффициенты $a$ и $b$ в числителе и знаменателе $Z(p)$ должны быть положительны. Если бы это условие нарушилось, то на основании леммы, вытекающей из теоремы Гурвица (см. § 17.2), среди корней уравнения $Z(p)=0$ появились бы корни с положительной действительной частью.

Поясним, почему степень $m$ не может отличаться от степени более чем на единицу. Допустим, что степень $m$ больше степени $n$ на два. Тогда $p\to\infty$ является нулем второй кратности для $Z(p)$, а то, что происходит при $p\to\infty$, можно считать происходящим на мнимой оси плоскости $p$ (мнимая ось простирается в бесконечность). Но тогда на мнимой оси получается кратный корень, чего быть не может.

Проведя такое же рассуждение для дуального двухполюсника, убедимся, что степень $n$ не может быть больше степени $m$ более чем на единицу.

Если в $Z(p)$ вместо $p$ подставить $j\omega$, то $Z(j\omega)$ будет представлять собой комплексное сопротивление двухполюсника в установившемся синусоидальном режиме при частоте $\omega$, а $\operatorname{Re}Z(j\omega)$ — действительную часть входного сопротивления. В том случае, когда двухполюсник содержит резистивные сопротивления, его $\operatorname{Re}Z(j\omega)>0$ [он потребляет активную мощность $I^2\operatorname{Re}Z(j\omega)$]. Если же двухполюсник чисто реактивный, то $\operatorname{Re}Z(j\omega)=0$. В общем случае для пассивного двухполюсника всегда должно быть $\operatorname{Re}Z(j\omega)\geqslant 0$.

В литературе по синтезу цепей иногда пользуются термином *«положительная действительная (вещественная) функция»*. Под ней понимают функцию: 1) действительная часть которой положительна, если положительна действительная часть $p$; 2) действительная при действительном (не комплексном) $p$. Поскольку $Z(p)$ этим свойствам удовлетворяет, оно является положительной действительной функцией.

**Пример 111.** Задано несколько выражений вида $N(p)/M(p)$. Выяснить, могут ли они представлять собой входные сопротивления некоторых двухполюсников:

$$1)\ \frac{5p-6}{25p^2+12p+2};\quad 2)\ \frac{20p^2+12p+6}{12p^4+8p^3+12p^2+13p+1};$$

$$3)\ \frac{3p^2+p+1}{p^3+p^2+p+1};\quad 4)\ \frac{2p^2+p+1}{(p+1)(p^2+1)}.$$

Р е ш е н и е. Первое выражение не может представлять собой $Z(p)$, так как один из коэффициентов в числителе отрицателен. Второе и третье выражения также не могут представлять собой $Z(p)$: второе потому, что максимальная степень $p$ в знаменателе больше максимальной степени $p$ числителя на два, третье потому, что

$$\underset{p=j\omega}{\mathrm{Re}}\left[\frac{3p+1+1}{p^3+p^2+p+1}\right]=\frac{(1-\omega^2)(1-2\omega^2)}{(1-\omega^2)^2(1+\omega^2)}$$

при значениях $\omega$ от 0,707 до 1 отрицательно. Четвертое выражение всем требованиям удовлетворяет и потому может представлять собой $Z(p)$ некоторого двухполюсника.

Кроме названных общих свойств перечислим свойства $Z(p)$ двухполюсников, состоящих только из $R$ и $C$, только из $R$ и $L$ и только из $L$ и $C$. Двухполюсники типа $RC$ и $RL$ имеют чередующиеся простые нули и полюсы на отрицательной вещественной оси плоскости $p$. Для $RC$-двухполюсников ближайшей особой точкой к началу координат является полюс, в бесконечности полюс отсутствует. Для двухполюсников типа $RL$ ближайшей к началу координат особой точкой является нуль, при $p=0$ полюс отсутствует. Двухполюсники типа $LC$ имеют чередующиеся простые нули и полюсы на мнимой оси. Степени полиномов числителя и знаменателя отличаются на единицу.

Нули и полюсы $Z(p)$ можно изобразить условными значками из комплексной плоскости, скажем, нули кружками, полюсы крестиками. Полученную картину называют *картой нулей и полюсов*. Эта карта наглядно характеризует частотные свойства двухполюсника и реакцию его при воздействии единичного напряжения.

По расположению и количеству нулей на ней можно определить число апериодических и колебательных компонент, которое содержит свободная составляющая, и быстроту затухания той или иной из них во времени. Чем ближе к мнимой оси расположены нули, тем медленнее затухает соответствующая им свободная составляющая.

Существует несколько способов реализации двухполюсников по заданной $Z(p)$, удовлетворяющей перечисленным в § 10.2 условиям. Три основных способа реализации рассмотрены в § 10.3 — 10.5.

**§ 10.3. Реализация двухполюсников лестничной (цепной) схемой.** Познакомимся с понятием непрерывной дроби. *Непрерывной* называют дробь вида

$$\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\dots}}}}$$

Входное сопротивление или входная проводимость лестничной (цепной) схемы по типу рис. 10.1, *а*, в которой продольные сопротив-



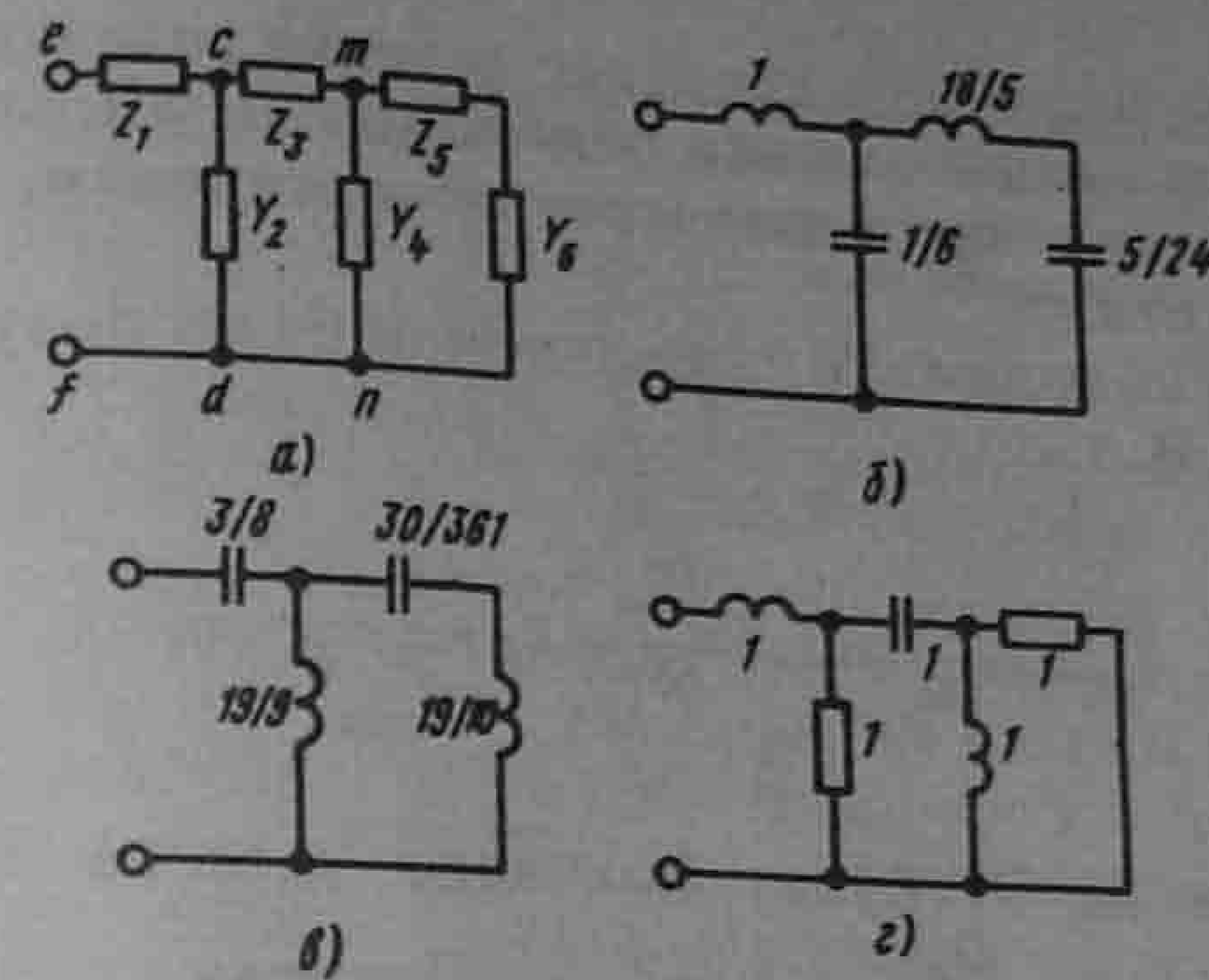



Рис. 10.1

ления названы $Z_1, Z_3, Z_5, \dots$, а поперечные проводимости — $Y_2, Y_4, Y_6, \dots$, могут быть представлены непрерывной дробью.

Для того чтобы убедиться в этом, проделаем небольшие выкладки. Найдем входную проводимость правой части схемы по отношению к зажимам *mn*. Она равна $\frac{1}{Z_5+1/Y_6}$. Суммарная проводимость правой части схемы по отношению к зажимам *mn* с учетом ветви с проводимостью $Y_4$ равна $Y_4+\frac{1}{Z_5+1/Y_6}$. Входное сопротивление по отношению к тем же зажимам

$$\cfrac{1}{Y_4+\cfrac{1}{Z_5+1/Y_6}}.$$

Входное сопротивление всей схемы равно

$$Z_1+\cfrac{1}{Y_2+\cfrac{1}{Z_3+\cfrac{1}{Y_4+\cfrac{1}{Z_5+1/Y_6}}}}. \qquad (10.2)$$

Таким образом, возникает задача о переходе от (10.1) к (10.2), т. е. задача о последовательном упорядоченном определении элементов лестничной схемы ($Z_1, Z_3, \dots; Y_2, Y_4, Y_6, \dots$) по выражению (10.1). С этой целью:

1) располагаем полиномы $N(p)$ и $M(p)$ по убывающим либо по возрастающим степеням $p$;

2) делим многочлен на многочлен, следя за тем, чтобы в процессе деления получались положительные (не отрицательные) слагаемые и чтобы они не содержали $p$ в степени больше 1 и меньше — 1;

3) учитываем, что если в процессе деления возникнет необходимость перейти от расположения полиномов по убывающим степеням к расположению их по возрастающим степеням, то эта операция вполне допустима.

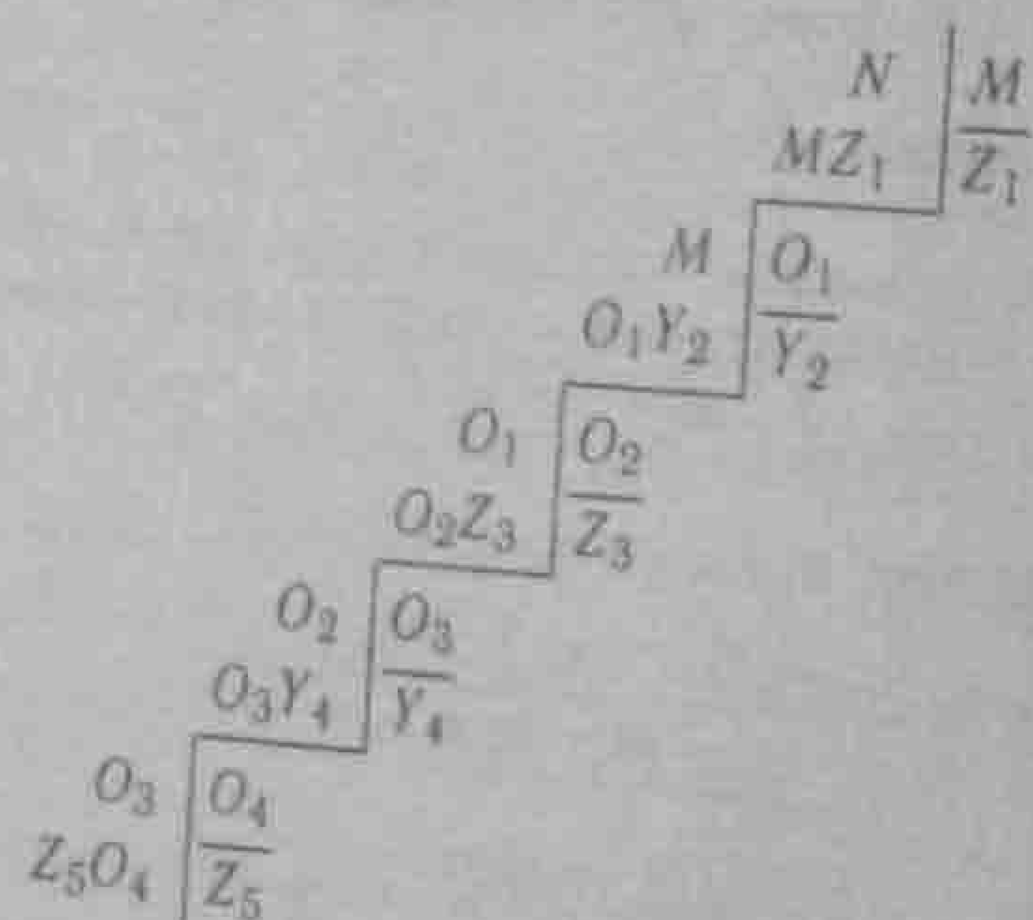
При делении полинома $N$ на полином $M$ будет получено частное $Z_1$ и остаток $O_1/M$, т. е.

$$Z=\frac{N}{M}=Z_1+\frac{O_1}{M}=Z_1+\frac{1}{M/O_1}.$$

При делении $M/O_1$ будет получено частное $Y_2$ и остаток $\frac{O_2}{O_1}=\frac{1}{O_1/O_2}$. Но $\frac{O_1}{O_2}=Z_3+\frac{O_3}{O_2}=Z_3+\frac{1}{O_2/O_3}$. Поэтому

$$\frac{M}{O_1}=Y_2+\cfrac{1}{Z_3+\cfrac{1}{O_2/O_3}}.$$

На основании изложенного процесс последовательного определения элементов можно представить следующей схемой:




. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**Пример 112.** Определить параметры лестничных схем, для которых $Z(p)=\frac{p^4+9p^2+8}{p^3+3p}$, располагая сначала при делении полиномы по убывающим, а затем (для реализации второй схемы) по возрастающим степеням $p$. Как будет видно из дальнейшего, в процессе деления в обоих случаях не возникнет необходимости в переходе от расположения по убывающим к расположению по возрастающим степеням $p$.

Решение. Производим деление, расположив слагаемые по убывающим степеням $p$:



$p^4+9p^2+8$ | $p^3+3p$
$p^4+3p^2$ | $p \to Z_1$
$p^3+3p$ | $6p^2+8$
$p^3+\frac{8}{6}p$ | $\frac{1}{6}p \to Y_2$
$6p^2+8$ | $\frac{10}{6}p$
$6p^2$ | $\frac{36}{10}p \to Z_3$
$\frac{10}{6}p$ | $8$
$\frac{10}{6}p$ | $\frac{5}{24}p \to Y_4$
$0$

На рис. 10.1, *б* изображена схема, и на ней указаны соответственно в генри и фарадах значения индуктивностей и емкостей, полученные при делении, когда слагаемые были расположены по убывающим степеням. Так как примеры имеют чисто иллюстративный характер, то не следует обращать внимание на то, что индуктивности и емкости в примерах достигают практически трудно осуществимых значений. Кроме того, реализуемые здесь $Z(p)$ можно рассматривать как нормированные по частоте и значению (см. § 10.9). В этом случае от нормированных $R_н$, $L_н$, $C_н$ параметров переходят к действительным, осуществить которые практически уже не составит затруднений.

Схема и параметры для второго случая, когда при делении слагаемые расположены по возрастающим степеням $p$, даны на рис. 10.1, *в*.

Рассмотрим пример, который является иллюстрацией того, что иногда в процессе деления возникает необходимость изменения порядка расположения слагаемых.

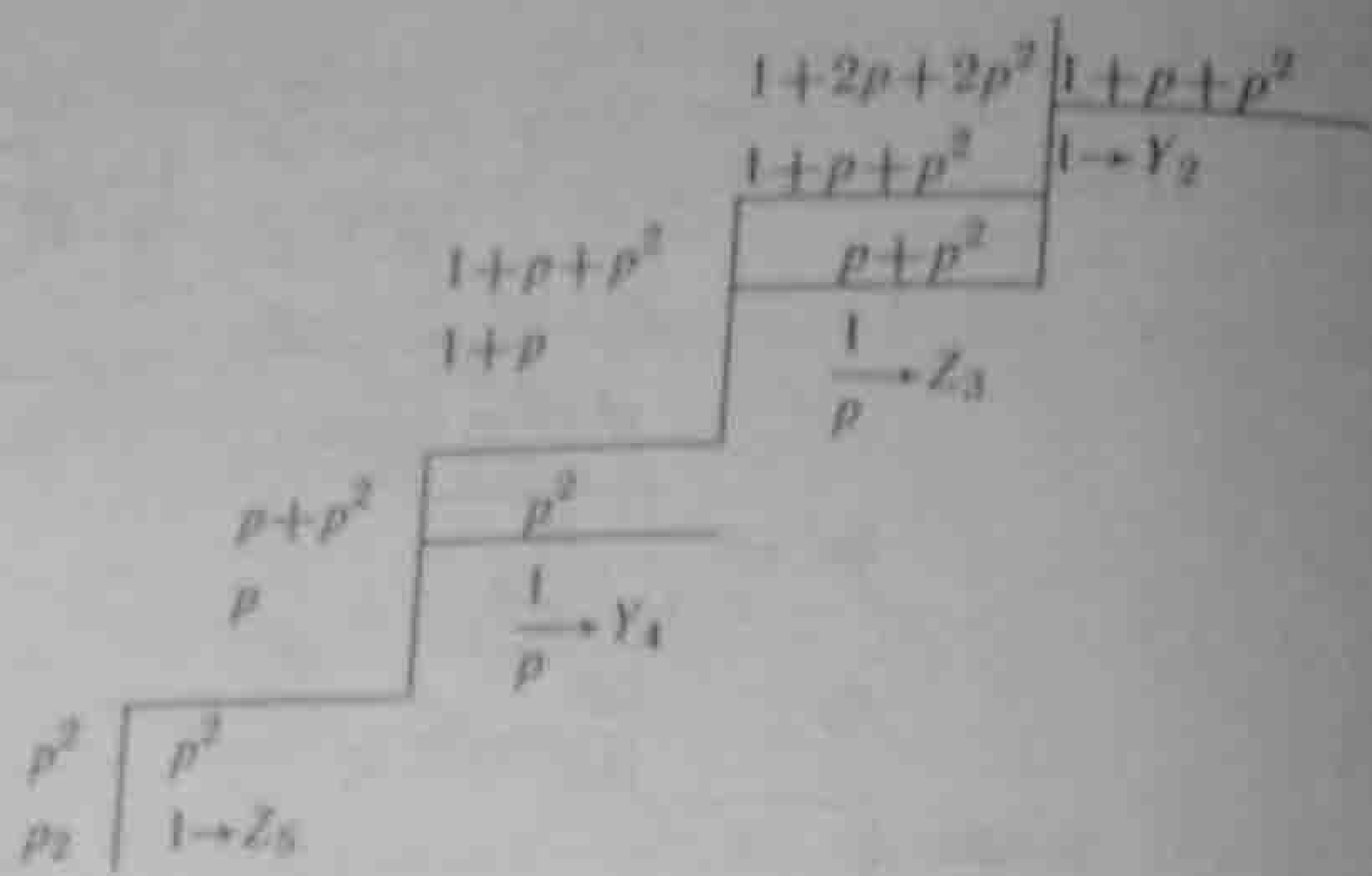
**Пример 113.** Требуется реализовать лестничной схемой

$$Z(p)=\frac{2p^3+3p^2+2p+1}{2p^2+2p+1}.$$

Решение.

$2p^3+3p^2+2p+1$ | $2p^2+2p+1$
$2p^3+2p^2+p$ | $p \to Z_1$
$2p^2+2p+1$ | $p^2+p+1$
$2p^2+2p+2$ | $2$
$-1$

Так как получаем отрицательные слагаемые, дальнейшее деление прекращаем и переходим к расположению по возрастающим степеням




На рис. 10.1, г изображена соответствующая схема.

В заключение отметим, что могут встретиться такие $Z(p)$, которые невозможно представить лестничной схемой. В этом случае применяют второй способ реализации, описанный в § 10.4. [Второй способ применяют не только в случае невозможности представления $Z(p)$ лестничной схемой.] Если и он окажется неприменимым (например, при комплексных нулях и полюсах), то следует воспользоваться методом Бруне (см. § 10.5) или другими методами.

**§ 10.4. Реализация двухполюсников путем последовательного выделения простейших составляющих.** В качестве введения ко второму способу реализации двухполюсника запишем операторные сопротивления для простейших одно- и двухэлементных двухполюсников. На рис. 10.2, *а* — *д* изображены простейшие двухполюсники и записаны соответствующие им операторные сопротивления; на рис. 10.2, *е*, *ж* — сопротивления и проводимости и на рис. 10.2, *з* — проводимость. Для рис. 10.2, *а* $C=1/a_0$, для рис. 10.2, *б* $L=a_1$, для рис. 10.2, *в* $2a_k = 1/C_k$ и $\omega_k^2 = 1/(L_kC_k)$, для рис. 10.2, *г* $a_k = R_k$ и $m_k = R_k/L_k$, для рис. 10.2, *д* $b=1/C$ и $d=1/RC$.

Сущность метода состоит в том, что заданное $Z(p)$ представляют в виде (рис. 10.3, *а*)

$$Z(p) = a_1p + \frac{a_0}{p} + \sum \frac{2a_kp}{p^2+\omega_k^2} + Z_1(p). \qquad (10.3)$$

Первому слагаемому $a_1p$ соответствует последовательно соединенный индуктивный элемент индуктивностью $a_1$, второму — последовательно соединенный емкостный элемент емкостью $1/a_0$. Каждому слагаемому вида $\frac{2a_kp}{p^2+\omega_k^2}$ соответствует последовательно соединенный параллельный резонансный контур (слагаемому $\frac{2a_kp}{p^2+\omega_k^2}$ — пара полюсов $p_{1,2} = \pm j\omega_k$, находящихся на мнимой оси



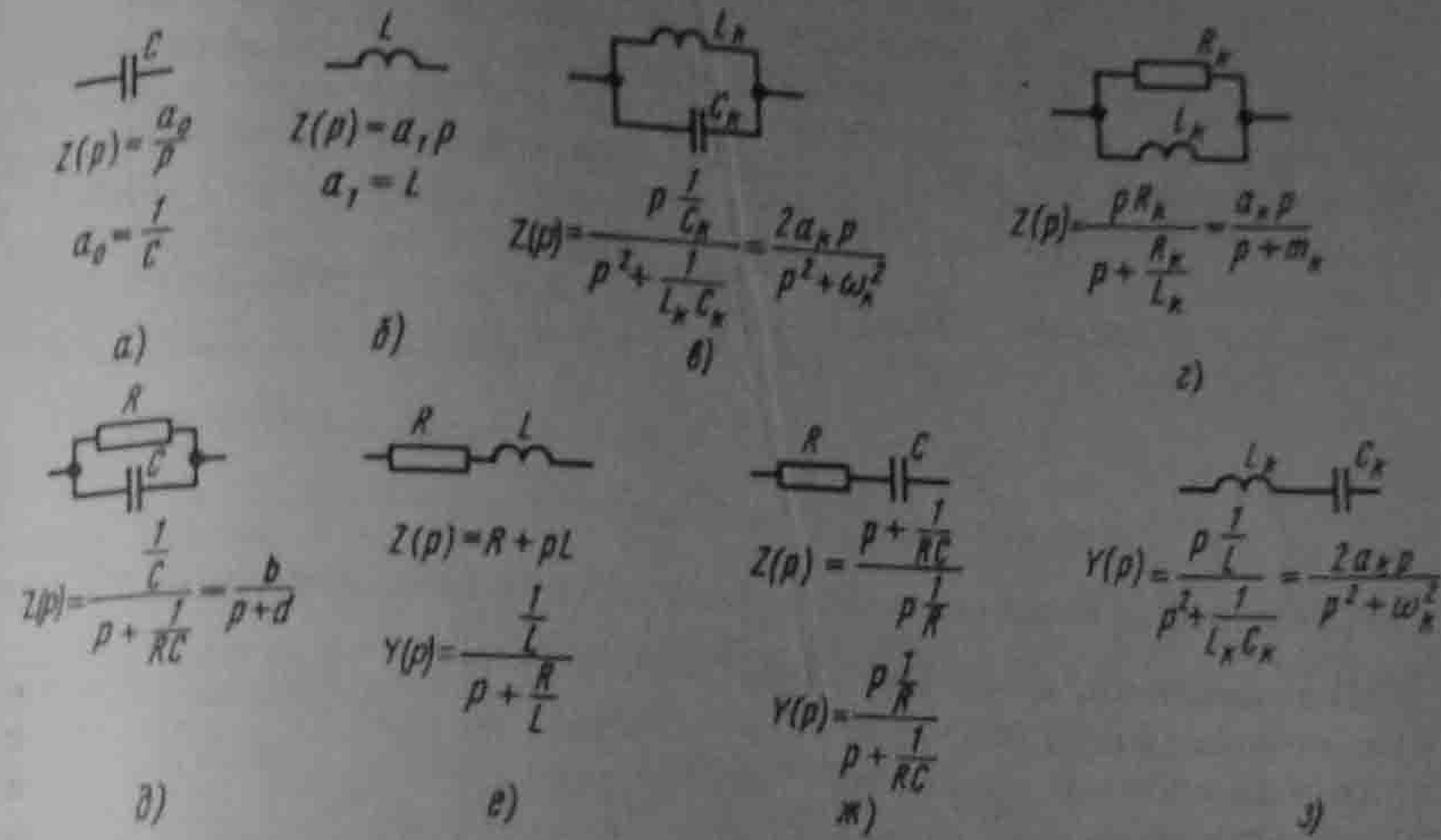



Рис. 10.2

плоскости $p$). Сопротивление $Z_1(p)$ уже не содержит полюсов на мнимой оси. Функцию $Z_1(p)$, среди полюсов которой нет полюсов, находящихся на мнимой оси, называют *функцией минимального реактивного сопротивления*. Возможны следующие варианты для $Z_1(p)$[1]:

а) $Z_1(p) = \sum \frac{a_kp}{p+m_k}$ осуществляют последовательным соединением двухполюсников рис. 10.2, *г*;

б) $Z_1(p) = \sum \frac{b_k}{p+d_k} + b_0$ реализуют в виде резистора сопротивлением $b_0$ и последовательно с ним соединенных двухполюсников рис. 10.2, *д*;

в) $Z_1(p) = b_0$ осуществляют в виде резистора сопротивлением $b_0$.

Индуктивность $a_1 = \lim\limits_{p\to\infty} \frac{Z(p)}{p}$ (рис. 10.3, *а*).

Величину $a_0$ в схеме рис. 10.3, *а* определяют как интегральный вычет функции $Z(p)=N(p)/M(p)$ в полюсе $p=0$:

$$a_0 = \operatorname*{Res}_{p=0} Z(p) = N(0)/M'(0), \text{ или } a_0 = \lim_{p\to 0} pZ(p).$$

Коэффициент $a_k$ в выражении $\frac{2a_kp}{p^2+\omega_k^2}$ равен интегральному выче-

[1] В пунктах а) — в) полагаем, что коэффициенты $a_k$, $b_k$ и $b_0$ действительны и положительны.

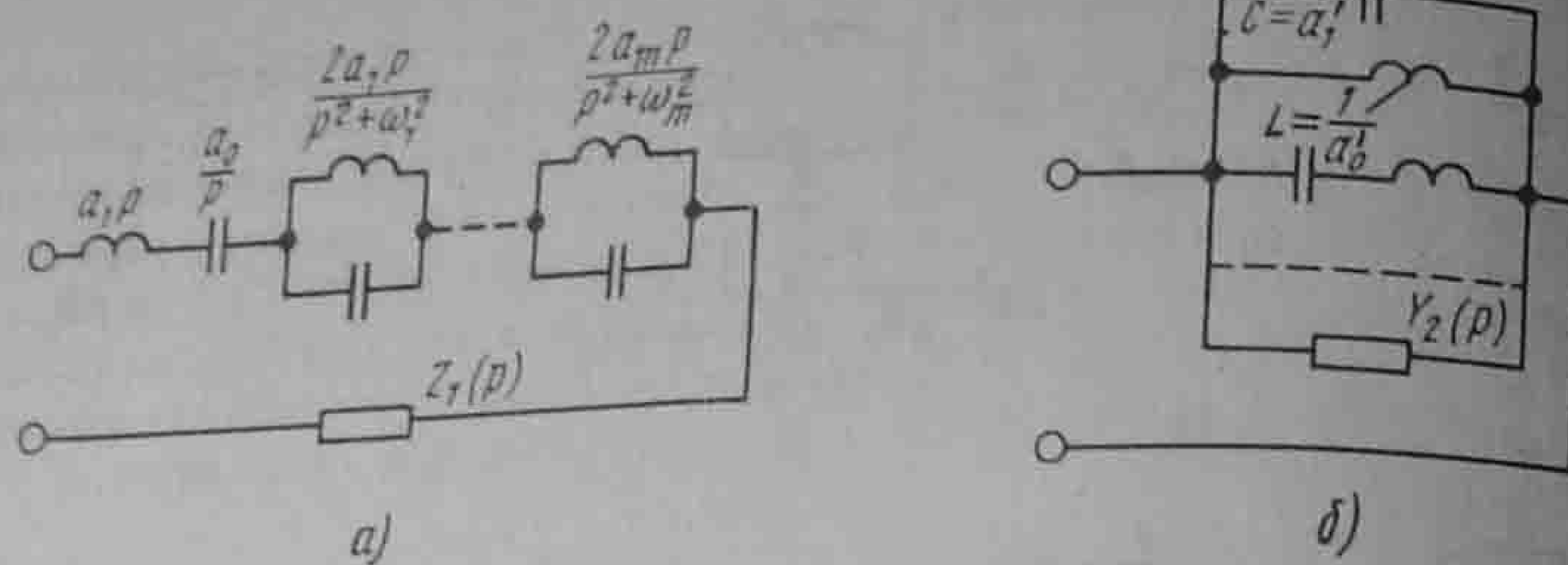



Рис. 10.3

ту функции $Z(p)$ в полюсе $p = j\omega_k$ [ему же равен вычет функции $Z(p)$ при $p = -j\omega_k$, так как они оба действительны]:

$$a_k = \operatorname*{Res}_{p=j\omega_k} Z(p) = \frac{N(j\omega_k)}{M'(j\omega_k)}.$$

После того как найдено $a_k$, можно определить $L_k$ и $C_k$ двухполюсника рис. 10.2, *в*: $C_k = 1/(2a_k)$; $L_k = 1/(\omega_k^2 C_k)$.

Реализацию двухполюсника можно осуществлять не только по его входному сопротивлению $Z(p)$, но и по его входной проводимости $Y(p)=1/Z(p)$. Входную проводимость $Y(p)$ представляют в виде схемы рис. 10.3, *б*:

$$Y(p) = a'_1 p + \frac{a'_0}{p} + \sum \frac{2a'_k p}{p^2+\omega_k^2} + Y_2(p). \tag{10.4}$$

В соответствии с правой частью (10.4) двухполюсник осуществляют в виде параллельного соединения емкостного элемента $a'_1$, индуктивного $1/a'_0$, двухполюсников рис. 10.2, *з* (им соответствуют слагаемые вида $\frac{2a'_k p}{p^2+\omega_k^2}$) и двухполюсника минимальной реактивной проводимости $Y_2(p)$, не содержащего полюсов на мнимой оси. Коэффициенты $a'_0$ и $a_k$ находят путем нахождения интегральных вычетов функции $Y(p)$ соответственно при $p=0$ и $p = j\omega_k$, а $C = a'_1 = \lim\limits_{p\to\infty} Y(p)/p$.

Если функция $Y_2(p) = \sum \frac{m}{p+n}$, то ее реализуют в виде параллельного соединения двухполюсников рис. 10.2, *е*. Если функция $Y_2(p) = \sum \frac{rp}{p+s}$, то ее реализуют параллельным соединением двухполюсников рис. 10.2, *ж*[1]. Следует иметь в виду, что при реализации

[1] Полагаем, что коэффициенты $m$ и $r$ действительны и положительны.



двухполюсника по его $Z(p)$ в виде последовательного соединения простейших двухполюсников, начиная с некоторого этапа, может оказаться целесообразным перейти от сопротивления к проводимости и дальнейшую реализацию осуществлять уже параллельно соединенными двухполюсниками. Потребность в таком переходе может возникнуть, например, когда остающаяся для реализации часть $Z(p)$ имеет нуль при $p=0$. Этому нулю соответствует полюс $Y(p)$ при $p=0$, который реализуют индуктивным элементом.

**Пример 114.** Реализовать $Z(p) = \frac{p^3+3p^2+2p+2}{p(p^2+2p+p)}$.

Решение. Так как $Z(p)$ имеет полюс при $p=0$, то в схеме может быть выделен последовательно включенный конденсатор емкостью $C=1/a_0$, где $a_0 = \operatorname*{Res}_{p=0} Z(p) = 2/2 = 1$. Функция $Z(p)$ не имеет полюсов, лежащих на мнимой оси. Поэтому в состав его не входят последовательно включенные двухполюсники рис. 10.2, *в*. Определим, какое $Z(p)$ осталось реализовать, обозначим его

$$Z_3(p) = Z(p) - \frac{a_0}{p} = \frac{p^2+2p}{p^2+2p+2}.$$

Функция $Z_3(p)$ имеет нуль при $p=0$. Для реализации оставшейся части схемы перейдем к проводимости $Y_3(p) = \frac{p^2+2p+2}{p(p+2)}$. Полюсу этой проводимости при $p=0$ соответствует индуктивный элемент индуктивностью $a_0^1 = \operatorname*{Res}_{p=0} Y_3(p) = 1$.

Осталось реализовать

$$Y_2(p) = Y_3(p) - \frac{1}{p} = \frac{p^2+p}{p(p+2)} = \frac{p}{p+2} + \frac{1}{p+2}.$$

Слагаемому $p/(p+2)$ в соответствии с рис. 10.2, *ж* отвечает ветвь из последовательно соединенных $R=1$ Ом и $C=0{,}5$ Ф. В соответствии с рис. 10.2, *е* проводимости $1/(p+2)$ отвечает ветвь с $L=1$ Гн и $R=2$ Ом. Полученная схема изображена на рис. 10.4, *а*.

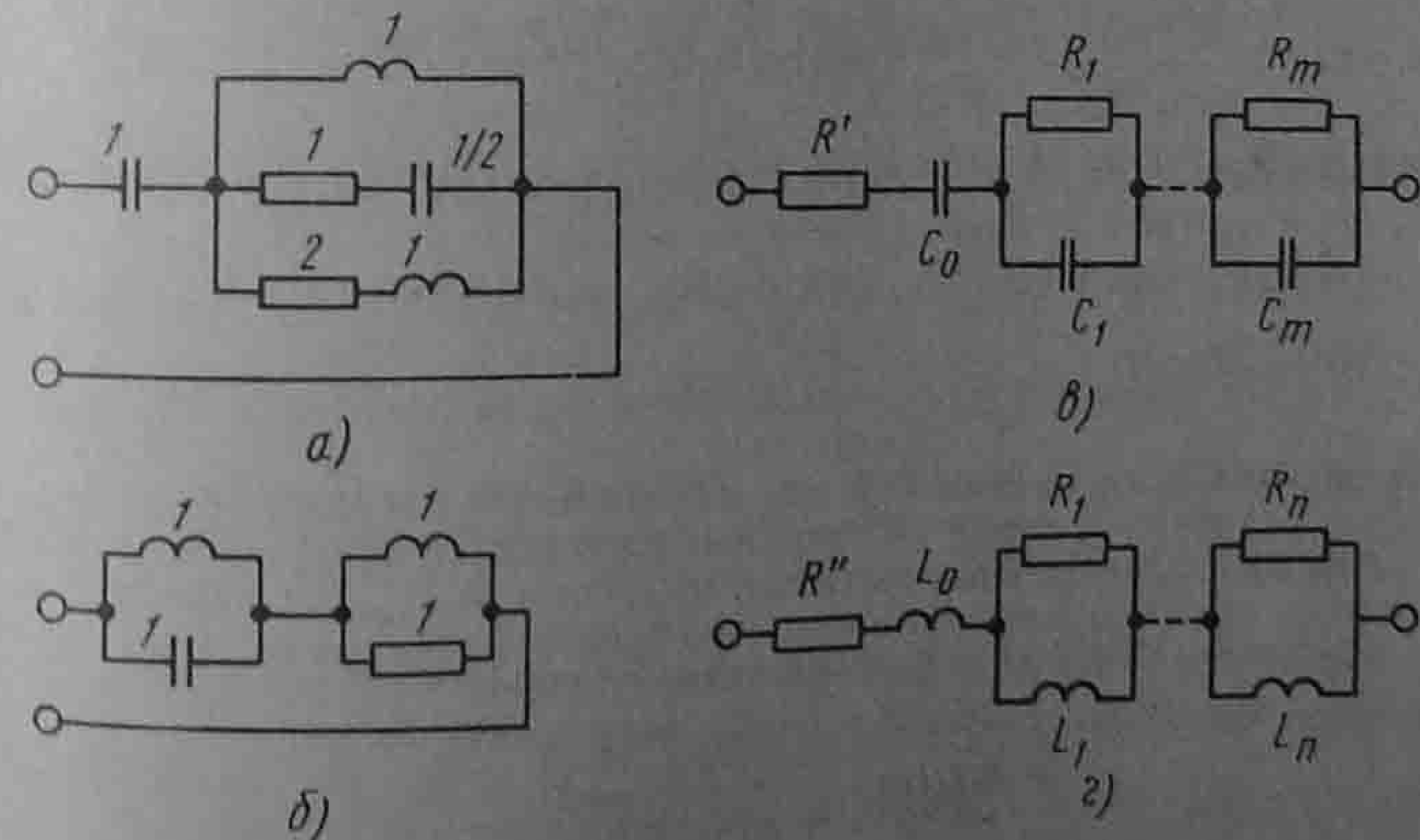



Рис. 10.4

**Пример 115.** Реализовать $Z(p)=\dfrac{p^3+p^2+2p}{p^3+p^2+p+1}$.

Решение. При $p=0$ у $Z(p)$ нет полюса, поэтому последовательно включенный конденсатор у искомого двухполюсника отсутствует. Функция $Z(p)$ имеет два полюса $p_{1,2}=\pm j$, расположенных на мнимой оси. Выделим параллельный резонансный контур рис. 10.2, *в*, соответствующий этим полюсам:

$$a_k=\operatorname*{Res}_{p=j} Z(p)=\operatorname{Res}\left(\frac{p^3+p^2+2p}{3p^2+2p+1}\right)_{p=j}=\frac{-j-1+2j}{-3+2j+1}=\frac{1}{2};\quad C_k=\frac{1}{2a_k}=1\ \text{Ф}.$$

$$\omega_k=1;\quad L_k=1/(\omega_k^2C_k)=1\ \text{Гн}.$$

Найдем функцию минимального реактивного сопротивления:

$$Z_1(p)=Z(p)-\frac{p}{p^2+1}=\frac{p}{p+1}.$$

В соответствии с рис. 10.2, *г* реализуем $Z_1(p)$ в виде параллельного соединения $R=1$ Ом и $L=1$ Гн. Схема искомого двухполюсника изображена на рис. 10.4, *б*.

Двухполюсники, состоящие только из $R$ и $C$, могут быть реализованы, например, канонической схемой рис. 10.4, *в*, а состоящие из $R$ и $L$ — схемой рис. 10.4, *г*. Для схемы рис. 10.4, *в*

$$Z(p)=R'+\frac{a_0}{p}+\sum_{k=1}^{m}\frac{b_k}{p+d_k};\quad b_k=\frac{1}{C_k};$$

$$d_k=\frac{1}{R_kC_k};\quad R'=\lim_{p\to\infty}Z(p);\quad a_0=\lim_{p\to 0}pZ(p);\quad b_k=\operatorname*{Res}_{p=-d_k}Z(p).$$

Для схемы рис. 10.4, *г*

$$Z(p)=R''+pL_0+\sum_{k=1}^{n}\frac{a_kp}{p+m_k};$$

$$R''=\lim_{p\to 0}Z(p);\quad L_0=\lim_{p\to\infty}Z(p)/p.$$

Параметры $R_k$ и $L_k$ находим, имея в виду, что сопротивление $\dfrac{a_kp}{p+m_k}$ соответствует параллельному соединению $R_k$ и $L_k$, где $a_k=R_k$; $m_k=R_k/L_k$; $a_k=\operatorname*{Res}_{p=-m_k}Z(p)/p$.

**§ 10.5. Метод Бруне.** Основные этапы метода Бруне следующие.

1. Прежде всего проверяют, не содержит ли заданное $Z(p)$ [назовем его $Z_{\text{зад}}(p)$] полюсов на мнимой оси. Если они имеются, то из состава $Z_{\text{зад}}(p)$ выделяют соответствующие этим полюсам один или несколько последовательно включенных параллельных резонансных контуров. В результате получают

$$Z_{\text{зад}}(p)-\sum\frac{2a_kp}{p_2+\omega_k^2}=Z(p). \qquad (10.5)$$

Этот этап соответствует переходу от рис. 10.5, *а* к рис. 10.5, *б*.



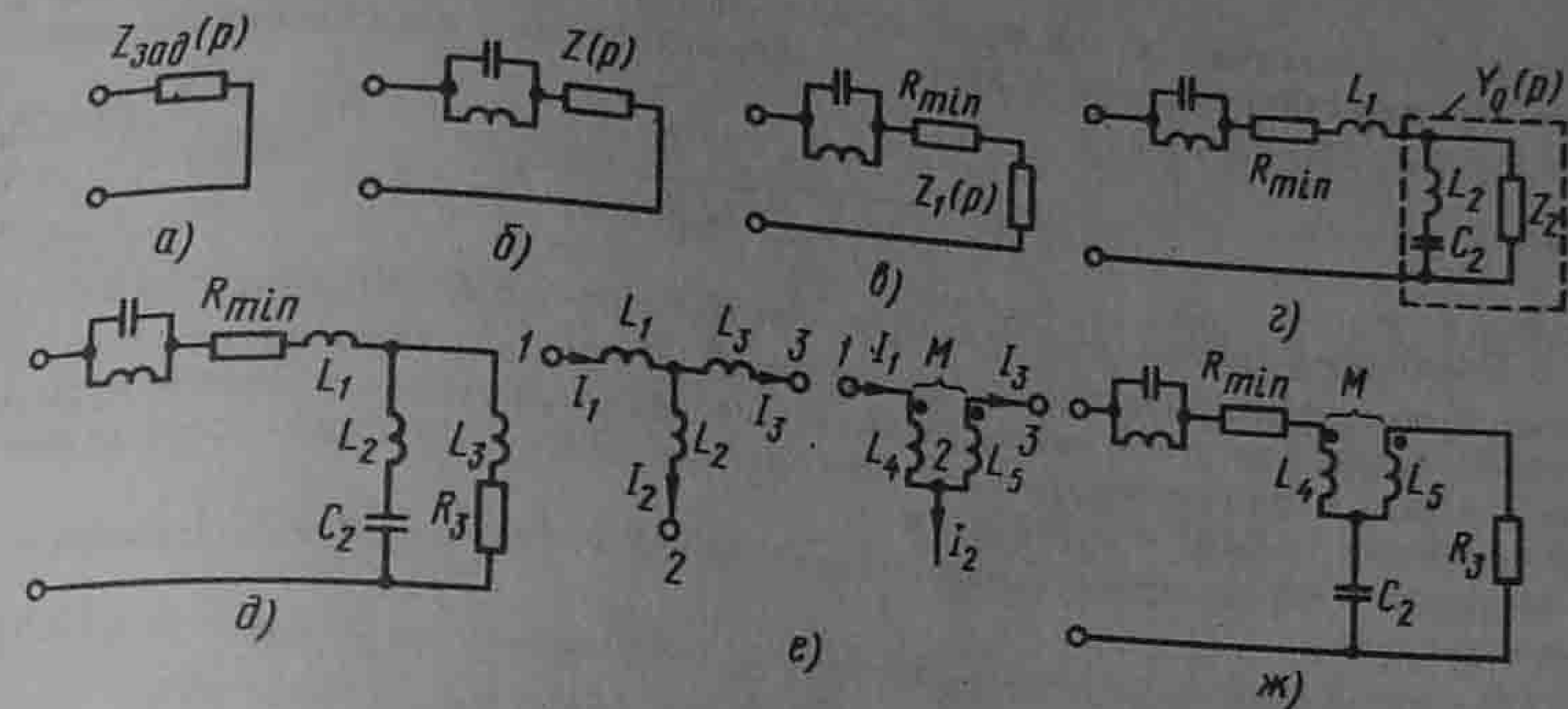



Рис. 10.5

Коэффициент $a_k=\operatorname*{Res}_{p=j\omega k}Z_{\text{зад}}(p)$. Функция $Z(p)$ не имеет полюсов на мнимой оси и представляет собой функцию минимального реактивного сопротивления.

2. Полагая $p=j\omega$ в $Z(j\omega)$ выделяют действительную часть, т. е. находят $\operatorname{Re}Z(j\omega)$ и определяют частоту $\omega$, при которой $\operatorname{Re}=\operatorname{Re}Z(j\omega)$ минимальна. Эта частота может быть равна нулю, бесконечности или иметь некоторое конечное значение (в последнем случае ее будем называть $\omega_0$). Подсчитывают также минимальное значение $\operatorname{Re}Z(j\omega)$, которое называют $R_{\min}$.

3. Из $Z(p)$ вычитают $R_{\min}$ и находят $Z_1(p)$. Этой операции соответствует переход от рис. 10.5, *б* к рис. 10.5, *в*. Заметим, что степени числителя и знаменателя $Z_1(p)$ одинаковы.

4. Если частота, при которой имеет место минимум $\operatorname{Re}Z(j\omega)$ равна нулю или бесконечности, то уже на этой стадии делается попытка реализовать $Z(p)$ лестничной схемой. Если же минимум $\operatorname{Re}Z(j\omega)$ имеет место при некоторой $\omega=\omega_0$, отличающейся от 0 и $\infty$, то дальнейшую реализацию производят в соответствии с п. 5 — 12.

5. Подсчитывают $Z_1(p)$ при $p=j\omega$. Так как при частоте $p=j\omega_0$ действительная часть $Z(p)=R_{\min}$, то действительная часть разности $Z(j\omega_0)-R_{\min}$ равна нулю, т. е. $Z_1(j\omega_0)$ представляет собой чисто реактивное сопротивление $jX_1$.

6. Возможны два случая. Первый, когда $X_1>0$, второй, когда $X_1<0$. Будем полагать $X_1=\omega_0L_1>0$ (случай $X_1<0$ рассмотрен в п. 12). Тогда

$$L_1=X_1/\omega_0. \qquad (10.6)$$

7. Составляют разность $Z_1(p)-pL_1$ и приводят ее к общему знаменателю. Например, если исходить из того, что

$$Z_1(p)=\frac{p^2+a_1p+a_0}{p^2+b_1p+b_0},$$

то проводимость оставшейся для реализации части двухполюсника

$$Y_0(p)=\frac{1}{Z_1(p)-pL_1}=\frac{p^2+b_1p+b_0}{-p^3L_1+p^2(1-b_1L_1)+p(a_1-b_0L_1)+a_0}. \qquad (а)$$

Обратим внимание на то, что в знаменателе $Y_0(p)$ имеется слагаемое $-p^3L_1$, которое при дальнейшей реализации приведет к появлению в схеме отрицательной индуктивности.

8. Поскольку при $p=j\omega_1$ $Z_1(p)-pL_1=0$, то $Y_0(p)=\infty$, т. е. $p=j\omega_0$ является полюсом $Y_0(p)$. Наличие полюса у $Y_0(p)$ позволяет представить оставшуюся часть

двухполюсника ветвью из последовательно соединенных $L_2$ и $C_2$, настроенной в резонанс на частоту $\omega_0$, и параллельно ей присоединенного двухполюсника сопротивлением $Z_2(p)$ (рис. 10.5, е):

$$Y_0(p) = \frac{p / L_2}{p^2+\omega_0^2} + \frac{1}{Z_2(p)}. \qquad (10.7)$$

9. Полагают $Z_2(p) = N_2(p) / M_2(p)$. Степени полиномов $N_2(p)$ и $M_2(p)$ должны быть такими, чтобы после приведения правой части (10.7) к общему знаменателю степень полинома числителя левой части равнялась степени полинома числителя правой части; то же и в отношении степеней знаменателей. Так, если $Y_0(p)$ соответствует выражению (а), то $Z_2(p) = (c_1p+c_0) / d$.

Методом неопределенных коэффициентов можно найти $c_1$, $c_0$, $d_0$ и $L_2$. В рассматриваемом случае

$$c_1 = -L_1\omega_0^2;\ c_0 = a_0;\ d_0 = b_0; \qquad (10.8)$$
$$L_2 = L_1\omega_0^2 / (b_0-\omega_0^2);\ c_2 = 1 / (\omega_0^2 L_2).$$

Разность $(b_0-\omega_0^2)>0$; это следует из того, что условие $X_1>0$ означает, что $\mathrm{Im}\left[\frac{p^2+a_1p+a_0}{p^2+b_1p+d_0}\right]>0$, а при $p = j\omega_0$ $\mathrm{Re}Z_1(p)=0$.

10. Реализацию $Z_2(p)$ производят, как правило, лестничной схемой. В рассматриваемом примере $Z_2(p)$ реализуют индуктивным $L_3 = c_1 / d_0 = -\omega_0^2 L_1 / b_0$ и резистивным $R_3=a_0/b_0$ элементами (рис. 10.5, д). Важно обратить внимание на то, что $L_3$ оказалось отрицательной.

11. Так как физически осуществить отрицательную $L_3$ в линейной цепи невозможно, то дальнейший этап реализации в методе Бруне состоит в том, чтобы три магнитно не связанные индуктивные катушки, имеющие индуктивности $L_1$, $L_2$ и $L_3$, заменяют трансформатором, состоящим из двух катушек $L_4$ и $L_5$, между которыми имеется магнитная связь (взаимная индуктивность $M$). Это действие является обратным по отношению к операции "развязывания" магнитно-связанных цепей.

На рис. 10.5, е изображены два участка цепи: левый — до преобразования, правый — после преобразования; показаны положительные направления токов в ветвях и указаны одноименные зажимы катушек. Напряжения между точками *1* и *2* для обоих участков цепи в силу их эквивалентности должны быть одинаковы, т. е.

$$pL_1I_1+pL_2I_2 = pL_4I_1-pMI_3,$$
$$-pL_2I_2+pL_3I_3 = pL_5I_3-pMI_1.$$

Подставляя в эти две строки $I_1=I_2+I_3$ и учитывая, что каждая из них должна удовлетворяться при любых значениях токов, получают:

$$M = L_2;\ L_4 = L_1+L_2;\ L_5 = L_2+L_3, \qquad (10.9)$$

где $L_4$ и $L_5$ положительны. Окончательная схема изображена на рис. 10.5, ж.

12. Если условиться сумму степеней полиномов в числителе и знаменателе $Z_{зад}(p)$ называть порядком $Z_{зад}(p)$, то совокупность перечисленных операций ("цикл Бруне") позволяет снизить порядок на четыре. Естественно, что потребность в каком-либо одном или нескольких этапах в любом конкретном примере может и не возникнуть (например, в этапах 1 или 3).

Для $Z_{зад}(p)$, порядок которых достаточно высок, может возникнуть потребность применить эту последовательность операций не один раз. В заключение отметим, что если в п. 5 $X_1<0$, то $L_1<0$, а вычитание согласно п. 7 сопротивления $-p\,|L_1|$ сводится к прибавлению сопротивления $+p\,|L_1|$.

Некоторым недостатком метода Бруне является его относительная сложность и необходимость введения в схему идеального трансформатора с коэффициентом связи $k^2 = M^2 / (L_4L_5) = 1$.



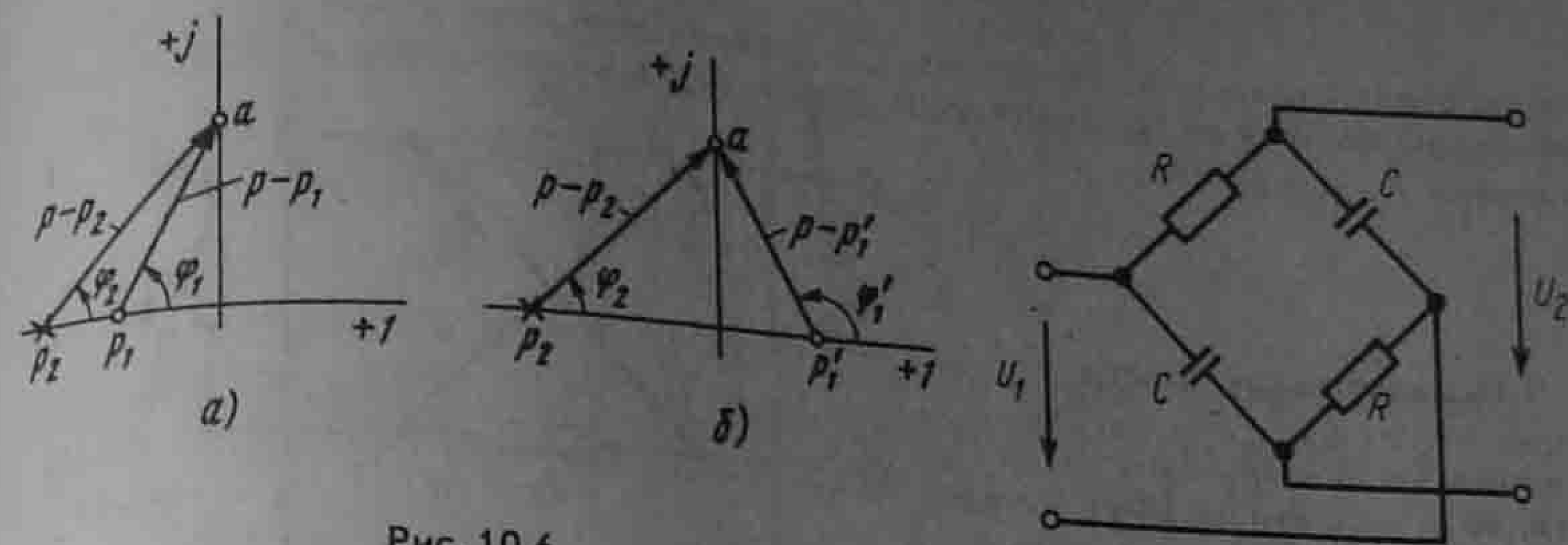



Рис. 10.6

Рис. 10.7

**§ 10.6. Понятие о минимально-фазовом и неминимально-фазовом четырехполюсниках.** У минимально-фазовых (м.ф.) четырехполюсников все нули передаточной функции расположены в левой части плоскости $p$. У неминимально-фазовых (н.ф.) четырехполюсников хотя бы часть нулей находится в правой части плоскости $p$.

Название объясняется тем, что при одинаковом значении модулей передаточной функции м.ф. и н.ф. четырехполюсников аргумент передаточной функции м.ф. четырехполюсника меньше аргумента передаточной функции н.ф. четырехполюсника. Поясним сказанное.

Сравним выражения для двух передаточных функций:

$$K'(p) = \frac{p-p_1}{p-p_2} \quad \text{и} \quad K''(p) = \frac{p-p'_1}{p-p_2}.$$

Положим, что $p_1$ и $p'_1$ равны по модулю и действительны. Нуль первого выражения находится в левой части плоскости $p$ (рис. 10.6, *а*), а нуль второго $p'_1 = -p_1$ — в правой части плоскости $p$ (рис. 10.6, *б*). Пусть на вход обоих четырехполюсников воздействует синусоидальное напряжение частотой $\omega$. Некоторой конкретной частоте на комплексной плоскости соответствует точка $a$ на оси $+j$. Образуем разности $p-p_1$ и $p-p_2$ на рис. 10.6, *а* и разности $p-p'_1$ и $p-p_2$ на рис. 10.6, *б*:

$$\frac{p-p_1}{p-p_2} = \frac{p''_1}{p''_2}e^{j(\varphi_1-\varphi_2)}; \quad \frac{p-p'_1}{p-p_2} = \frac{p''_1}{p''_2}e^{j(\varphi'_1-\varphi_2)}.$$

Модули этих передаточных функций одинаковы и равны $p''_1/p''_2$ тогда как аргументы различны. Аргумент $\varphi_1-\varphi_2$ первого четырехполюсника меньше аргумента $\varphi'_1-\varphi_2$ второго четырехполюсника. Четырехполюсник с передаточной функцией $K'(p)$ минимально-фазовый, а четырехполюсник с $K''(p)$ неминимально-фазовый. Пример н.ф. четырехполюсника на рис. 10.7. Для него $K(p) = \frac{1-RCp}{1+RCp}$.

В м.ф. четырехполюснике существует однозначная зависимость

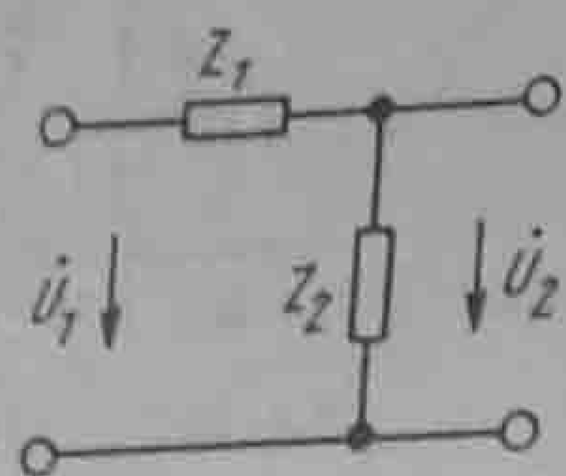



Рис. 10.8

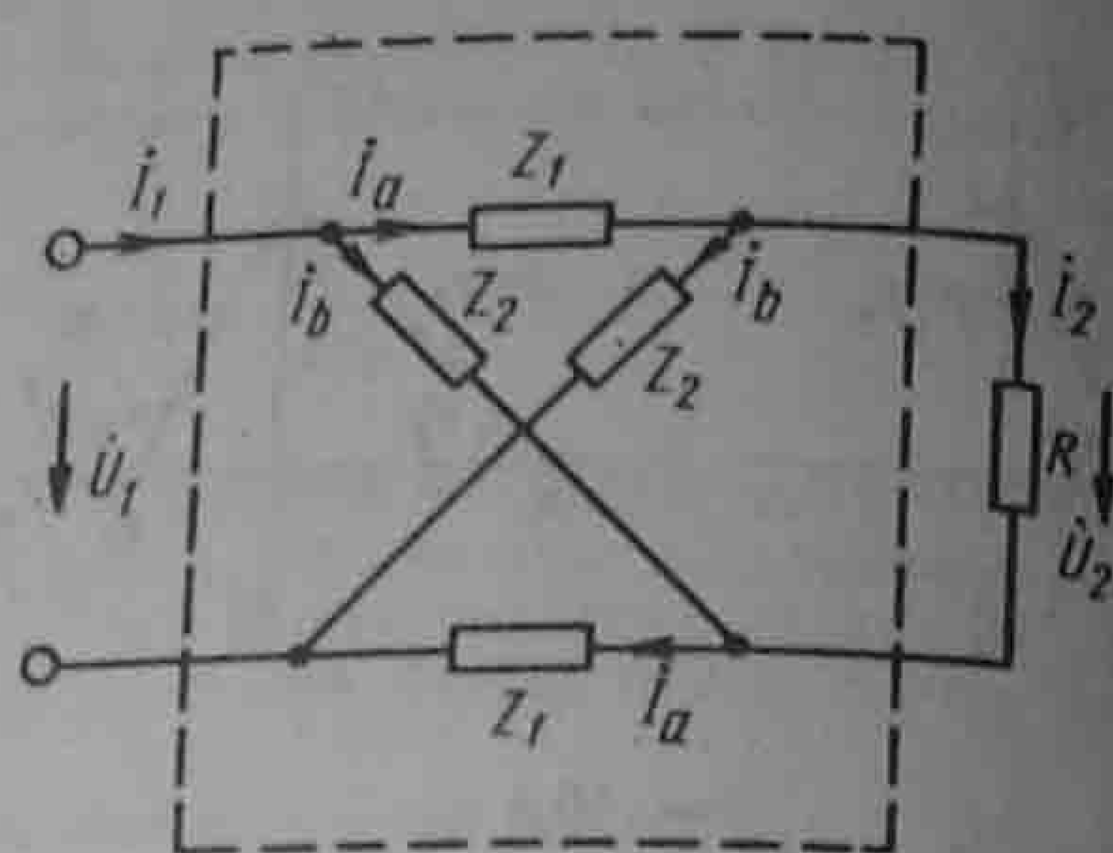



Рис. 10.9

между модулем и аргументом передаточной функции. В н.ф. четырехполюсниках между модулем и аргументом передаточной функции нет однозначной зависимости.

Перейдем к вопросу о реализации четырехполюсника по его заданной передаточной функции, полагая, что она удовлетворяет условиям физической реализуемости. Существует много различных методов реализации. В одних методах в основу положена передаточная функция при холостом ходе четырехполюсника, а других — передаточная функция четырехполюсника, нагруженного на согласованное резистивное сопротивление. В последнем случае принято нагрузку брать равной 1 Ом и называть ее нормализованной.

В одних методах реализации сопротивление источника питания полагают равным нулю, в других равным заданному значению. Каждый способ реализации имеет те или иные ограничения.

**§ 10.7. Синтез четырехполюсников Г-образными $RC$-схемами.** Г-образный четырехполюсник (рис. 10.8) является делителем напряжения. Его передаточная функция по напряжению при холостом ходе

$$\frac{U_2(p)}{U_1(p)}=\frac{Z_2(p)}{Z_1(p)+Z_2(p)}. \qquad (10.10)$$

В дальнейшем вместо $Z_1(p)$ и $Z_2(p)$ будем писать соответственно $Z_1$ и $Z_2$.

Положим, что с помощью Г-образного четырехполюсника, состоящего из $RC$-элементов, требуется реализовать передаточную функцию по напряжению при холостом ходе:

$$U_2(p)\ /U_1(p)=N\ /M, \qquad (10.11)$$

где $N$ и $M$ — полиномы по степеням $p$; $N/M$ удовлетворяет условиям, которые предъявляются к передаточной функции $RC$-четырехполюсника.

Приравняем правые части (10.10) и (10.11)

$$N\ /M=Z_2\ /(Z_1+Z_2). \qquad (10.12)$$

Разделим числитель и знаменатель правой части (10.12) на некоторый полином $Q=Q(p)$, имеющий тот же порядок, что и полиномы $N$ и $M$; корни его чередуются с корнями уравнений $N=0$ и $M=0$. Тогда

$$\frac{Z_2}{Z_1+Z_2}=\frac{N\ /\ Q}{M\ /\ Q}. \qquad (10.13)$$

Из уравнения (10.13) находим $Z_2=N/Q$ и $Z_1=(M-N)/Q$. Реализуем двухполюсники $Z_1$ и $Z_2$ по найденным операторным сопротивлениям[1]. Реализацию двухполюсников производят в соответствии с § 10.3 и 10.4.

Аналогично производится синтез Г-образными $RL$-схемами.

**§ 10.8. Четырехполюсник для фазовой коррекции.** На рис. 10.9 изображена симметричная скрещенная схема, состоящая из чисто реактивных двухполюсников $Z_1$ и $Z_2$, на выходе которой включен резистор сопротивлением $R$. Положительные направления токов и напряжений указаны на схеме.

В уравнении $\dot U_2+\dot I_aZ_1=\dot I_bZ_2$ заменим $\dot U_2$ на $\dot I_2R$ и учтем, что $\dot I_2=\dot I_a-\dot I_b$. Это дает возможность выразить $\dot I_b$ через $\dot I_a$:

$$\dot I_b=\dot I_a\frac{R+Z_1}{R+Z_2}.$$

Подставим $\dot I_b$ в $\dot I_2=\dot I_a-\dot I_b$ и найдем

$$\dot I_a=\dot I_2\frac{R+Z_2}{Z_2-Z_1},\quad \dot I_b=\dot I_2\frac{R+Z_1}{Z_2-Z_1}.$$

Составим уравнение для периферийного контура:

$$\dot U_1=2Z_1\dot I_a+\dot U_2=\dot U_2\frac{R(Z_1+Z_2)+2Z_1Z_2}{R(Z_2-Z_1)}.$$

Передача напряжения

$$K_U=\frac{\dot U_2}{\dot U_1}=\frac{R(Z_2-Z_1)}{R(Z_1+Z_2)+2Z_1Z_2}.$$

Входной ток

$$\dot I_1=\dot I_a+\dot I_b=\dot I_2\frac{2R+Z_1+Z_2}{Z_2-Z_1}.$$

[1] Предполагаем, что полином $Q(p)$ может быть найден и что $Z_1$ и $Z_2$ удовлетворяют условиям, перечисленным в § 10.2.

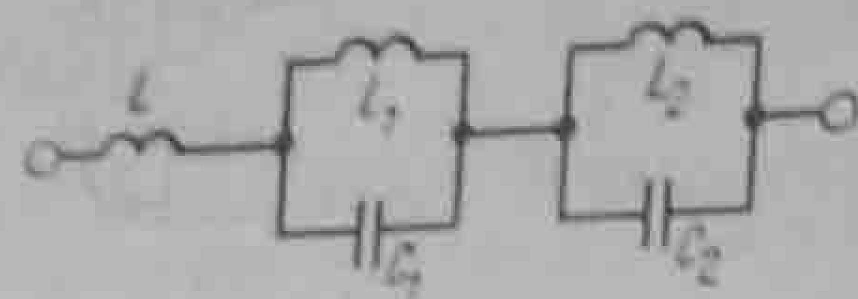



Рис. 10.10

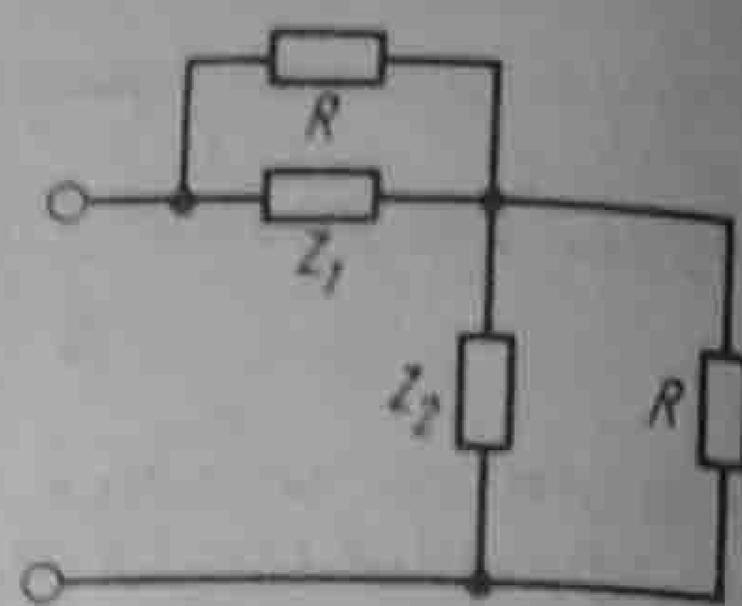



Рис. 10.11

Входное сопротивление

$$Z_{вх} = \frac{U_1}{I_1} = \frac{R(Z_1+Z_2)+2Z_1Z_2}{2R+Z_1+Z_2}.$$

Приравняв $Z_{вх}=R$, получим соотношение $Z_1Z_2=R^2$. Из него следует, что реактивные сопротивления $Z_1$ и $Z_2$ взаимно обратны.

В формулу для $K_U$ подставим $Z_2 = R^2 / Z_1$:

$$K_U = \frac{R-Z_1}{R+Z_1} = K_U(\omega)e^{j\varphi(\omega)}. \qquad (а)$$

Так как $Z_1$ — чисто реактивное сопротивление, то модули числителя и знаменателя формулы (а) одинаковы и потому $K_U(\omega) = 1$. При изменении частоты $\omega$ меняется только аргумент $\varphi(\omega)$.[1] Четырехполюсник рис. 10.9 служит для фазовой коррекции. С этой целью его включают между источником питания с внутренним сопротивлением $R$ и активной нагрузкой $R$, и он, не изменяя напряжение источника питания по модулю, поворачивает его на требуемый угол $\varphi(\omega)$ по фазе, осуществляя этим фазовую коррекцию.

Имея в виду, что $K_U^{(\omega)} = 1$; $e^{j\varphi(\omega)} = \cos\varphi(\omega)+j\sin\varphi(\omega)$, определим из (а)

$$Z_1 = R\frac{1-K_U}{1+K_U} = R\frac{1-\cos\varphi(\omega)-j\sin\varphi(\omega)}{1+\cos\varphi(\omega)+j\sin\varphi(\omega)} = -jR\,\mathrm{tg}\frac{\varphi(\omega)}{2} = jX.$$

Сопротивление $Z_2 = R^2 / Z_1$. Сопротивление $Z_1=jX$ чисто реактивное. График $X=f(\omega)$ имеет вид тангенсоиды. При $\varphi(\omega) = \pi,\ 2\pi \ldots X$ изменяет знак. Иногда $Z_1$ реализуют схемой (рис. 10.10). Для определения параметров этой схемы составляют столько уравнений, сколько параметров неизвестно, и затем эти уравнения совместно решают. Положим, что $\varphi(\omega)$ корректирующего четырехполюсника должна иметь значения $\varphi(\omega_1)$ при $\omega_1$, $\varphi(\omega_2)$ при $\omega_2$ и т. д. Тогда уравнения, которые нужно совместно решить относительно $L,\ L_1,\ L_2,\ C_1,\ C_2$, получают, если входное сопротивление схемы (рис. 10.10)

$$j\omega L + \frac{j\omega L_1}{1-\omega^2L_1C_1} + \frac{j\omega L_2}{1-\omega^2L_2C_2}$$

[1]Обратим внимание на то, что знак $\varphi(\omega)$ противоположен знаку аргумента $b$ в выражении постоянной передачи $g=a+jb$ четырехполюсника.



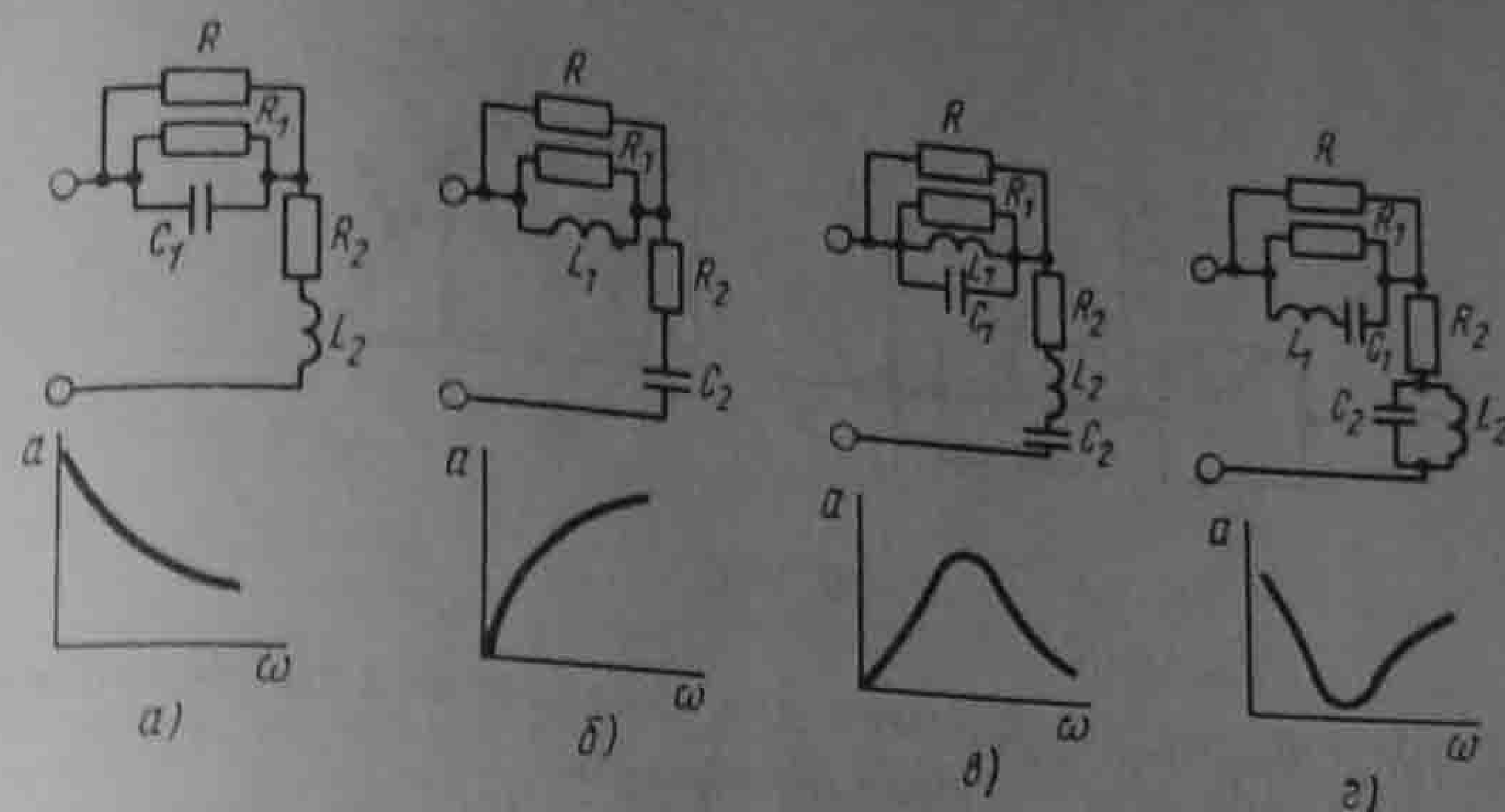



Рис. 10.12

последовательно приравнивать к $Z_1 = -jR\,\mathrm{tg}\frac{\varphi(\omega)}{2}$ при выбранных частотах. В результате система уравнений относительно $L,\ L_1,\ C_1,\ C_2$ имеет вид

$$-\frac{R}{\omega_1}\mathrm{tg}\frac{\varphi(\omega_1)}{2} = L + \frac{L_1}{1-\omega_1^2L_1C_1} + \frac{L_2}{1-\omega_1^2L_2C_2},$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**§ 10.9. Четырехполюсник для амплитудной коррекции.** Схема четырехполюсника, осуществляющая амплитудную коррекцию, изображена на рис. 10.11. Корректор нагружен на резистор сопротивлением $R$, входное сопротивление его также равно $R$. Сопротивления $Z_1$ и $Z_2$ взаимно обратны ($Z_1Z_2=R^2$). Постоянную передачу $g=a+jb$ (см. § 4.10) в этом случае определяют по формуле

$$e^g = e^{a+jb} = 1+Z_1 / R.$$

Так как $|e^{jb}| = 1$, то $e^a = |1+Z_1 / R|$. Последняя формула связывает параметры схемы рис. 10.11 и частоту $\omega$ с затуханием $a$. В зависимости от того, что представляет собой сопротивление $Z_1$, характер зависимости $a = f(\omega)$ оказывается различным. В качестве примера на рис. 10.12, *а* — *г* изображены четыре схемы с различными $Z_1$ и $Z_2$ и графики соответствующих им зависимостей.

Схему амплитудного корректора выбирают в соответствии с той зависимостью $a = f(\omega)$, которую необходимо реализовать. Параметры схемы корректора (например, сопротивление $R_1$, емкость конденсатора $C_1$ для схемы рис. 4.12, *а*) определяют путем совместного решения системы уравнений, полученных приравниванием модуля величины $|1+Z_1 / R|$ значение $e^a$ при фиксированных значениях частоты $\omega$. Уравнений составляют столько, сколько в $Z_1$ неизвестных параметров. Уравнения имеют вид

$$|1+Z_1 / R|_{\omega_1} = e^{a(\omega_1)};\ |1+Z_1 / R|_{\omega_2} = e^{a(\omega_2)}, \ldots$$

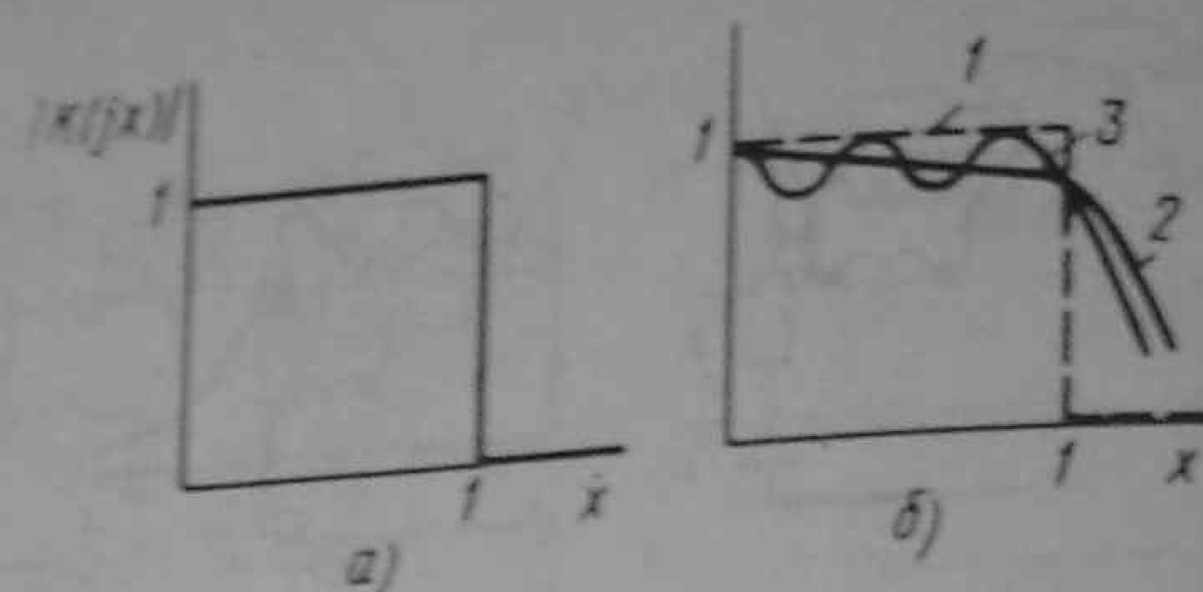



Рис. 10.13

Частоты $\omega_1$, $\omega_2$, ... выбирают для характерных точек зависимости $a = f(\omega)$ либо через равные интервалы.

**§ 10.10. Аппроксимация частотных характеристик.** *Аппроксимация* — это при-
ближенная замена заданной частотной зависимости другой частотной зависимо-
стью, которая точно совпадает с заданной в ограниченном числе точек, отклоняется
от нее в допустимых пределах вне этих точек, давая в то же время физически
реализуемую функцию. Например, кривая $|K(j\omega)|$ рис. 10.13, *а* — это частотная
характеристика идеального фильтра НЧ $|K(jx)| = f(x)$, где $K(jx)$ — передаточная
функция; $x = \omega / \omega_c$, где $\omega_c$ — безразмерная величина, равная частоте среза.

В диапазоне изменения $x$ от 0 до 1 $|K(jx)| = 1$; при $x > 1$ $|K(jx)| = 0$. Пунктирная кривая *1* рис. 10.13, *б* повторяет кривую рис. 10.13, *а*, кривая *2* характеризует гладкую аппроксимацию, при которой отклонение от кривой *1* неодинаково в диапазоне аппроксимации. Кривая *3* иллюстрирует равноволновую аппроксимацию, при которой абсолютные значения максимальных отклонений от средней линии в обе стороны одинаковы. Гладкую аппроксимацию осуществляют обычно полиномами Баттерворта, равноволновую — полиномами Чебышева. Известны и другие способы аппроксимации [9, 17], у каждого из них имеются свои достоинства и недостатки.

*Гладкая аппроксимация*. Применительно к фильтру НЧ аппроксимацию квадрата модуля передаточной функции четырехполюсника осуществляют так:

$$|K(jx)|^2 = \frac{1}{1 + mx^{2n}}.$$

Принимают, что при $x=1$ $|K(jx)| = 1/\sqrt{2}$, откуда $m = 1$. Полагая $p = jx$, найдем полюсы $|K(jx)|^2$:

$$K(jx)K(-jx) = \frac{1}{1 + (p/j)^{2n}}.$$

При нечетных $n$ $p_k = 1^{1/2n} = e^{jk\pi/n}$ $k = 0, 1, ..., n$; при четных $n$ $p_k = (-1)^{1/(2n)} =$
$= e^{\frac{j(2k+1)\pi}{2n}}$, $k = 0, 1, ..., n$.

Полюсы расположены симметрично по окружности единичного радиуса. Поли-
номы $(p - p_1)...(p - p_n)$ образуют знаменатель $K(jx)$ и называются полиномами Бат-
терворта. При составлении их используют значения $p$, находящиеся только в левой
полуплоскости. Это обеспечивает физическую осуществимость $K(p)$. Запишем поли-
номы при $n = 1$ $(p + 1)$; при $n=2$ $p^2 + \sqrt{2}p + 1$; при $n = 3$ $p^3 + 2p^2 + 2p + 1$.

Задаваясь требуемым затуханием фильтра в децибелах (обычно при $x = 2$)
$a = 10\lg(U_1/U_2)^2$ определим $n$:

$$|K(jx)| = \left|\frac{U_2}{U_1}\right| = \frac{1}{\sqrt{1 + x^{2n}}} \approx \frac{1}{x^n},\ n = \frac{20\lg|U_1/U_2|}{20\lg 2}.$$



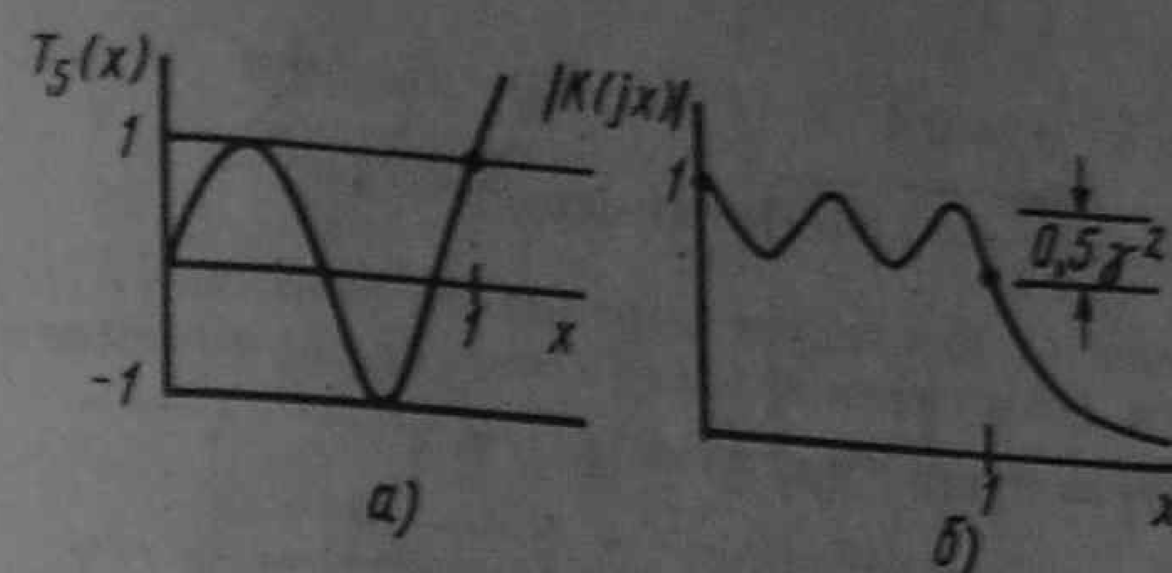



Рис. 10.14

Например, при $a = 18$ дБ $n = 18/(20 \lg 2) = 2{,}98 \approx 3$. В рассматриваемом примере

$$K(p) = \frac{1}{p^3 + 2p^2 + 2p + 1}.$$

Функцию $K(p)$ реализуют известными методами.

*Равноволновая аппроксимация*. Полиномы Чебышева порядка $n$ записывают в тригонометрической форме:

$$T_n(x) = \cos n \arccos x.$$

Полагая $\arccos x = \theta$ и имея в виду, что $\cos n\theta = \cos^n\theta - \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta + ...$, а $\sin\theta = \sqrt{1 - x^2}$, получим алгебраическую форму записи полиномов:

$$T_n(x) = x^n + C_n^2 x^{n-2}(x^2 - 1) + C_n^4 x^{n-4}(x^2 - 1)^2 + ....$$

Например, при $n = 5$ $T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$.

В интервале $x = 0 \div 1$ $T_n(x)$ колеблется от 1 до $-1$ (рис. 10.14, *а*). При $x > 1$ $T_n(x)$ монотонно возрастает.

Квадрат модуля нормированной передаточной функции фильтра НЧ с помощью полиномов Чебышева аппроксимируют так:

$$|K(jx)|^2 = \frac{1}{1 + \gamma^2 T_n^2(x)}.$$

Максимальное отклонение $|K(jx)|$ от 1 равно $\gamma^2/2$

$$1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \gamma^2}} \approx 1 - \left(1 - \frac{\gamma^2}{2}\right) = 0{,}5\gamma^2.$$

При $x > 1$, т. е. в области затухания фильтра НЧ,

$$\gamma^2 T_n(x) \gg 1 \text{ и } |K(jx)| = \frac{1}{\gamma T_n(x)} = \frac{1}{\gamma \operatorname{ch}(n \operatorname{Arch} x)}.$$

Примерный вид аппроксимирующей кривой $|K(jx)|$ показан на рис. 10.14, *б*.

Для заданного отклонения $\gamma$ и затухания $a$ в децибелах при $x = 2$ $a = 20\lg|U_1/U_2| = 20\lg|1/K(j2)|$ порядок полинома Чебышева определяют по формуле

$$n = \frac{1}{1{,}32}\operatorname{Arch}\frac{10^{a/20}}{\gamma},\ \text{где } 1{,}32 = \operatorname{Arch} 2.$$

Например, для $\gamma = 0{,}4$ и $a = 30$ дБ при $x = 2$ $|K(jx)| = 0{,}0318$;

$n = \frac{1}{1{,}32}\mathrm{Arch}\frac{10^{1,5}}{0{,}4} = \frac{5{,}06}{1{,}32} = 3{,}84$. Принимаем $n = 4$.

Для составления $K(jx)$ следует определить полюсы $|K(jx)|^2$, находящиеся в левой полуплоскости. Подставим в $|K(jx)|$ $x = p_k/j$ и приравняем нулю знаменатель $|K(jx)|^2$: $1 + \gamma^2 T_n^2(p_k/j) = 0$ или $T_n(p_k/j) = \pm j/\gamma$.

При $0 \leqslant x \leqslant 1$ $T_n(x) = T_n\left(\frac{p_k}{j}\right) = \cos n\left[\arccos\frac{p_k}{j}\right] = \pm j/\gamma$.

При $x > 1$ $T_n(x) = T_n(p_k/j) = \mathrm{ch}\, n\,\mathrm{Arch}(p_k/j)$.

Так как $p_k$ — комплексное число, то $\arccos p_k/j$ — тоже комплексное число, которое положим равным $\alpha_k + j\beta_k$. Тогда

$$T_n(p_k/j) = \cos(n\alpha_k + jn\beta_k) = \cos n\alpha_k \mathrm{ch}\, n\beta_k - j\sin n\,\alpha_k \mathrm{sh}\, n\beta_k = \pm j/\gamma.$$

Отсюда

$$\cos n\,\alpha_k\,\mathrm{ch}\,n\,\beta_k = 0,\ \sin n\,\alpha_k\,\mathrm{sh}\,n\,\beta_k = \pm 1/\gamma.$$

Так как $\mathrm{ch}\,n\,\beta_k \neq 0$, то

$$\cos n\,\alpha_k = 0 \text{ и } \alpha_k = (2k+1)\frac{\pi}{2n},\ k = 0,1,...,n.$$

При этом

$$\sin n\,\alpha_k = \pm 1;\ \mathrm{sh}\,n\,\beta_k = 1/\gamma;\ \beta_k = \frac{1}{n}\mathrm{Arsh}(1/\gamma).$$

Так как $\arccos(p_k/j) = \alpha_k + j\beta_k$, то $p_k = a_k + jb_k = j\cos(\alpha_k + j\beta_k)$.

Действительные и мнимые части полюсов $p_k$, лежащих в левой полуплоскости:

$$a_k = -\,\mathrm{sh}\,\beta_k \sin(2k+1)\frac{\pi}{2n};\ \beta_k = \mathrm{ch}\,\beta_k \cos\frac{(2k+1)\pi}{2n},\ k = 0,1,...,n.$$

Из последней строчки следует, что $a_k^2/\mathrm{sh}^2\beta_k + b_k^2/\mathrm{ch}^2\beta_k = 1$, т. е. полюсы $p_k$ расположены на эллипсе, одна полуось которого равна $\mathrm{sh}\beta_k$, другая — $\mathrm{ch}\beta_k$.

В рассматриваемом примере при $n = 4$ и $\gamma = 0{,}4$ $\beta_k = 0{,}412$; $\mathrm{sh}\beta_k = 0{,}421$; $\mathrm{sh}\beta_k = 1{,}08$.

Для построения эллипса чертим две окружности одну радиусом $\mathrm{sh}\beta_k$, другую радиусом $\mathrm{ch}\beta_k$ (рис. 10.15) и через начало координат проводим прямые до пересечения с окружностями под углами $\alpha_k = (2k+1)(\pi/2n)$, где $k = 0,1,..., n$. В примере $\alpha_k \approx 22{,}3; 67; 111; 156°$.

Из точек пересечения лучей с окружностью меньшего радиуса проводим вертикали, а из точек пересечения с окружностью большего радиуса — горизонтали. Точки пересечения соответствующих горизонталей и вертикалей на левой полуплоскости дают искомые полюсы. В примере $p_{0,3} = -0{,}164 \pm j0{,}995$; $p_{1,2} = -0{,}388 \pm j0{,}416$. Нормированная передаточная функция

$$K(p) = \frac{1}{(p-p_0)(p-p_3)(p-p_1)(p-p_2)} = \frac{1}{[(p+0{,}164)^2 + 0{,}995^2][(p+0{,}388)^2 + 0{,}416^2]}.$$



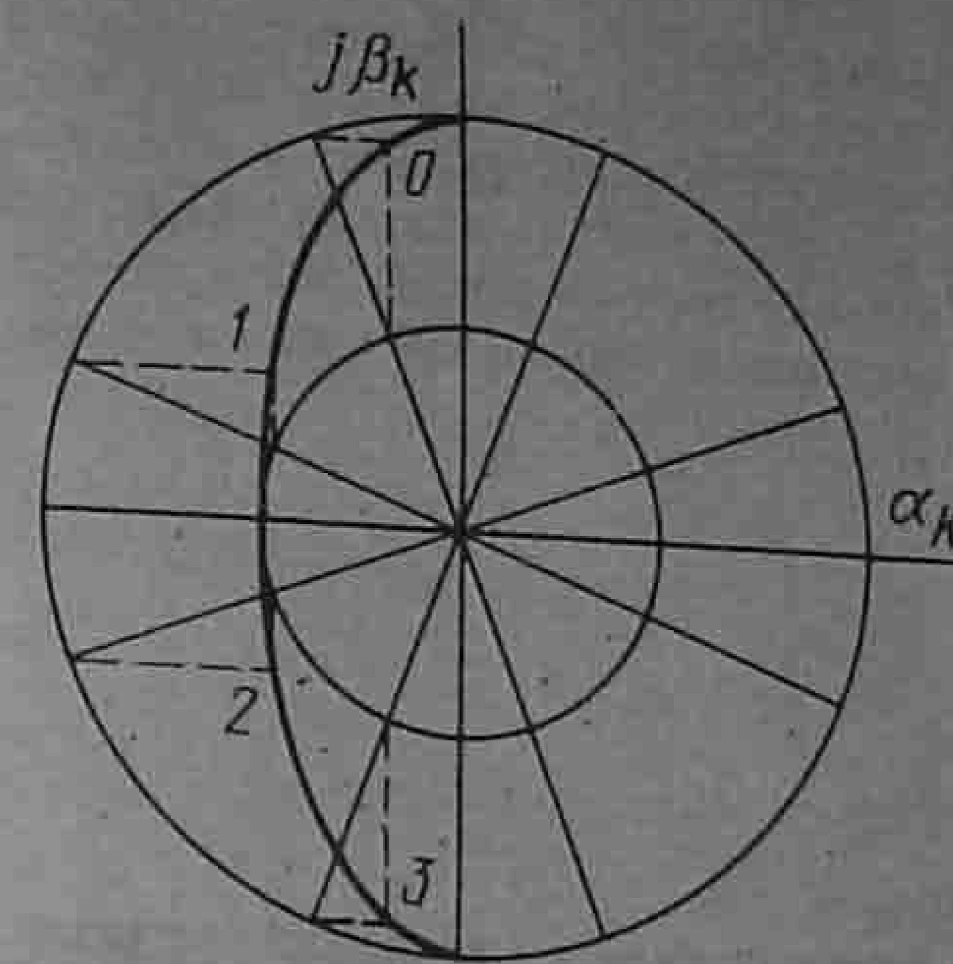



Рис. 10.15

По $K(p)$ определяют схему и ее нормированные параметры $L_н$, $C_н$. Таблицы полиномов знаменателя нормированного $K(p)$ низкочастотных фильтров, аппрокси- мированных различными способами даны в [9,17]. Для перехода от нормированных к действительным параметрам $L$, $C$ пользуются соотношениями $L = L_н/\omega_c$ и $C = C_н/\omega_c$.

Какому способу синтеза схемы и какой конкретной схеме следует отдать предпочтение, зависит не только от стоимости и габаритов при практическом осуществлении схемы, но и от того, насколько фазочастотные характеристики получающихся четырехполюсников удовлетворяют поставленной задаче.

В заключение отметим, что нормирование распространяется не только на передаточную функцию четырехполюсника, но и на другие функции, в частности на входное сопротивление или проводимость двухполюсников.

Если аппроксимируют не передаточную функцию, а входное сопротивление (проводимость) некоторого двухполюсника, то оно обычно нормируется не только по частоте $\omega_0$, но и по его числовому значению. При нормировании $Z(p)$ по числовому значению входное сопротивление (проводимость) делят на некоторую безразмерную величину $R_0 > 0$. При переходе от схемы, реализующей нормированное сопротивление $Z_н$ (ее параметры $R_н$, $L_н$, $C_н$ и частота $x$), к той же схеме, но с ненормированными параметрами (ее сопротивление $Z$, а параметры $R$, $L$, $C$), последние определяют, сопоставив почленно одинаковые слагаемые $\frac{Z}{R_0} = \frac{R}{R_0} + \frac{j\omega L}{R_0} + \frac{1}{j\omega C R_0}$ и

$$Z_н = R_н + jxL_н + \frac{1}{jxC_н}\ (x = \omega/\omega_0).$$

В результате получим $R = R_н R_0$; $L = L_н(R_0/\omega_0)$; $C = C_н/(R_0\omega_0)$, где $\omega_0$ — величина безразмерная.

## Вопросы для самопроверки

1. Укажите два основных направления развития синтеза электрических цепей. 2. Определите задачи синтеза, перечислите условия, которым должны удовлетворять $Z(p)$ физически реализуемых двухполюсников. 3. Поясните идею реализации двухполюсников лестничной схемой. Покажите, как следует упорядоченно определять ее элементы. Любое ли $Z(p)$ может быть реализовано лестничной схемой? 4. Как осуществить реализацию путем последовательного выделения простейших составляющих? 5. Нарисуйте две канонические схемы двухполюсников, отображающих идеи реализации методом выделения простейших составляющих. 6. В чем идея реализации методом Бруне? 7. Какой четырехполюсник называют минимально-фазовым? 8. Начертите схему четырехполюсника для фазовой коррекции и поясните,

как определять ее элементы, если известна зависимость $\varphi(\omega)$. 9. Изобразите схему амплитудного корректора и расскажите, как определить ее элементы, если известна зависимость $a(\omega)$. 10. В чем состоит задача аппроксимации и как она решается? 11. Поясните идею составления $K(p)$ четырехполюсника, если в основу положена: а) гладкая, б) равноволновая аппроксимация. 12. Как от нормированных параметров перейти к ненормированным, задавшись некоторыми $R_0$ и $\omega_0$? 13. Решите задачи 12.3; 12.6; 12.10; 12.7; 12.14; 12.17; 12.28.

Глава одиннадцатая

# УСТАНОВИВШИЕСЯ ПРОЦЕССЫ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ И МАГНИТНЫХ ЦЕПЯХ, СОДЕРЖАЩИХ ЛИНИИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

**§ 11.1. Основные определения**. В данной главе рассмотрены основы теории установившихся процессов в электрических и магнитных цепях, содержащих линии с распределенными параметрами.

*Электрическими линиями с распределенными параметрами* называют такие линии, в которых для одного и того же момента времени ток и напряжение непрерывно изменяются при переходе от одной точки (сечения) линии к соседней точке, т. е. являются функциями времени и пространственной координаты.

Под *магнитными линиями с распределенными параметрами* понимают такие линии, магнитный поток и магнитное напряжение вдоль которых непрерывно меняются при переходе от одной точки линии к соседней (см. § 14.24).

Эффект непрерывного изменения тока (потока) и электрического (магнитного) напряжения вдоль линии имеет место вследствие того, что линии обладают распределенными продольными и поперечными элементами (рис. 11.1, *а*).

На схеме рис. 11.1, *а* изображен участок линии с распределенными параметрами, через d$x$ обозначен бесконечно малый элемент длины линии.

Сопротивления $Z_1$, $Z_2$, $Z_3$,... называют *продольными*, в них включены сопротивления и прямого и обратного проводов; сопротивления $Z_4$, $Z_5$, $Z_6$,... называют *поперечными*.

В результате утечки тока через сопротивление $Z_4$ ток $i_2 \neq i_1$. Аналогично, ток $i_3 \neq i_2$ и т. д. Напряжение между точками a и b не равно напряжению между точками *c* и *d* и т. д.

В электрических линиях с распределенными параметрами продольные сопротивления образованы активными сопротивлениями проводов линии и индуктивностями двух противостоящих друг другу участков линии длиной d$x$. Поперечные сопротивления состоят из сопротивлений утечки, появляющейся вследствие несовершенства изоляции между проводами линии, и емкостей, образованных



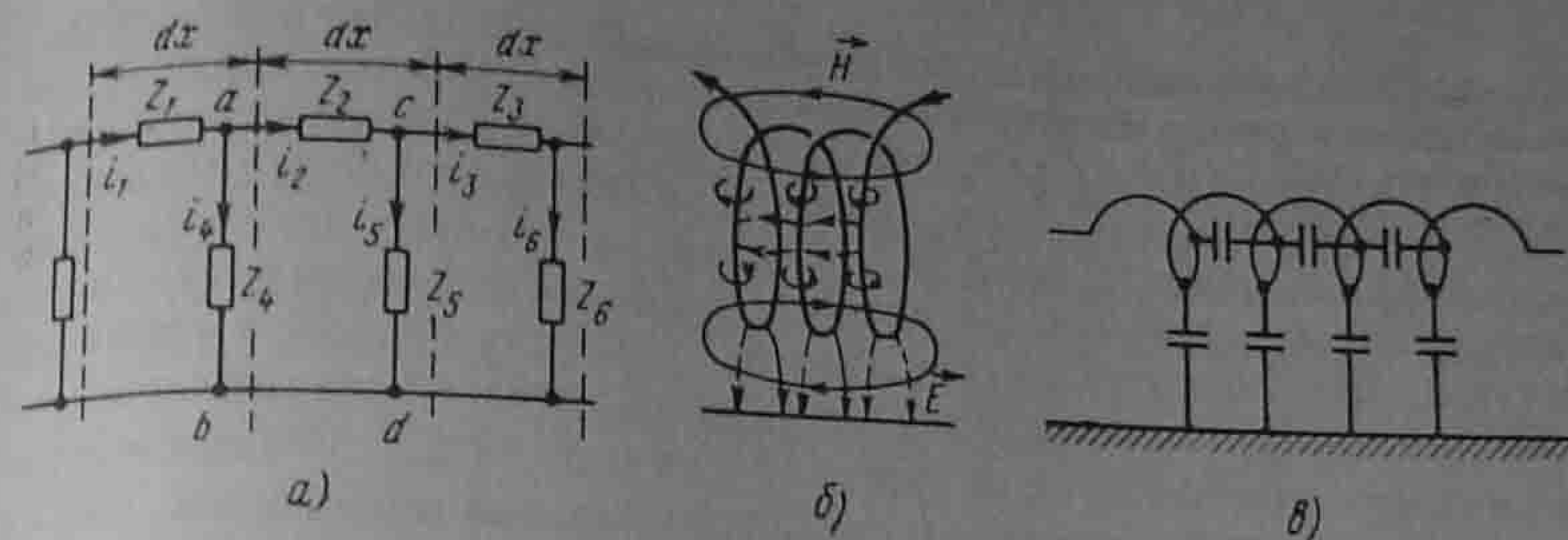



Рис. 11.1

противостоящими друг другу элементами (участками) линии. В магнитных линиях с распределенными параметрами продольные сопротивления представляют собой магнитные сопротивления самих магнитных стержней, образующих магнитную линию, а поперечные сопротивления обусловлены утечкой магнитного потока по воздуху между противостоящими друг другу участками линии.

Линию с распределенными параметрами называют *однородной*, если равны друг другу все продольные сопротивления участков линии одинаковой длины и равны друг другу все поперечные сопротивления участков линии одинаковой длины. Участок линии рис. 11.1, *а* однороден, если $Z_1 = Z_2 = Z_3 = \dots$ и $Z_4 = Z_5 = Z_6$.

Линию с распределенными параметрами называют *неоднородной*, если продольные сопротивления в ней различны или поперечные сопротивления неодинаковы.

Кроме того, линии с распределенными параметрами можно подразделить на две большие группы: нелинейные и линейные.

В *нелинейных* линиях с распределенными параметрами продольные и (или) поперечные сопротивления являются функциями протекающих по ним токов, в *линейных* продольные и поперечные сопротивления не являются функциями протекающих через них токов.

Примером нелинейной электрической линии с распределенными параметрами является электрическая линия передачи высокого напряжения при наличии между проводами линии тихого электрического разряда (явление короны на проводах). В этом случае емкость между противостоящими друг другу участками линии является функцией напряжения между этими участками.

Примером нелинейной магнитной линии с распределенными параметрами является линия, образованная параллельно расположенными магнитными сердечниками, которые в процессе работы линии могут насыщаться.

Когда используют термин "линия с распределенными параметрами", то обычно его мысленно связывают с мощными линиями передачи электрической энергии на большие расстояния, с теле-

фонными и телеграфными воздушными и кабельными линиями, с рельсовыми линиями автоблокировки на железнодорожном транспорте, с антеннами в радиотехнике и другими родственными линиями и установками. В то же время с линиями с распределенными параметрами имеют дело и тогда, когда "линий" в буквальном смысле слова, казалось бы, вовсе нет. Так, обычная индуктивная катушка при достаточно высоких частотах представляет собой линию с распределенными параметрами. Картина электрического и магнитного полей катушки показана на рис. 11.1, *б*. Линии напряженности электрического поля $\vec{E}$ показаны пунктиром, линии напряженности магнитного поля $\vec{E}$ — сплошными линиями.

Схема замещения катушки показана на рис. 11.1, *в*. Из рисунка видно, что кроме индуктивностей в схеме есть межвитковые емкости и емкости на корпус прибора (на землю).

Если по катушке проходит переменный ток, то через межвитковые емкости и емкости на землю также идет ток. При одном и том же напряжении между соседними витками ток через емкости тем больше, чем выше частота переменного тока. При низкой частоте (десятки, сотни, тысячи герц) ток через емкости несоизмеримо мал по сравнению с токами через витки катушки и наличие емкостей можно не учитывать в расчете (что и делалось до сих пор). Если же частота тока очень велика, например сотни миллиардов герц, то токи через емкости могут во много раз превышать токи через витки катушки. В этом случае вся катушка в целом будет оказывать прохождению переменного тока емкостное, а не индуктивное сопротивление (количественные изменения перешли в качественные). При промежуточных частотах порядка нескольких мегагерц (когда линейные размеры катушки соизмеримы с длиной волны) индуктивная катушка является типичной линией с распределенными параметрами. Если индуктивная катушка намотана на стальной сердечник, который способен насыщаться, и частота тока достаточно велика, то все устройство в целом представляет собой сложную совокупность из электрической и магнитной нелинейных цепей с распределенными параметрами.

В курсе ТОЭ изучают только основы однородных линейных цепей с распределенными параметрами. Вся теория излагается применительно к электрическим линиям с распределенными параметрами на переменном токе. Теория однородных линейных электрических цепей с распределенными параметрами на постоянном токе непосредственно следует из теории цепей переменного тока, если принять угловую частоту равной нулю.

Теория однородных линейных магнитных линий на постоянном токе в значительной мере аналогична теории однородных линейных электрических линий с распределенными параметрами, только вместо тока в уравнении должен быть подставлен магнитный поток, вместо электрического напряжения — магнитное напряжение,



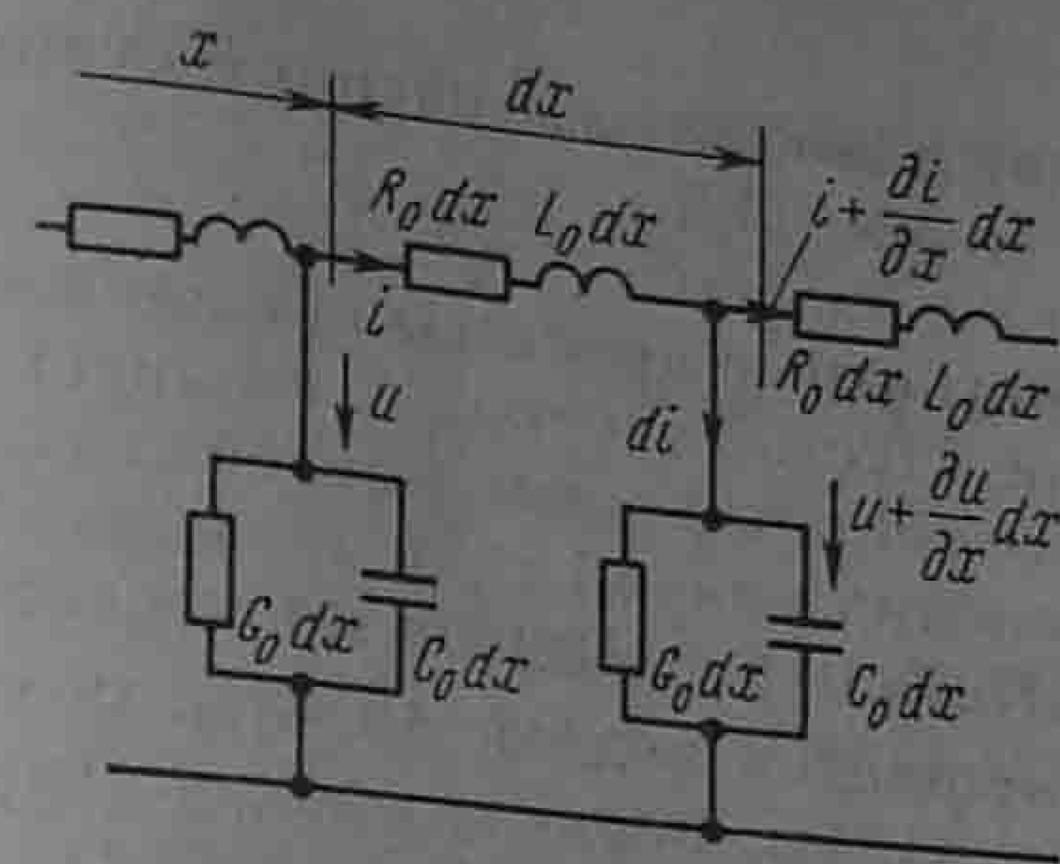



Рис. 11.2

вместо продольного активного сопротивления — продольное магнитное сопротивление, вместо поперечной электрической проводимости — поперечная магнитная проводимость.

**§ 11.2. Составление дифференциальных уравнений для однородной линии с распределенными параметрами.** Пусть $R_0$ — продольное активное сопротивление единицы длины линии; $L_0$ — индуктивность единицы длины линии; $C_0$ — емкость единицы длины линии; $G_0$ — поперечная проводимость единицы длины линии. Поперечная проводимость $G_0$ не является обратной величиной продольного сопротивления $R_0$.

Разобьем линию на участки длиной d$x$ (рис. 11.2), где $x$ — расстояние, отсчитываемое от начала линии. На длине d$x$ активное сопротивление равно $R_0$ d$x$, индуктивность — $L_0$d$x$, проводимость утечки — $G_0$d$x$ и емкость — $C_0$d$x$. Обозначим ток в начале рассматриваемого участка линии через $i$, а напряжение между проводами линии — через $u$. И ток и напряжение являются в общем случае функциями расстояния вдоль линии $x$ и времени $t$. Поэтому в дальнейшем в уравнениях использованы частные производные от $u$ и $i$ по времени $t$ и расстоянию $x$.

Если для некоторого момента времени $t$ ток в начале рассматриваемого участка равен $i$, то в результате утечки через поперечный элемент ток в конце участка для того же момента времени равен $i+\frac{\partial i}{\partial x}\mathrm{d}x$, где $\partial i/\partial x$ — скорость изменения тока в направлении $x$. Скорость, умноженная на расстояние d$x$, является приращением тока на пути d$x$.

Аналогично, если напряжение в начале участка $u$, то в конце участка для того же момента времени напряжение равно $u+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x$.

Составим уравнение по второму закону Кирхгофа для замкнутого контура, образованного участком линии длиной d$x$, обойдя его по часовой стрелке:

$$-u+R_0\mathrm{d}x\,i+L_0\mathrm{d}x\frac{\partial i}{\partial t}+u+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x=0.$$

После упрощения и деления уравнения на d$x$ получим

$$-\frac{\partial u}{\partial x}=L_0\frac{\partial i}{\partial t}+R_0 i. \qquad (11.1)$$

По первому закону Кирхгофа,

$$i=di+i+\frac{\partial i}{\partial x}\partial x. \qquad (11.2)$$

Ток d$i$ (рис. 11.2) равен сумме токов, проходящих через проводимость $G_0$d$x$ и емкость $C_0$d$x$:

$$di=\left(u+\frac{\partial u}{\partial x}dx\right)G_0 dx+\frac{\partial}{\partial t}C_0 dx\left(u+\frac{\partial u}{\partial x}dx\right).$$

Пренебрегаем слагаемыми второго порядка малости. Тогда

$$di=uG_0 dx+C_0 dx\frac{\partial u}{\partial t}. \qquad (11.3)$$

Подставим (11.3) в (11.2), упростим и поделим уравнение на d$x$:

$$-\frac{\partial i}{\partial x}=G_0 u+C_0\frac{\partial u}{\partial t}. \qquad (11.4)$$

Уравнения (11.1) и (11.4) являются основными дифференциальными уравнениями для линии с распределенными параметрами.

**§ 11.3. Решение уравнений линии с распределенными параметрами при установившемся синусоидальном процессе.** Пусть напряжение и ток в линии изменяются по синусоидальному закону во времени. Воспользуемся символическим методом.

Изображение тока

$$i=I_m\sin(\omega t+\varphi_i)\rightarrow \dot I e^{j\omega t},$$

где $\dot I=I_m e^{j\varphi_i}/\sqrt{2}$.

Изображение напряжения

$$u=U_m\sin(\omega t+\varphi_u)\rightarrow \dot U e^{j\omega t},$$

где $\dot U=U_m e^{j\varphi_u}/\sqrt{2}$.

Комплексы $\dot U$ и $\dot I$ являются функциями расстояния $x$, но не являются функциями времени. Множитель $e^{j\omega t}$ есть функция времени $t$, не зависящая от $x$.

Представление изображений тока и напряжения в виде произведения двух множителей, из которых один является функцией только $x$, а другой — функцией только $t$, дает возможность перейти от уравнений в частных производных [уравнений (11.1) и (11.4)] к уравнениям в простых производных. Действительно,

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial x}\rightarrow e^{j\omega t}\frac{\partial \dot U}{dx};\\&L_0\frac{\partial i}{dt}\rightarrow L_0\dot I\frac{d}{dt}e^{j\omega t}=j\omega L_0\dot I e^{j\omega t};\end{aligned}\right. \qquad (11.5)$$



$$\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial i}{\partial x}\rightarrow e^{j\omega t}\frac{\partial \dot I}{dx};\\&C_0\frac{\partial u}{\partial t}\rightarrow j\omega C_0\dot U e^{j\omega t}.\end{aligned}\right. \qquad (11.6)$$

Подставим (11.5) и (11.6) в (11.1) и (11.4), сократив в полученных уравнениях множитель $e^{j\omega t}$:

$$-d\dot U/dx=Z_0\dot I; \qquad (11.7)$$

$$-d\dot I/dx=Y_0\dot U, \qquad (11.8)$$

где

$$Z_0=R_0+j\omega L_0; \qquad (11.9)$$

$$Y_0=G_0+j\omega C_0. \qquad (11.10)$$

Решим систему уравнений (11.7) и (11.8) относительно $\dot U$. С этой целью продифференцируем (11.7) по $x$:

$$-\frac{d^2\dot U}{dx^2}=Z_0\frac{d\dot I}{dx}. \qquad (11.11)$$

В (11.11) вместо $d\dot I/dx$ подставим правую часть уравнения (11.8):

$$\frac{d^2\dot U}{dx^2}=Z_0Y_0\dot U. \qquad (11.12)$$

Уравнение (11.12) представляет собой линейное дифференциальное уравнение второго порядка. Его решение

$$\dot U=\dot A_1e^{\gamma x}+\dot A_2e^{-\gamma x}. \qquad (11.13)$$

Комплексные числа $\dot A_1$ и $\dot A_2$ есть постоянные интегрирования, которые в дальнейшем определим через напряжение и ток в начале или через напряжение и ток в конце линий.

Комплексное число

$$\gamma=\sqrt{Z_0Y_0} \qquad (11.14)$$

называют *постоянной распространения*; его можно представить в виде

$$\gamma=\alpha+j\beta, \qquad (11.15)$$

где $\alpha$ — *коэффициент затухания*, характеризующий затухание падающей волны на единицу длины линий, например на 1 м (км); $\beta$ — *коэффициент фазы*, характеризующий изменение фазы падающей волны на единицу длины линии, например на 1 м (км). Следовательно,

$$[\gamma]=[\alpha]=[\beta]=1/м.$$

Ток $\dot{I}$ найдем из уравнения (11.7):

$$\dot{I} = -\frac{1}{Z_0}\frac{d\dot{U}}{dx} = \frac{\dot{A}_2 e^{-\gamma x} - \dot{A}_1 e^{\gamma x}}{Z_0/\gamma}. \quad (11.16)$$

Отношение $Z_0/\gamma = Z_0/\sqrt{Z_0 Y_0} = \sqrt{Z_0/Y_0}$, имеющее размерность сопротивления, обозначают $Z_в$ и называют волновым сопротивлением:

$$Z_в = \sqrt{\frac{Z_0}{Y_0}} = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}} = z_в e^{j\varphi_в}, \quad (11.17)$$

где $z_в$ — модуль; $\varphi_в$ — аргумент волнового сопротивления $Z_в$.

Следовательно,

$$\dot{I} = \frac{\dot{A}_2}{Z_в} e^{-\gamma x} - \frac{\dot{A}_1}{Z_в} e^{\gamma x}. \quad (11.16\text{ a})$$

**§ 11.4. Постоянная распространения и волновое сопротивление.** Как указывалось ранее, постоянная распространения

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)}. \quad (11.18)$$

Для линии постоянного тока $\omega = 0$ и потому

$$\gamma = \sqrt{R_0 G_0} \quad (11.19)$$

Для линии синусоидального тока без потерь ($R_0 = G_0 = 0$)

$$\gamma = j\omega\sqrt{R_0 C_0}. \quad (11.20)$$

Запишем формулы для приближенного определения $\beta$ и $\alpha$ в линии с малыми потерями, когда $R_0/\omega L_0 \ll 1$ и $G_0/\omega C_0 \ll 1$. С этой целью перепишем формулу (11.18) следующим образом:

$$\gamma = j\omega\sqrt{L_0 C_0}\left(1 - j\frac{R_0}{\omega L_0}\right)^{1/2}\left(1 - j\frac{G_0}{\omega C_0}\right)^{1/2}$$

и разложим биномы в ряды, ограничившись двумя членами каждого ряда [т. е. воспользуемся соотношением $\sqrt{1 + x} \approx 1 + 0{,}5x$]. В результате получим

$$\gamma \approx \frac{R_0}{2}\sqrt{\frac{C_0}{L_0}} + \frac{G_0}{2}\sqrt{\frac{L_0}{C_0}} + j\omega\sqrt{L_0 C_0}. \quad (11.21)$$

Следовательно,

$$\alpha = \frac{R_0}{2}\sqrt{\frac{C_0}{L_0}} + \frac{G_0}{2}\sqrt{\frac{L_0}{C_0}}, \quad (11.22)$$

$$\beta = \omega\sqrt{L_0 C_0}. \quad (11.22\text{a})$$

Рассмотрим вопрос о волновом сопротивлении. Для постоянного тока ($\omega = 0$) из (11.17) следует, что

$$Z_в = \sqrt{R_0/G_0}. \quad (11.23)$$

Для линии синусоидального тока без потерь ($R_0 = G_0 = 0$)

$$Z_в = \sqrt{L_0/C_0}. \quad (11.23\text{a})$$

Для линии синусоидального тока с малыми потерями, когда $\frac{R_0}{\omega L_0} \ll 1$, $\frac{G_0}{\omega C_0} \ll 1$



$$Z_в \approx \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}\left[1 + j\left(-\frac{R_0}{2\omega L_0} + \frac{G_0}{2\omega C_0}\right)\right]. \quad (11.24)$$

Для реальных воздушных линий $|Z_в| \approx 300 \div 600$ Ом, для кабельных $|Z_в| \approx 50 \div 200$ Ом. Угол $\varphi$ имеет емкостный характер.

**§ 11.5. Формулы для определения комплексов напряжения и тока в любой точке линии через комплексы напряжения и тока в начале линии.** Как и раньше, через $x$ будем обозначать расстояние от начала линии до текущей точки на ней. Пусть в начале линии при $x = 0$ напряжение $\dot{U}_1$ и ток $\dot{I}_1$. Составим уравнения для определения постоянных $\dot{A}_1$ и $\dot{A}_2$ через $\dot{U}_1$ и $\dot{I}_1$. Из (11.13) и (11.16а) следует ($x = 0$).

$$\dot{U}_1 = \dot{A}_2 + \dot{A}_1; \quad (11.25)$$

$$\dot{I}_1 Z_в = \dot{A}_2 - \dot{A}_1. \quad (11.26)$$

Для определения $\dot{A}_1$ из (11.25) вычтем (11.26):

$$\dot{A}_1 = 0{,}5(\dot{U}_1 - \dot{I}_1 Z_в) = A_1 e^{j\psi_0}; \quad (11.27)$$

$$\dot{A}_2 = 0{,}5(\dot{U}_1 + \dot{I}_1 Z_в) = A_2 e^{j\psi_п}, \quad (11.28)$$

где $A_1$ — модуль; $\psi_о$ — аргумент комплекса $\dot{A}_1$; $A_2$ — модуль; $\psi_п$ — аргумент[1] комплекса $\dot{A}_2$.

Подставим (11.27) и (11.28) в (11.13):

$$\dot{U} = \frac{\dot{U}_1 - \dot{I}_1 Z_в}{2} e^{\gamma x} + \frac{\dot{U}_1 + \dot{I}_1 Z_в}{2} e^{-\gamma x} =$$

$$= \dot{U}_1 \frac{e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}}{2} - \dot{I}_1 Z_в \frac{e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}}{2}.$$

Введем гиперболические функции. Известно, что

$$\text{ch}x = 0{,}5(e^x + e^{-x}), \ \text{sh}x = 0{,}5(e^x - e^{-x}).$$

Поэтому

$$0{,}5(e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}) = \text{ch}\gamma x; \quad (11.29)$$

$$0{,}5(e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}) = \text{sh}\gamma x. \quad (11.30)$$

Следовательно,

$$\dot{U} = \dot{U}_1 \text{ch}\gamma x - \dot{I}_1 Z_в \text{sh}\gamma x. \quad (11.31)$$

Аналогичные преобразования, примененные к (11.16), дают

$$\dot{I} = \dot{I}_1 \text{ch}\gamma x - \frac{\dot{U}_1}{Z_в} \text{sh}\gamma x. \quad (11.32)$$

[1] Индексы «о» и «п» — начальные буквы слов «отраженная» и «падающая» волны (см. § 11.8).

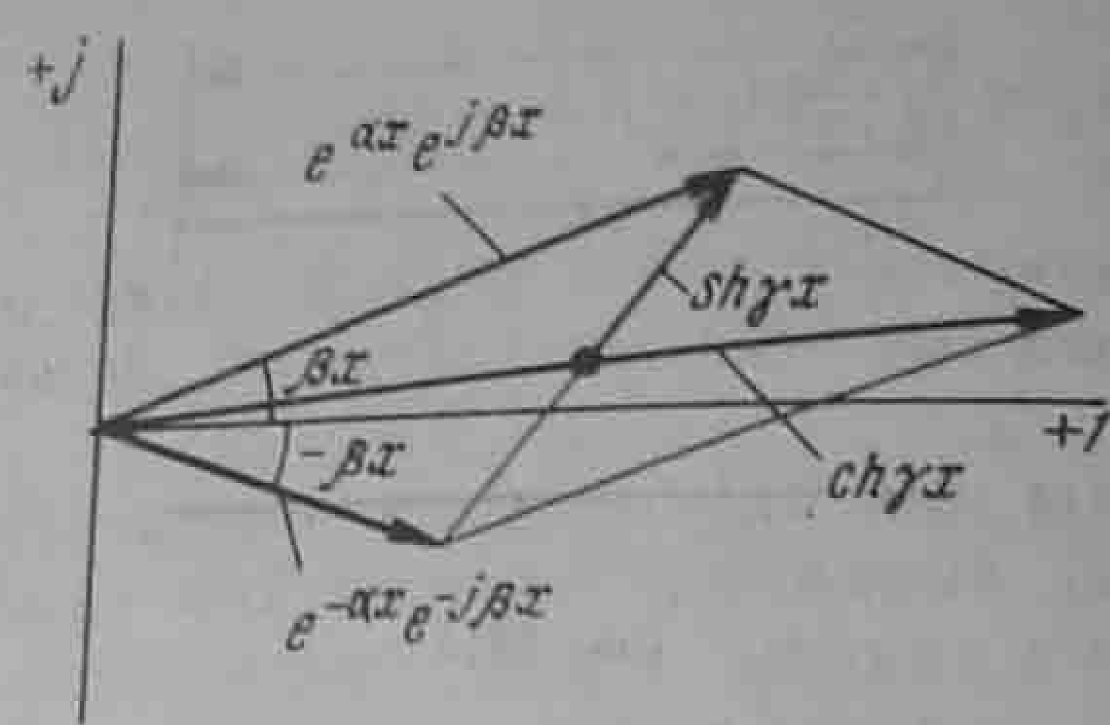



Рис. 11.3

Формулы (11.31) и (11.32) позволяют найти комплексы напряжения и тока в точке линии, расположенной на расстоянии $x$ от ее начала. Следует иметь в виду, что аргументом гиперболических функций в этих формулах является комплексное число $\gamma x = \alpha x + j\beta x$.

**§ 11.6. Графическая интерпретация гиперболических синуса и косинуса от комплексного аргумента.** Гиперболические функции от комплексного аргумента сами являются комплексами и могут быть изображены векторами на комплексной плоскости.

Заменим $\gamma x$ в уравнениях (11.29) и (11.30) на $\alpha x + j\beta x$:

$$\mathrm{ch}\gamma x = \frac{1}{2}(e^{\alpha x}e^{j\beta x} + e^{-\alpha x}e^{-j\beta x});$$

$$\mathrm{sh}\gamma x = \frac{1}{2}(e^{\alpha x}e^{j\beta x} - e^{-\alpha x}e^{-j\beta x}).$$

По таблицам показательных функций найдем значение $e^{\alpha x}$ и $e^{-\alpha x}$ и на комплексной плоскости рис. 11.3 отложим векторы $e^{\alpha x}e^{j\beta x}$ и $e^{-\alpha x}e^{-j\beta x}$. Первый из них по модулю равен $e^{\alpha x}$ и относительно оси действительных значений повернут на угол $\beta x$ против часовой стрелки; второй по модулю $e^{-\alpha x}$ и относительно оси действительных значений повернут на угол $\beta x$ по часовой стрелке.

Гиперболический косинус равен полусумме этих векторов, а гиперболический синус — их полуразности.

**§ 11.7. Формулы для определения напряжения и тока в любой точке линии через комплексы напряжения и тока в конце линии.** Обозначим расстояние от текущей точки на линии до конца линии $y$, а длину всей линии (рис. 11.4) $l$:

$$y = l - x. \tag{11.33}$$

Пусть известны напряжение и ток в конце линии $\dot U_2$ и $\dot I_2$. Подставим в (11.13) и (11.16а) $x = l$, $\dot U = \dot U_2$, $\dot I = \dot I_2$ и составим два уравне-



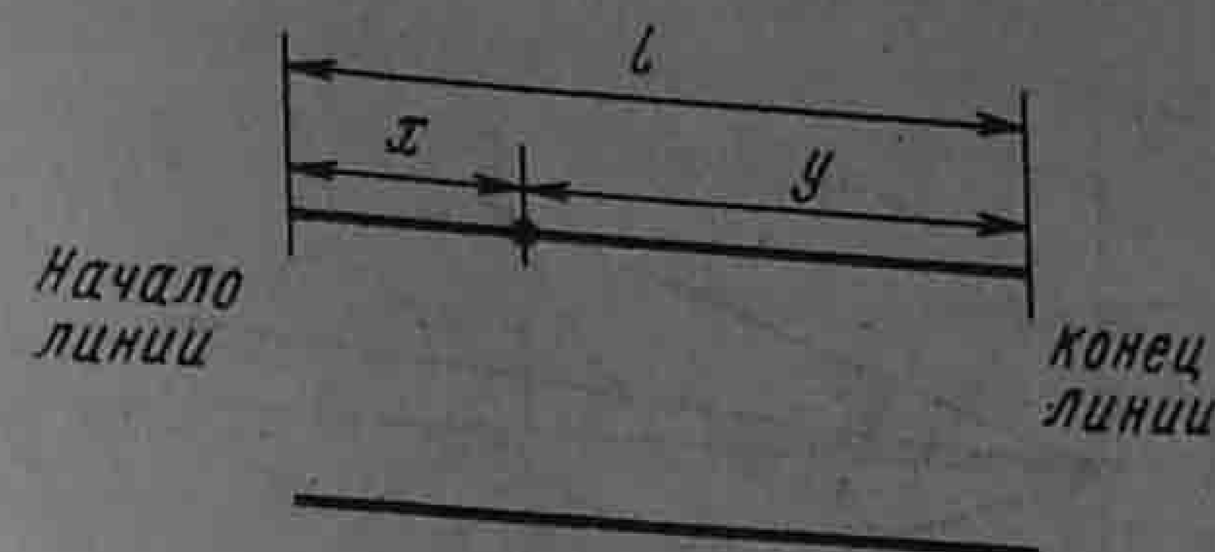



Рис. 11.4

ния для определения постоянных интегрирования $\dot A_1$ и $\dot A_2$:

$$\dot U_2 = \dot A_2 e^{-\gamma l} + \dot A_1 e^{\gamma l};$$

$$\dot I_2 Z_в = \dot A_2 e^{-\gamma l} - \dot A_1 e^{\gamma l}.$$

Отсюда

$$\left.\begin{aligned} \dot A_1 &= 0{,}5(\dot U_2 - \dot I_2 Z_в)e^{-\gamma l} = A_1 e^{j\psi_0}; \\ \dot A_2 &= 0{,}5(\dot U_2 + \dot I_2 Z_в)e^{\gamma l} = A_2 e^{j\psi_п}. \end{aligned}\right\} \tag{11.34}$$

Если подставить (11.34) в (11.13) и (11.16а), заменить $l - x$ на $y$ и перейти к гиперболическим функциям, то получим

$$\dot U = \dot U_2 \mathrm{ch}\gamma y + \dot I_2 Z_в \mathrm{sh}\gamma y; \tag{11.35}$$

$$\dot I = \frac{\dot U_2}{Z_в}\mathrm{sh}\gamma y + \dot I_2 \mathrm{ch}\gamma y. \tag{11.36}$$

Зная $\dot U_2$ и $\dot I_2$ с помощью формул (11.35) и (11.36), можно найти комплексы напряжения и тока в точке, находящейся на расстоянии $y$ от конца линии.

**§ 11.8. Падающие и отраженные волны в линии.** Подставим в формулу (11.13) $A_1 e^{j\psi_0}$ вместо $\dot A_1$, $A_2 e^{j\psi_п}$ вместо $\dot A_2$ [см. (11.34)], заменив $\gamma$ на $\alpha + j\beta$, получим

$$\dot U = A_1 e^{\alpha x} e^{j(\psi_0 + \beta x)} + \dot A_2 e^{-\alpha x} e^{j(\psi_п - \beta x)}. \tag{11.37}$$

Аналогичную операцию проделаем с формулой (11.16а), причем в дополнение заменим $Z_в$ на $z_в e^{j\psi_в}$ [см. формулу (11.17)]:

$$\dot I = -\frac{A_1}{z_в} e^{\alpha x} e^{j(\psi_0 + \beta x - \psi_в)} + \frac{A_2}{z_в} e^{-\alpha x} e^{j(\psi_п - \beta x - \psi_в)}. \tag{11.38}$$

Для перехода от комплексов напряжения и тока к функциям времени умножим правые части формул (11.37) и (11.38) на $\sqrt{2}\, e^{j\omega t}$ и от произведений возьмем мнимую часть:

$$u = A_1\sqrt{2}\, e^{\alpha x}\sin(\omega t + \psi_0 + \beta x) + A_2\sqrt{2}\, e^{-\alpha x}\sin(\omega t + \psi_п - \beta x); \tag{11.37а}$$

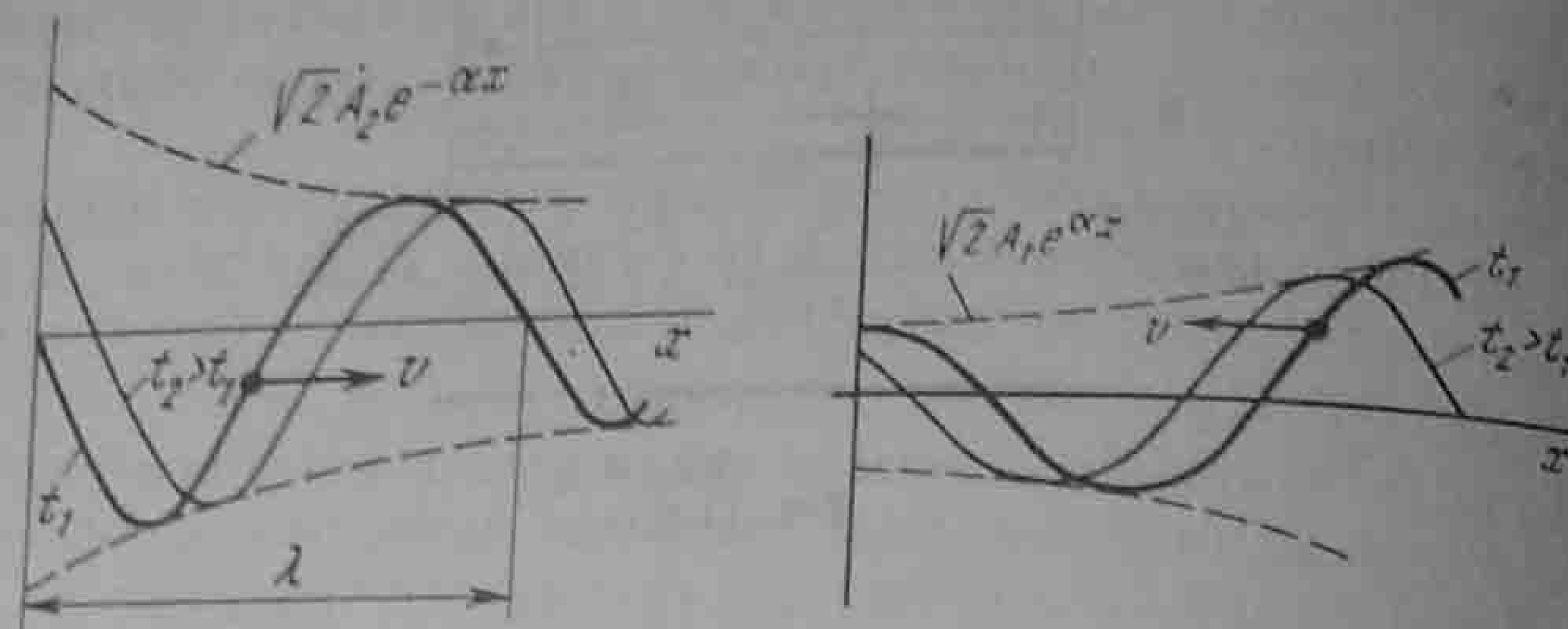



Рис. 11.5 Рис. 11.6

$$i = \frac{A_1}{z_в}\sqrt{2}\, e^{\alpha x} \sin(\omega t + \varphi_0 + \beta x - \psi_в) +$$

$$+ \frac{A_2\sqrt{2}}{z_в} e^{-\alpha x} \sin(\omega t + \psi_н - \beta x - \psi_в). \quad (11.38а)$$

*Падающей электромагнитной волной* называют процесс перемещения электромагнитного состояния (электромагнитной волны) от источника энергии к приемнику, т. е. в нашем случае в направлении увеличения координаты $x$. Электромагнитное состояние определяется совокупностью электрического и магнитного полей, обусловливающих друг друга. Падающая волна, распространяясь от источника энергии к приемнику, несет энергию, заключенную в ее электрическом и магнитном полях.

*Отраженной электромагнитной волной* называют процесс перемещения электромагнитного состояния (электромагнитной волны) от приемника к источнику энергии, т. е. в нашем случае в сторону уменьшения координаты $x$.

Падающая электромагнитная волна образована падающей волной напряжения [второе слагаемое формулы (11.37а)] и падающей волной тока [второе слагаемое формулы (11.38а)]. Отраженная электромагнитная волна образована отраженной волной напряжения [первое слагаемое формулы (11.37а)] и отраженной волной тока [первое слагаемое формулы (11.38а)].

Знак минус у отраженной волны тока свидетельствует о том, что поток энергии, который несет с собой отраженная электромагнитная волна, движется в обратном направлении по сравнению с потоком энергии, который несет с собой падающая волна.

Каждая компонента падающей волны (волны напряжения или волны тока) представляет собой синусоидальное колебание, амплитуда которого уменьшается по мере роста $x$ (множитель $e^{-\alpha x}$), а аргумент является функцией времени и координаты $x$.

Каждая компонента отраженной электромагнитной волны затухает по мере продвижения волны от конца линии к началу (мно-



житель $e^{\alpha x}$). Физически эффект уменьшения амплитуд падающей и отраженной волн по мере их продвижения по линии объясняется наличием потерь в линии.

На рис. 11.5 изображены графики распределения падающей волны напряжения вдоль линии (в функции $x$) для двух смежных моментов времени: $t_1$ и $t_2 > t_1$. Падающая волна распространяется слева направо. При построении принято $\omega t_1 + \psi_н = 0$.

На рис. 11.6 представлены графики распределения отраженной волны напряжения для двух смежных моментов времени: $t_1$ и $t_2 > t_1$. Отраженная волна распространяется справа налево.

**§ 11.9. Коэффициент отражения**. Отношение напряжения отраженной волны в конце линии к напряжению падающей волны в конце линии называют *коэффициентом отражения по напряжению* и обозначают $K_u$. В соответствии с формулой (11.34)

$$K_u = \frac{\dot{A}_1 e^{\gamma l}}{\dot{A}_2 e^{-\gamma l}} = \frac{Z_н - Z_в}{Z_н + Z_в}.$$

При согласованной нагрузке $K_u = 0$, при холостом ходе $K_u = 1$. *Коэффициент отражения по току* $K_i = -K_u$.

**§ 11.10. Фазовая скорость**. *Фазовой скоростью* $v_ф$ называют скорость, с которой нужно перемещаться вдоль линии, чтобы наблюдать одну и ту же фазу колебания, или иначе: фазовая скорость — это скорость перемещения по линии неизменного фазового состояния. Если фаза падающей волны напряжения неизменна, то в соответствии с формулой (11.37а)

$$\omega t + \psi_н - \beta x = \text{const}.$$

Возьмем производную по времени от обеих частей последнего равенства:

$$\frac{d}{dt}(\omega t + \psi_н - \beta x) = 0, \text{ или } \omega - \beta\frac{dx}{dt} = 0.$$

Отсюда

$$v_ф = dx/dt = \omega/\beta.$$

**Пример 116.** Найти фазовую скорость для воздушной двухпроводной линии с малыми потерями.

Решение. Из формулы (11.22а) следует, что $\beta = \omega\sqrt{L_0 C_0}$. Поэтому

$$v_ф = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}. \quad (11.39)$$

Индуктивность единицы длины двухпроводной воздушной линии

$$L_0 = \frac{\mu_0}{\pi} \ln\frac{d}{r},$$

где $\mu_0$ — магнитная постоянная; $d$ — расстояние между осями проводов; $r$ — радиус каждого провода.

Емкость единицы длины воздушной двухпроводной линии см. формулу (19.43)

$C_0 = \frac{\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{d}{r}}$, где $\varepsilon_0$ — электрическая постоянная.

Фазовая скорость $v_ф = \frac{1}{\sqrt{L_0C_0}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$.

$$v_ф = \frac{1}{\sqrt{1{,}256\cdot10^{-6}\,Гн/м\cdot8{,}86\cdot10^{-12}\,Ф/м}} = \approx 300\,000\ км/с.$$

**§ 11.11. Длина волны.** Под *длиной волны* $\lambda$ понимают расстояние, на которое распространяется волна за один период $T = 1/f$:

$$\lambda = vT = v/f. \qquad (11.40)$$

**Пример 117.** Найти длину электромагнитной волны при $f = 50$ и $50\cdot10^6$ Гц.

Решение. При $f = 50$ Гц

$$\lambda = \frac{300\,000\,км/с}{50с^{-1}} = 6000\ км.$$

При $f = 50\cdot10^6$ Гц $\lambda = 6$ м.

**§ 11.12. Линия без искажений.** *Линия без искажений* представляет собой линию, вдоль которой волны всех частот распространяются с одинаковой фазовой скоростью и затухают в равной степени.

При движении электромагнитной волны по линии без искажений волны напряжения и тока уменьшаются по амплитуде, но формы волн напряжения в конце и начале линии подобны; точно так же подобны формы волн тока в начале и конце линии.

Неискажающие линии находят применение в телефонии. При телефонном разговоре по таким линиям не искажается тембр голоса, т. е. не искажается спектральный состав голоса.

Для того чтобы линия была неискажающей, коэффициент затухания $\alpha$ и фазовая скорость $v_ф$ не должны зависеть от частоты; $\alpha$ и $v_ф$ не зависят от частоты, если между параметрами линии имеет место следующее соотношение:

$$R_0/L_0 = G_0/C_0. \qquad (11.41)$$

Для сокращения записи обозначим $R_0/L_0 = G_0/C_0 = k$. По определению,

$$Z_0 = R_0 + j\omega L_0 = L_0(k + j\omega);$$

$$Y_0 = G_0 + j\omega C_0 = C_0(k + j\omega);$$

$$\gamma = (k + j\omega)\sqrt{L_0C_0}.$$

Следовательно,

$$\alpha = k\sqrt{L_0C_0} = \sqrt{R_0G_0}; \qquad (11.42)$$



$$\beta = \omega\sqrt{L_0C_0};$$

$$v_ф = \omega/\beta = 1/\sqrt{L_0C_0}. \qquad (11.43)$$

Из формул (11.42) и (11.43) следует, что коэффициент затухания $\alpha$ и фазовая скорость $v_ф$ в линии без искажений действительно не зависят от частоты.

В линии без искажений волновое сопротивление

$$Z_в = \sqrt{Z_0/Y_0} = \sqrt{L_0/C_0}$$

является действительным числом и также не зависит от частоты.

Чтобы убедиться, что форма волны напряжения в конце линии $u_2$ полностью подобна форме волны напряжения в начале линии $u_1$, возьмем напряжение на входе линии в виде суммы двух синусоидальных колебаний, одно из которых имеет частоту $\omega$, а другое $2\omega$, и составим выражение для $u_2$. Пусть

$$u_1 = U_{1m}\sin(\omega t + \psi_1) + U_{2m}\sin(2\omega t + \psi_2).$$

Так как для линии без искажения коэффициент затухания $\alpha$ не зависит от частоты [см. формулу (11.42)], то амплитуды обоих колебаний на расстоянии $l$ уменьшаются в одинаковой степени и становятся равными $U_{1m}e^{-\alpha l}$ и $U_{2m}e^{-\alpha l}$.

Для линии без искажения коэффициент фазы $\beta$ прямо пропорционален частоте, поэтому для частоты $2\omega$ коэффициент $\beta$ в два раза больше, чем для частоты $\omega$.

Следовательно, мгновенное значение напряжения в конце линии

$$u_2 = U_{1m}e^{-\alpha l}\sin(\omega t + \psi_1 - \beta l) + U_{2m}e^{-\alpha l}\sin(2\omega t + \psi_2 - 2\beta l) =$$

$$= U_{1m}e^{-\alpha l}\sin\left[\omega\left(t - \frac{\beta l}{\omega}\right) + \psi_1\right] + U_{2m}e^{-\alpha l}\sin\left[2\omega\left(t - \frac{2\beta l}{2\omega}\right) + \psi_2\right].$$

Вынесем $e^{-\alpha l}$ за скобку и обозначим время $t - \frac{\beta l}{\omega}$ через $\tau$.

Получим

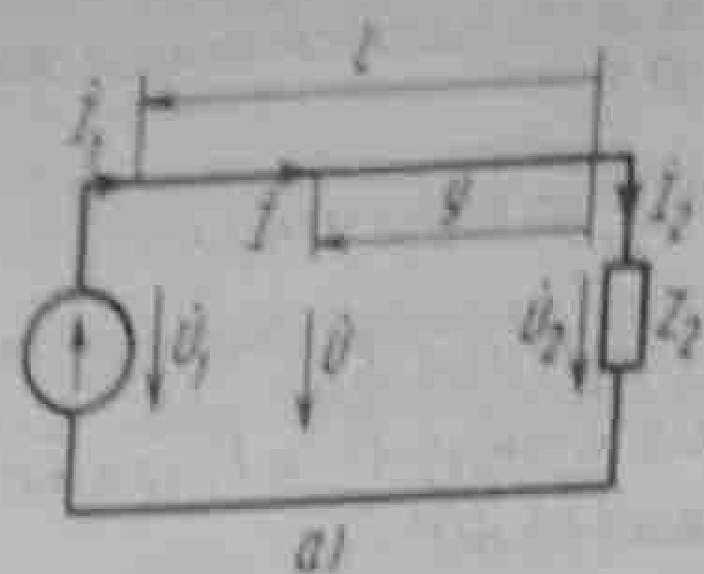
$$u_2 = e^{-\alpha l}[U_{1m}\sin(\omega\tau + \psi_1) + U_{2m}\sin(2\omega\tau + \psi_2)].$$

Если сопоставить последнее выражение с $u_1$, то можно сделать вывод, что напряжение в конце линии имеет ту же форму, что и напряжение в начале линии. Однако оно уменьшено по амплитуде за счет затухания и смещено во времени на $\beta l/\omega = \frac{l}{v_ф}$ — на время движения волны по линии длиной $l$.

В реальных линиях передачи сигналов соотношение (11.41) обычно не соблюдается, так как $L_0 < R_0C_0/G_0$. Для того чтобы было достигнуто это соотношение, принимают меры по увеличению $L_0$. Практически устранение частотных искажений сигнала во всем передаточном тракте часто достигают не за счет использования линий без искажения, а путем включения в тракт специальных корректирующих четырехполюсников.

**§ 11.13. Согласованная нагрузка.** Линия с распределенными параметрами, как правило, служит в качестве промежуточного звена между источником энергии (сигнала) и нагрузкой.

Обозначим сопротивление нагрузки $Z_2$ ($Z_2 = \dot U_2/\dot I_2$) (рис. 11.7, а).



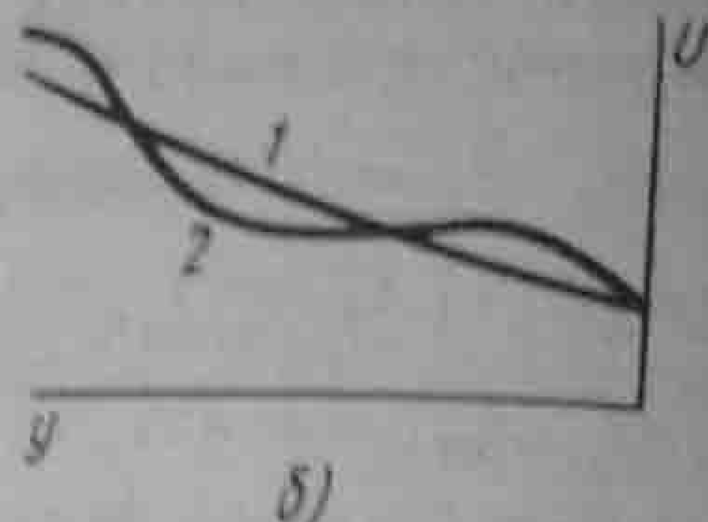




Рис. 11.7

Если $Z_2 \neq Z_в$, то падающая волна частично пройдет в нагрузку, частично отразится от нее (возникает отраженная волна). При $Z_2 = Z_в$ — такую нагрузку называют согласованной — отраженная волна отсутствует. В этом можно убедиться с помощью формулы (11.34). Действительно, отраженная волна отсутствует, так как $A_1 = 0$.

В линиях передачи информации кроме согласования $Z_2$ с $Z_в$ согласовывают также $Z_в$ с внутренним сопротивлением источника сигнала $Z_г$. При $Z_г$, немного не равном $Z_в$, кроме истинного сигнала через некоторое время после него может появиться ложный сигнал типа эха; наличие последнего затруднит обработку получаемой информации.

**§ 11.14. Определение напряжения и тока при согласованной нагрузке.** Чтобы получить формулы для определения напряжения и тока в любой точке, удаленной от конца линии на расстояние $y$, в формулы (11.35) и (11.36) вместо $Z_в$ подставим $Z_2$, заменим $\dot{I}_2 Z_2$ на $\dot{U}_2$ и $\dot{U}_2/Z_2$ на $\dot{I}_2$. Получим:

$$\dot{U} = \dot{U}_2(\mathrm{ch}\gamma y + \mathrm{sh}\gamma y) = \dot{U}_2 e^{\gamma y}; \qquad (11.44)$$

$$\dot{I} = \dot{I}_2(\mathrm{ch}\gamma y + \mathrm{sh}\gamma y) = \dot{I}_2 e^{\gamma y}. \qquad (11.45)$$

В начале линии при $y = l$

$$\left.\begin{aligned} \dot{U}_1 &= \dot{U}_2 e^{\gamma l} = U_2 e^{j\varphi_{U_2}} e^{\alpha l} e^{j\beta l}; \\ \dot{I}_1 &= \dot{I}_2 e^{\gamma l} = I_2 e^{j\varphi_{I_2}} e^{\alpha l} e^{j\beta l}, \end{aligned}\right\} \qquad (11.46)$$

где $U_2$ — модуль, а $\varphi_{U_2}$ — аргумент комплекса $\dot{U}_2$; $I_2$ — модуль, а $\varphi_{I_2}$ — аргумент комплекса $\dot{I}_2$.

График зависимости действующего значения напряжения $U$ от расстояния $y$ для линии с потерями при согласованной нагрузке иллюстрирует рис. 11.7, б, кривая 1, при несогласованной — например кривая 2 рис. 11.7, б.

**§ 11.15. Коэффициент полезного действия линии передачи при согласованной нагрузке.** Коэффициент полезного действия линии



передачи равен отношению активной мощности в конце линии $P_2$ к активной мощности в начале линии $P_1$:

$$P_2 = U_2 I_2 \cos(\varphi_{U_2} - \varphi_{I_2}) = U_2 I_2 \cos\varphi_в,$$

где $\varphi_в$ — аргумент волнового сопротивления $Z_в$.

При согласованной нагрузке угол между $\dot{U}_1$ и $\dot{I}_1$ также равен $\varphi_в$, поэтому в соответствии с формулами (11.46)

$$P_1 = U_1 I_1 \cos\varphi_в = U_2 I_2 e^{2\alpha l} \cos\varphi_в.$$

Следовательно,

$$\eta = P_2/P_1 = e^{-2\alpha l}. \qquad (11.47)$$

**§ 11.16. Входное сопротивление нагруженной линии.** На рис. 11.7 изображена схема, состоящая из источника напряжения $\dot{U}_1$, линии с распределенными параметрами длиной $l$ и нагрузки $Z_2$. Входное сопротивление $Z_{вх} = \dot{U}_1/\dot{I}_1$. В формулах (11.35) и (11.36) вместо $y$ подставим $l$ и заменим $\dot{U}_2$ на $\dot{I}_2 Z_2$. Получим

$$Z_{вх} = \frac{\dot{I}_2 Z_2 \mathrm{ch}\gamma l + \dot{I}_2 Z_в \mathrm{sh}\gamma l}{\dot{I}_2 \dfrac{Z_2}{Z_в}\mathrm{sh}\gamma l + \dot{I}_2 \mathrm{ch}\gamma l},$$

или

$$Z_{вх} = \frac{Z_2 \mathrm{ch}\gamma l + Z_в \mathrm{sh}\gamma l}{\dfrac{Z_2}{Z_в}\mathrm{sh}\gamma l + \mathrm{ch}\gamma l}. \qquad (11.48)$$

Если нагрузка согласована (т. е. $Z_2 = Z_в$), то из (11.48) следует, что входное сопротивление равно волновому: $Z_{вх} = Z_в$.

**§ 11.17. Определение напряжения и тока в линии без потерь.** Строго говоря, линий без потерь не существует. Однако можно создать линию с очень малыми потерями (с очень малыми $R_0$ и $G_0$ по сравнению с $\omega L_0$ и $\omega C_0$ соответственно) и распространить на нее теорию линий без потерь.

Из предыдущего [см. формулу (11.20)] известно, что если $R_0 = G_0 = 0$, то

$$\gamma = \alpha + j\beta = j\omega\sqrt{L_0 C_0},$$

т. е. коэффициент затухания $\alpha = 0$, а коэффициент фазы $\beta = \omega\sqrt{L_0 C_0}$.

При этом волновое сопротивление $Z_в = \sqrt{L_0/C_0}$ является чисто активным [см. формулу (11.23а)].

Для определения напряжения $\dot{U}$ и тока $\dot{I}$ в любой точке линии обратимся к формулам (11.35) и (11.36):

$$\dot U = \dot U_2 \mathrm{ch}\gamma y + \dot I_2 Z_в \mathrm{sh}\gamma y;$$

$$\dot I = \frac{\dot U_2}{Z_в}\mathrm{sh}\gamma y + \dot I_2 \mathrm{ch}\gamma y.$$

Учтем, что $\gamma y = (\alpha + j\beta)y = (0 + j\beta)y = j\beta y$.

Гиперболический косинус от мнимого аргумента $jx$ равен круговому косинусу от аргумента $x$:

$$\mathrm{ch}jx = 0{,}5(e^{jx} + e^{-jx}) = 0{,}5(\cos x + j\sin x + \cos x - j\sin x) = \cos x.$$

Гиперболический синус от аргумента $jx$ равен круговому синусу от аргумента $x$, умноженному на $j$:

$$\mathrm{sh}jx = 0{,}5(e^{jx} - e^{-jx}) = 0{,}5(\cos x + j\sin x - \cos x + j\sin x) = j\sin x.$$

Следовательно, $\mathrm{sh}\gamma x = \mathrm{sh}j\beta y = j\sin\beta y$.

Поэтому для линии без потерь формулы (11.35) и (11.36) перепишем следующим образом:

$$\dot U = \dot U_2\cos\beta y + j\dot I_2 Z_в \sin\beta y; \quad (11.35а)$$

$$\dot I = j\frac{\dot U_2}{Z_в}\sin\beta y + \dot I_2\cos\beta y. \quad (11.36а)$$

**§ 11.18. Входное сопротивление линии без потерь при холостом ходе.** При холостом ходе $\dot I_2 = 0$. Поэтому

$$Z_{вх\,х} = \frac{\dot U}{\dot I} = \frac{\dot U_2\cos\beta y}{j\frac{\dot U_2}{Z_в}\sin\beta y} = \frac{-jZ_в}{\mathrm{tg}\beta y} = \frac{-j\sqrt{L_0/C_0}}{\mathrm{tg}\beta y} = jx. \quad (11.49)$$

Исследуем характер изменения $Z_{вх\,х}$ при изменении расстояния $y$ от конца линии до текущей точки на ней и проиллюстрируем это рис. 11.8, *а*.

В интервале значений $\beta y$ от 0 до $\pi/2$ tg $\beta y$ изменяется от 0 до $\infty$, поэтому $Z_{вх\,х}$ имеет емкостный характер (множитель $-j$) и по модулю изменяется от $\infty$ до 0. Расположение кривой выше оси абсцисс соответствует индуктивному характеру реактивного сопротивления линии $x$, ниже оси — емкостному. В интервале значений $\beta y$ от $\pi/2$ до $\pi$ tg$\beta y$ отрицателен и изменяется от $-\infty$ до 0, поэтому $Z_{вх\,х}$ изменяется по модулю от 0 до $\infty$ и имеет индуктивный характер (множитель $+j$) и т. д.

Конденсаторы или индуктивные катушки, изображенные на рис. 11.8, *а* иллюстрирует характер входного сопротивления $x$.

Таким образом, изменяя длину отрезка линии без потерь, можно имитировать емкостное и индуктивное сопротивления любой вели-



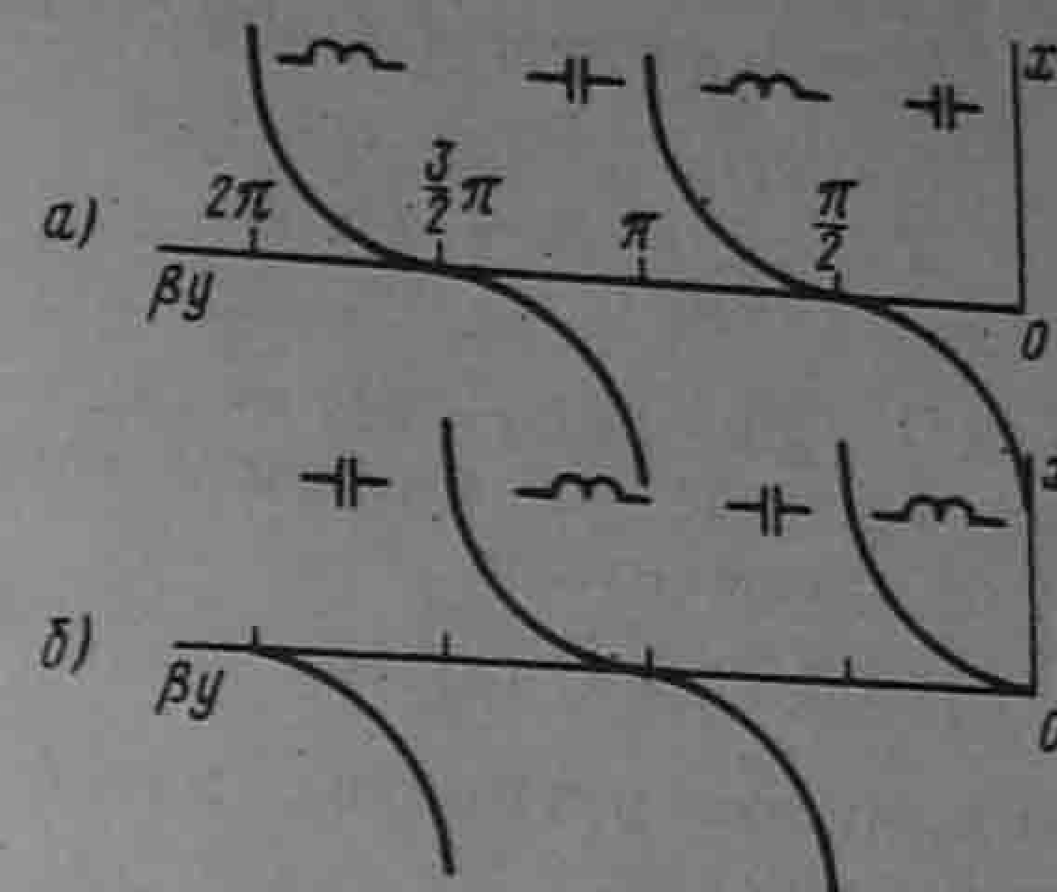



Рис. 11.8

чины. Практически это свойство используют при высокой частоте в различных радиотехнических установках.

**§ 11.19. Входное сопротивление линии без потерь при коротком замыкании на конце линии.** При коротком замыкании на конце линии $U_2 = 0$ и из формул (11.35а) и (11.36а) следует, что входное сопротивление

$$Z_{вх\,к} = jZ_в \mathrm{tg}\beta y = j\sqrt{L_0/C_0}\,\mathrm{tg}\beta y, \quad (11.50)$$

где $\beta = \omega\sqrt{L_0/C_0}$.

Будем изменять длину отрезка линии $y$ и исследуем характер входного сопротивления.

В интервале значений $\beta y$ от 0 до $\pi/2$ tg$\beta y$ положителен и изменяется от 0 до $\infty$, следовательно, в этом интервале входное сопротивление имеет индуктивный характер и по модулю изменяется от 0 до $\infty$ (рис. 11.8, *б*).

В интервале $\beta y$ от $\pi/2$ до $\pi$ входное сопротивление имеет емкостный характер и изменяется по модулю от $\infty$ до 0 (в точке $\beta y = \pi/2$ tg$\beta y$ скачком изменяется от $+\infty$ до $-\infty$).

Таким образом, изменяя длину отрезка короткозамкнутой на конце линии, также можно создавать различные по величине индуктивные и емкостные сопротивления. Отрезок короткозамкнутой на конце линии без потерь длиной в четверть длины волны теоретически имеет входное сопротивление, равное бесконечности. Это позволяет применять его при подвеске проводов в качестве изолятора.

**§ 11.20. Входное сопротивление линии без потерь при реактивной нагрузке.** Определим входное сопротивление линии без потерь при чисто реактивной нагрузке $Z_н = jX_н$:

$$Z_{вх} = \frac{Z_н\cos\beta y + jZ_в\sin\beta y}{\cos\beta y + j\frac{Z_н}{Z_в}\sin\beta y} = \frac{jZ_в\cos\beta y\left[\mathrm{tg}\beta y + \frac{Z_н}{jZ_в}\right]}{\cos\beta y\left[1 + j\frac{Z_н}{Z_в}\mathrm{tg}\beta y\right]}.$$

Обозначим $-jZ_н/Z_в = \mathrm{tg}\nu$ и учтем, что

$$\mathrm{tg}(\beta y + \nu) = \frac{\mathrm{tg}\,\beta y + \mathrm{tg}\nu}{1 - \mathrm{tg}\,\beta y \mathrm{tg}\nu}.$$

Получим

$$Z_{вх} = jZ_в \frac{\mathrm{tg}\,\beta y + \mathrm{tg}\nu}{1 - \mathrm{tg}\nu\,\mathrm{tg}\,\beta y} = jZ_в \mathrm{tg}\,(\beta y + \nu), \quad (11.51)$$

т. е. входное сопротивление изменяется по тангенсоиде, начало которой смещено на угол $\nu$.

При индуктивной нагрузке

$$X_н = \omega L;\ \mathrm{tg}\nu = -j\frac{j\omega L}{Z_в} = \frac{\omega L}{Z_в};\ \nu > 0;$$

при емкостной

$$X_н = \frac{1}{\omega C};\ \mathrm{tg}\nu = -j\frac{j(-1/\omega C)}{Z_в} = \frac{-1}{\omega C Z_в};\ \nu < 0.$$

**§ 11.21. Определение стоячих электромагнитных волн.** В линиях без потерь при холостом ходе, коротком замыкании, а также при чисто реактивных нагрузках возникают стоячие электромагнитные волны.

*Стоячая электромагнитная волна* образована стоячими волнами напряжения и тока. Математически такие волны описываются произведением двух периодических (в нашем случае — тригонометрических) функций. Одна из них — функция координаты текущей точки на линии (в нашем случае $\beta y$), другая — функция времени ($\omega t$). Стоячие волны напряжения и тока всегда сдвинуты по отношению друг к другу в пространстве и во времени.

Сдвиг во времени между стоячими волнами напряжения и тока равен 90°, сдвиг в пространстве — четверти длины волны [см. формулы (11.52а) и (11.53а), (11.54а) и (11.55а)].

Точки линии, где периодическая функция координаты проходит через нуль, называют узлами, а точки линии, в которых периодическая функция координаты принимает максимальные значения, — *пучностями*.

При возникновении стоячих волн электромагнитная энергия от начала к концу линии не передается. Однако на каждом отрезке линии, равном четверти длины волны, запасена некоторая электромагнитная энергия.

Эта энергия периодически переходит из одного вида (энергии электрического поля) в другой (энергию магнитного поля).

В моменты времени, когда ток вдоль всей линии оказывается равным нулю, а напряжение достигает максимального значения, вся энергия переходит в энергию электрического поля.

В моменты времени, когда напряжение вдоль всей линии равно нулю, а ток достигает максимального значения, вся энергия переходит в энергию магнитного поля.

**§ 11.22. Стоячие волны в линии без потерь при холостом ходе линии.** Из формул (11.35а) и (11.36а) следует, что при холостом ходе

$$\dot U = \dot U_2 \cos\beta y; \quad (11.52)$$

$$\dot I = j\frac{\dot U_2}{\sqrt{L_0/C_0}}\sin\beta y. \quad (11.53)$$

Для перехода к функциям времени умножим правые части формул (11.52) и (11.53) на $\sqrt{2}e^{j\omega t}$ и от полученных произведений возьмем мнимые части:

$$u = \sqrt{2}\,U_2 \cos\beta y \sin\omega t; \quad (11.52а)$$

$$i = \frac{\sqrt{2}\,U_2}{\sqrt{L_0/C_0}}\sin\beta y\,\sin(\omega t + 90°). \quad (11.53а)$$

Угол 90° в аргументе у синуса в формуле (11.53а) соответствует множителю $j$ в формуле (11.53).

В точках $\beta y = k\pi$, где $k = 0, 1, 2, ...$, будут узлы тока и пучности напряжения.

График стоячих волн напряжения и тока для трех смежных моментов времени $\omega t_1 = 0$, $\omega t_2 = \pi/2$ и $\omega t_3 = \frac{3}{2}\pi$ показан на рис. 11.9: *а* — напряжения, *б* — тока. Сплошными линиями обозначена волна при $\omega t_1 = 0$, тонкими — при $\omega t_2 = \pi/2$, пунктирными — при $\omega t_3 = \frac{3}{2}\pi$ для напряжения и при $\omega t_3 = \pi$ для тока.

**§ 11.23. Стоячие волны в линии без потерь при коротком замыкании на конце линии.** Из формул (11.35а) и (11.36а) следует, что при коротком замыкании на конце линии

$$\dot U = j\dot I_2\sqrt{L_0/C_0}\sin\beta y; \quad (11.54)$$

$$\dot I = \dot I_2 \cos\beta y. \quad (11.55)$$

Для перехода к мгновенным значениям умножим правые части формул (11.54) и (11.55) на $\sqrt{2}e^{j\omega t}$ и от произведений возьмем мнимые части:

$$u = \sqrt{2}I_2\sqrt{L_0/C_0}\sin\beta y\,\sin(\omega t + 90°); \quad (11.54а)$$

$$i = \sqrt{2}I_2 \cos\beta y\,\sin\omega t. \quad (11.55а)$$

В правой части формулы (11.54а) — в формуле для напряжения — есть множитель $\sin\beta y \sin(\omega t + 90°)$, как и в формуле (11.53а) для тока $i$.

Следовательно, картина стоячей волны напряжения при коротком замыкании на конце линии качественно повторяет картину стоячей волны тока при холостом ходе линии.

**§ 11.24. Четвертьволновый трансформатор.** Для согласования линии без потерь, имеющей волновое сопротивление $Z_{в1}$, с активной нагрузкой $Z_н = R_н \neq Z_{в1}$ применяют четвертьволновый трансформатор (ЧВТ). Он представляет собой отрезок линии без потерь длиной в четверть волны $\lambda/4$ с волновым сопротивлением $Z_{в2}$. Сопротивление $Z_{в2}$ рассчитывают так, чтобы входное сопротивление в схеме рис. 11.9, *в* по отношению к точкам $a$ и $b$ оказалось равным $Z_{в1}$ (при этом на линии с $Z_{в1}$ практически установится режим бегущей волны):

$$Z_{вх\,ab} = \frac{R_н \cos 90° + jZ_{в2} \sin 90°}{\cos 90° + j\dfrac{R_н}{Z_{в2}} \sin 90°} = Z_{в2}^2/R_н = Z_{в1}.$$

Отсюда $Z_{в2} = \sqrt{R_н Z_{в1}}$.

На линии с $Z_{в2}$ есть и падающие и отраженные волны.

Если нагрузочное сопротивление не чисто резистивное ($Z_н = R_н + jX_н$), то для согласования $Z_{в1}$ с $Z_н$ на заданной частоте к зажимам $ab$ на рис. 11.9 кроме четвертьволновой линии подключают еще отрезок короткозамкнутой линии, длину которой берут такой, чтобы суммарная входная проводимость четвертьволновой и дополнительной короткозамкнутой линий равнялась $1/Z_{в1}$.

**§ 11.25. Бегущие, стоячие и смешанные волны в линиях без потерь. Коэффициенты бегущей и стоячей волн.** При согласованной нагрузке на линии имеются только бегущие волны напряжения ($\dot U = \dot U_2 e^{j\beta y}$) и тока ($\dot I = \dot I_2 e^{j\beta y}$). Так как при любом $y$ $|e^{j\beta y}| = 1$, то *для бегущей волны действующее значение напряжения и тока вдоль линии неизменно* (рис. 11.10, *а*). При возникновении на линии *стоячих волн* действующее значение напряжения на линии изменяется в функции расстояния $y$ пропорционально $|\cos\beta y|$ при коротком замыкании [см. формулу (11.54)].

При несогласованной активной нагрузке на линии возникает *смешанная волна* — комбинация бегущей и стоячей волн. Если обозначить $m = Z_н/Z_в$, то

$$\dot U = \dot U_2 \cos \beta y + jm\dot U_2 \sin \beta y = \dot U_2 \cos \beta y + j\dot U_2 \sin \beta y + j\dot U_2 (m-1) \sin \beta y,$$

или

$$\dot U = \dot U_2 e^{j\beta y} + j(m-1)\dot U_2 \sin \beta y.$$



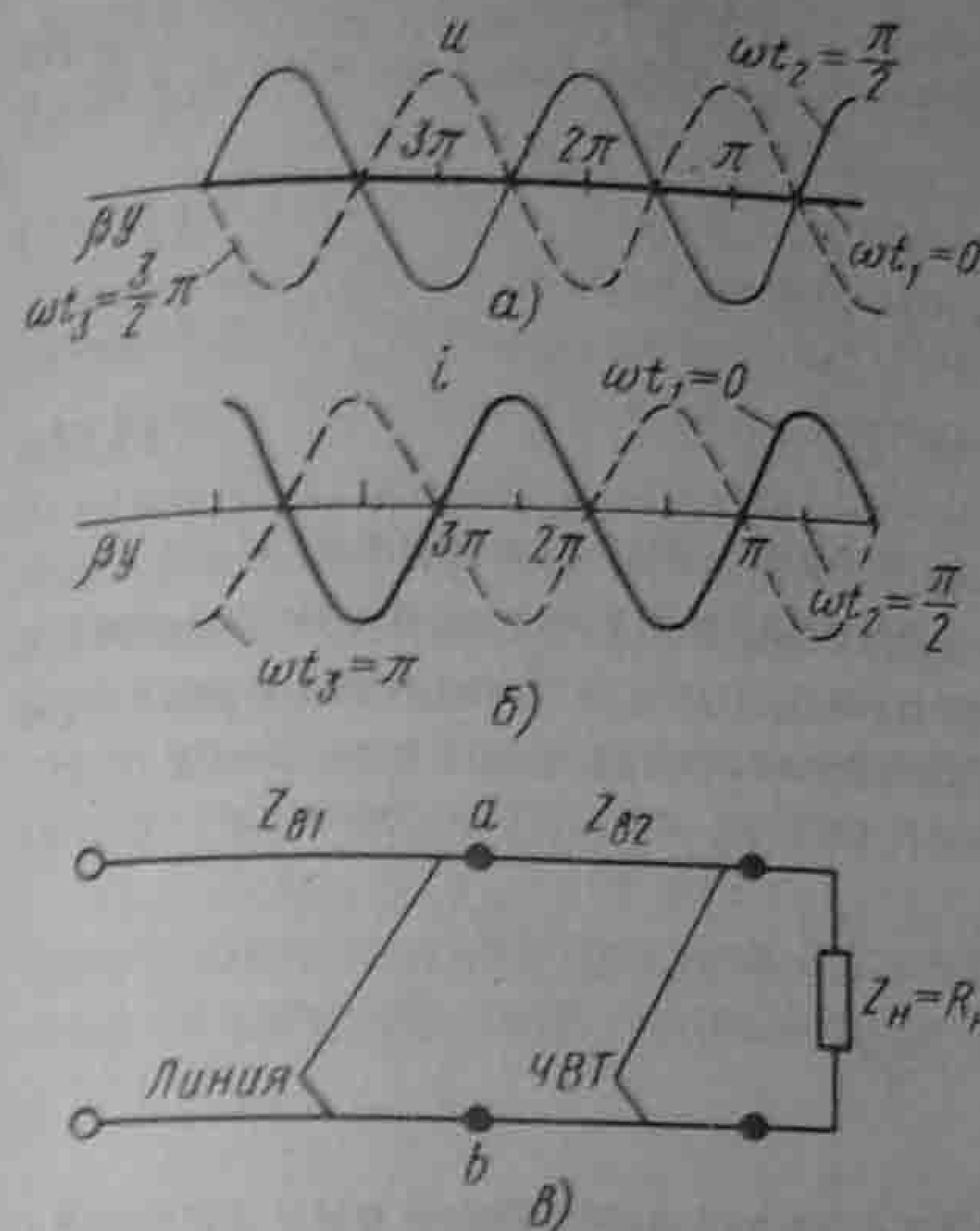



Рис. 11.9

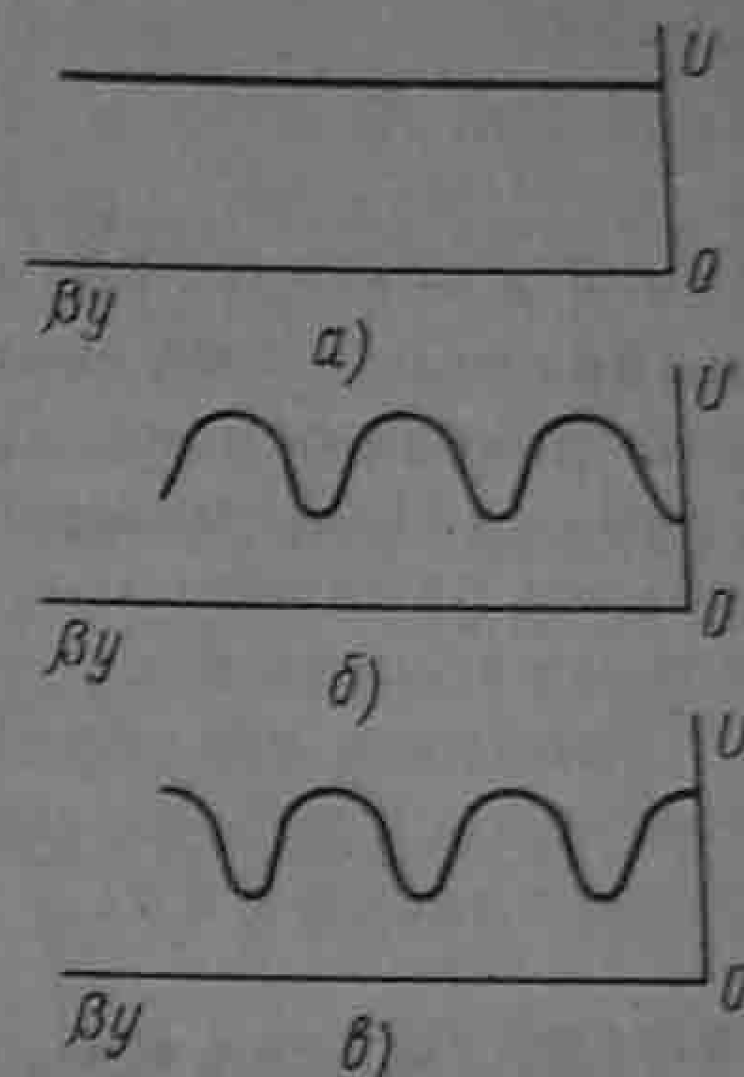



Рис. 11.10

Первое слагаемое определяет бегущую, второе — стоячую волны. Распределение напряжения на линии в функции расстояния $y$

$$U = U_2\sqrt{\cos^2\beta y + m^2 \sin^2 \beta y}.$$

При $m > 1$ напряжение на конце линии минимально, а через четверть длины волны $\beta y = \pi/2$ максимально (рис. 11.10, *б*). При $m < 1$ напряжение на конце линии максимально, а через $\beta y = \pi/2$ минимально (рис. 11.10, *в*).

*Коэффициентом бегущей волны* называют отношение минимума напряжения смешанной волны к ее максимуму: $K_{б.в} = U_{min}/U_{max}$.

*Коэффициент стоячей волны* $K_{с.в} = 1/K_{б.в}$.

**§ 11.26. Аналогия между уравнениями линии с распределенными параметрами и уравнениями четырехполюсника.** Напряжение и ток на входе линии с распределенными параметрами ($\dot U_1, \dot I_1$) связаны с напряжением и током в конце этой линии ($\dot U_2, \dot I_2$) следующими уравнениями [получены из (11.35) и (11.36), в которые вместо $y$ подставлена длина всей линии $l$]:

$$\dot U_1 = \dot U_2 \operatorname{ch} \gamma l + \dot I_2 Z_в \operatorname{sh} \gamma l; \quad \dot I_1 = \frac{\dot U_2}{Z_в} \operatorname{sh} \gamma l + \dot I_2 \operatorname{ch} \gamma l.$$

Сопоставим их с известными из ч. 1 учебника уравнениями че-

тырехполюсника: $\dot{U}_1 = A\dot{U}_2 + B\dot{I}_2$; $\dot{I}_1 = C\dot{U}_2 + D\dot{I}_2$. Из сопоставления следует, что уравнения по форме полностью аналогичны, а если принять, что

$$A = D = \mathrm{ch}\gamma l; \tag{11.56}$$

$$B = Z_в \mathrm{sh}\gamma l; \tag{11.57}$$

$$C = \mathrm{sh}\gamma l / Z_в, \tag{11.58}$$

то зависимость между $\dot{U}_1$ и $\dot{U}_2$, и $\dot{I}_2$ и зависимость между $\dot{I}_1$ и $\dot{U}_2$, и $\dot{I}_2$ в линиях с распределенными параметрами точно такие же, как и в четырехполюснике. Другими словами, при соблюдении условий (11.56) — (11.58) четырехполюсник эквивалентен линии с распределенными параметрами в отношении связи между входными и выходными токами и напряжениями.

Напомним, что обратная постановка вопроса, т. е. запись уравнений четырехполюсника через гиперболические функции, рассматривалась в § 4.11.

**§ 11.27. Замена четырехполюсника эквивалентной ему линией с распределенными параметрами и обратная замена.** При перемене местами источника и нагрузки в схеме (см. рис. 11.7) токи в источнике и нагрузке не изменятся. Таким же свойством обладает симметричный четырехполюсник. Поэтому однородная линия с распределенными параметрами может быть заменена симметричным четырехполюсником и, наоборот, симметричный четырехполюсник можно заменить участком однородной линии с распределенными параметрами. При замене будем исходить из уравнений (11.56) — (11.58) и зависимостей, с помощью которых параметры симметричного четырехполюсника связаны с коэффициентами $A$, $B$, $C$.

Для симметричной Т-схемы замещения четырехполюсника

$$Z_1 = (A-1)/C; \tag{11.59}$$

$$Z_3 = 1/C \tag{11.60}$$

или

$$A = D = 1 + Z_1/Z_3; \tag{11.61}$$

$$B = 2Z_1 + Z_1^2/Z_3; \tag{11.62}$$

$$C_1 = 1/Z_3. \tag{11.63}$$

Для симметричной П-схемы

$$Z_4 = B; \tag{11.64}$$

$$Z_5 = B/(A-1) \tag{11.65}$$

или

$$A = 1 + Z_4/Z_5; \tag{11.66}$$

$$B = Z_4; \tag{11.67}$$

$$C = \frac{2}{Z_5} + Z_4/Z_5^2. \tag{11.68}$$

Рассмотрим сначала последовательность операций при замене Т- и П-схем замещения четырехполюсника эквивалентной ему линией с распределенными параметрами (имеется в виду замена при фиксированной частоте).

Пусть известны параметры $Z_1$ и $Z_3$ в Т-схеме ($Z_4$ и $Z_5$ в П-схеме). Требуется найти $Z_в$ и $\gamma l$ для эквивалентной линии.

По формулам (11.61) и (11.63) или соответственно (11.66) — (11.68) находим коэффициенты $A$, $B$, $C$.

Для определения волнового сопротивления $Z_в$ разделим (11.57) на (11.58):

$$Z_в = \sqrt{B/C}. \tag{11.69}$$

Для определения $\gamma l$ составим выражение для $\mathrm{th}\gamma l$, использовав (11.56), (11.57) и (11.69):

$$\mathrm{th}\gamma l = \frac{\mathrm{sh}\,\gamma l}{\mathrm{ch}\gamma l} = \frac{\frac{B}{\sqrt{B/C}}}{A} = \frac{\sqrt{BC}}{A}, \tag{11.70}$$

$$\text{но } \mathrm{th}\gamma l = \frac{e^{\gamma l} - e^{-\gamma l}}{e^{\gamma l} + e^{-\gamma l}}.$$

Умножив и числитель, и знаменатель последней формулы на $e^{\gamma l}$, получим

$$\mathrm{th}\gamma l = \frac{e^{2\gamma l} - 1}{e^{2\gamma l} + 1}.$$

Отсюда

$$e^{2\gamma l} = e^{2\alpha l} e^{j2\beta l} = \frac{1 + \mathrm{th}\gamma l}{1 - \mathrm{th}\gamma l}. \tag{11.71}$$

Правую часть формулы (11.71) переведем в показательную форму. Пусть она будет равна $Me^{j\nu}$. Тогда $e^{2\alpha l} = M$, и так как $e^{j\nu} = e^{j(\nu + 2\pi k)} = e^{j2\beta l}$, где $k$ — целое число, то $2\beta l - 2k\pi\gamma = \nu$. Отсюда

$$\beta l = \frac{\nu}{2} + k\pi. \tag{a}$$

Для реальных линий $R_0$, $L_0$, $C_0$, $G_0 > 0$. Это накладывает условие на определение $k$. Следует подсчитать $\beta l$ по приближенно известному значению фазовой скорости в линии

$$\beta l = \omega l / v_\phi \quad (б)$$

и затем, сопоставив значения $\beta l$, найденные по (а) и (б), определить $k$, округлив его значение до ближайшего целого числа.

Рассмотрим теперь последовательность операций при замене линии с распределенными параметрами эквивалентным ей четырехполюсником.

Известны $\gamma l$ и $Z_в$. Требуется найти сопротивления $Z_1$ и $Z_3$ в Т-схеме ($Z_4$ и $Z_5$ в П-схеме). С этой целью по (11.56) — (11.58) находим значения коэффициентов $A$, $B$, $C$, а затем по (11.59) и (11.60) определяем $Z_1$ и $Z_3$ для Т-схемы [или по (11.64) и (11.65) сопротивления $Z_4$ и $Z_5$ для П-схемы].

Возникает вопрос: любой ли симметричный четырехполюсник можно заменить участком линии с распределенными параметрами и любую ли линию с распределенными параметрами можно заменить четырехполюсником?

Очевидно, подобную замену можно осуществить, если полученные в результате расчета параметры таковы, что заменяющее устройство физически можно выполнить. Как правило, замена участка линии с распределенными параметрами четырехполюсником возможна всегда, а обратная замена — не всегда. Она невозможна в тех случаях, когда в результате расчета волновое сопротивление окажется чисто мнимым числом; в реальных линиях этого не бывает.

**§ 11.28. Четырехполюсник заданного затухания.** Включаемый между источником сигнала и нагрузкой четырехполюсник, предназначенный для ослабления амплитуды сигнала в заданное число раз, называют четырехполюсником заданного затухания (*аттенюатором*). Его собирают обычно по симметричной Т- или П-схеме и нагружают согласованно.

Положим, что требуется найти сопротивления $Z_1$ и $Z_3$ такого четырехполюсника, собранного по Т-схеме, полагая известными затухание $a$ (в неперах) и характеристическое сопротивление $Z_c$. Исходим из двух соотношений:

$$\text{ch}a = 1 + \frac{Z_1}{Z_3} \text{ и } Z_c = \sqrt{B/C} = \sqrt{2Z_1Z_3 + Z_1^2}.$$

Из первого находим $Z_1/Z_3 = \text{ch}a - 1$ и подставляем во второе.

**Пример 118.** Дано: $a = 0{,}963$ Нп; $Z_c = 700$ Ом. Найти $Z_1$ и $Z_3$.

Решение. $Z_1/Z_3 = \text{ch}0{,}963$[1] $- 1 = 0{,}5$; $Z_1 = 0{,}5Z_3$; $Z_c = 2{,}25Z_1$; $Z_1 = 311$ Ом; $Z_3 = 622$ Ом.

[1]Таблицу гиперболических функций см. в § 8.18.



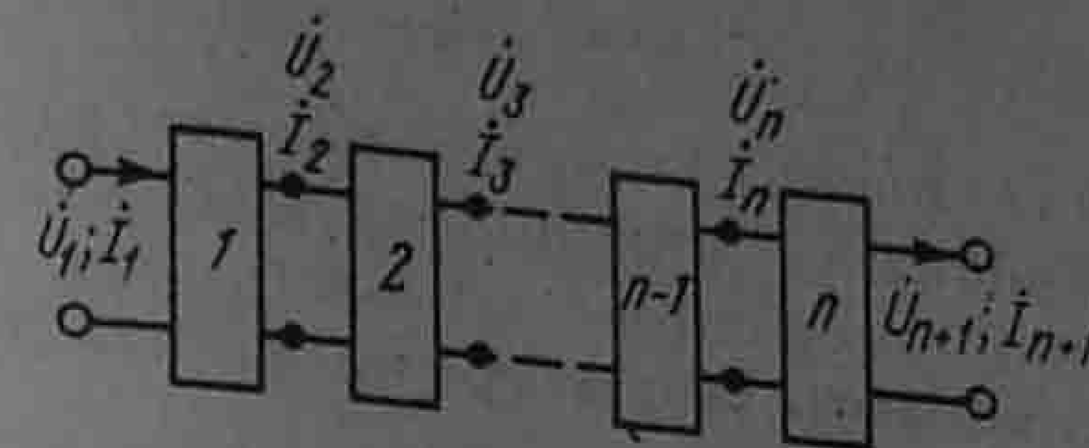



Рис. 11.11

**§ 11.29. Цепная схема.** На практике приходится встречаться со схемой, представляющей собой каскадное включение нескольких одинаковых симметричных четырехполюсников (рис. 11.11).

Такую схему принято называть *цепной*. Исследование распределения тока и напряжения вдоль цепной схемы удобно проводить, используя теорию линий с распределенными параметрами. Действительно, в предыдущем параграфе говорилось о замене одного четырехполюсника отрезком линии длиной $l$, имеющей постоянную распространения $\gamma$ и волновое сопротивление $Z_в$. Если число четырехполюсников равно $n$, то длина отрезка линии с распределенными параметрами будет в $n$ раз больше, т. е. равна $nl$.

Обозначим напряжение и ток на выходе $n$ четырехполюсника через $\dot U_{n+1}$ и $\dot I_{n+1}$; тогда напряжение и ток на входе первого четырехполюсника

$$\dot U_1 = \dot U_{n+1}\text{ch}\gamma nl + \dot I_{n+1}Z_в\text{sh}\gamma l; \quad (11.72)$$

$$\dot I_1 = \frac{\dot U_{n+1}}{Z_в}\text{sh}\gamma nl + \dot I_{n+1}\text{ch}\gamma nl. \quad (11.73)$$

Напряжение и ток на входе $k$ от начала четырехполюсника ($k \leqslant n$):

$$\dot U_k = \dot U_{n+1}\text{ch}(n-k+1)\gamma l + \dot I_{n+1}Z_в\text{sh}(n-k+1)\gamma l; \quad (11.74)$$

$$\dot I_k = \frac{\dot U_{n+1}}{Z_в}\text{sh}(n-k+1)\gamma l + \dot I_{n+1}\text{ch}(n-k+1)\gamma l. \quad (11.75)$$

Рассмотрим несколько числовых примеров на материал, изложенный в § 11.1 — 11.28.

**Пример 119.** Для некоторой линии длиной 5 км на частоте 1000 Гц были проведены опыты по определению ее входного сопротивления при холостом ходе и коротком замыкании на конце линии. Оказалось, что $Z_{вх\,х} = 535e^{-j64°}$ Ом и $Z_{вх\,к} = 467{,}5e^{-j10°}$ Ом. Требуется найти волновое сопротивление $Z_в$ и постоянную распространения $\gamma$ этой линии.

Решение. Из формулы (11.48) следует, что при холостом ходе, когда $Z_2 = \infty$ $Z_{вх\,х} = Z_в/\text{th}\gamma l$.

При коротком замыкании, когда $Z_2 = 0$, $Z_{вх\,к} = Z_в\text{th}\gamma l$, отсюда

$$Z_в = \sqrt{Z_{вх\,х}Z_{вх\,к}} = \sqrt{535e^{-j64°}467{,}5e^{-j10°}} = 500e^{-j37°} \text{ Ом};$$

$$\text{th}\gamma l = \sqrt{Z_{вх\,к}/Z_{вх\,х}} = 0{,}935e^{j27°}.$$

По формуле (11.71),

$$e^{2\alpha l}e^{j2\beta l}=\frac{1+0{,}935e^{j27^\circ}}{1-0{,}935e^{j27^\circ}}=4{,}11e^{j81^\circ10'}=e^{1{,}414}e^{j1{,}414};\ 4{,}11=e^{1{,}414};\ 81^\circ10'=1{,}414\text{ рад};$$

$$2\alpha l=1{,}414;\ \alpha=0{,}1414/(2l)=0{,}1414;\ \gamma=0{,}2e^{j45^\circ}\text{ км}^{-1},\ \beta=0{,}1414.$$

**Пример 120.** Определить $R_0$, $L_0$, $G_0$ и $C_0$ для линии примера 119, полагая $Z_в=500e^{-j37^\circ}$ Ом и $\gamma=0{,}2e^{j45^\circ}$ км$^{-1}$.

Решение. В соответствии с формулами (11.17) и (11.18) $\gamma Z_в=R_0+j\omega L_0$. Следовательно,

$$R_0+j\omega L_0=0{,}2e^{j45^\circ}500e^{-j37^\circ}=100e^{j8^\circ}=99+j13{,}9,$$

или

$$R_0=99\text{ Ом/км и }L_0=13{,}9/(2\pi\cdot1000)=0{,}00222\text{ Гн/км};$$

$$\gamma/Z_в=G_0+j\omega C_0.$$

Таким образом,

$$G_0+j\omega C_0=0{,}2e^{j45^\circ}/(500e^{-j37^\circ})=0{,}0557\cdot10^{-3}+j0{,}396\cdot10^{-3}.$$

**Пример 121.** Линия примера 120 подключена к постоянному напряжению ($\omega=0$). Определить напряжение и ток в начале линии, если на конце линии включена нагрузка 300 Ом и ток в нагрузке 0,5 А.

Решение. По формуле (11.23) находим волновое сопротивление линии $Z_в$ для постоянного тока:

$$Z_в=\sqrt{99/0{,}0557\cdot10^{-3}}=1330\text{ Ом}.$$

Постоянная распространения [см. формулу (11.19)]

$$\gamma=\sqrt{R_0G_0}=\sqrt{99\cdot0{,}0557\cdot10^{-3}}=0{,}0743\text{ км}^{-1}.$$

По формулам (11.35) и (11.36), при $y=l$

$$U_1=U_2\mathrm{ch}\gamma l+I_2Z_в\mathrm{sh}\gamma l;\ I_1=I_2\mathrm{ch}\gamma l+\frac{U_2}{Z_в}\mathrm{sh}\gamma l.$$

По условию, $I_2=0{,}5$ А; $U_2=I_2R_2=0{,}5\cdot400=200$ В; $\gamma l=\alpha l=0{,}0743\cdot5=0{,}371$; $\mathrm{ch}\alpha l=\mathrm{ch}0{,}371=1{,}07$; $\mathrm{sh}\alpha l=\mathrm{sh}0{,}371=0{,}379$. Следовательно,

$$U_1=200\cdot1{,}07+0{,}5\cdot1330\cdot0{,}379=466\text{ В};$$

$$I_1=0{,}5\cdot1{,}07+\frac{200}{1330}\cdot0{,}379=0{,}694\text{ А}.$$

**Пример 122.** Линия примера 119 короткозамкнута на конце и присоединена к источнику синусоидального напряжения частотой 1000 Гц. Определить напряжение и ток в начале линии, если ток в конце линии $I_2=1$ А.

Решение. При коротком замыкании

$$\dot U_1=\dot I_2Z_в\mathrm{sh}\gamma l;\ \dot I_1=\dot I_2\mathrm{ch}\gamma l.$$

По данным примера 119,

$$\gamma=\alpha+j\beta=0{,}1414+j0{,}1414\text{ км}^{-1};\ l=5\text{ км};$$

$$\gamma l=0{,}707+j0{,}707;\ Z_в=500e^{-j37^\circ}\text{ Ом};$$



$$e^{\gamma l}=e^{0{,}707}e^{j0{,}707}=2{,}02(\cos40^\circ20'+j\sin40^\circ20')=1{,}54+j1{,}305;$$

$$e^{-\gamma l}=e^{-0{,}707}e^{-j0{,}707}=0{,}495(\cos40^\circ20'-j\sin40^\circ20')=0{,}377-j0{,}32;$$

$$\mathrm{ch}\gamma l=0{,}5(e^{\gamma l}+e^{-\gamma l})=0{,}96+j0{,}4925=1{,}07e^{j27^\circ20'};$$

$$\mathrm{sh}\gamma l=0{,}5(e^{\gamma l}-e^{-\gamma l})=0{,}582+j0{,}812\approx e^{j54^\circ20'}.$$

Следовательно,

$$\dot U_1=\dot I_2Z_в\mathrm{sh}\gamma l=1\cdot500e^{-j37^\circ}e^{j54^\circ20'}=500e^{j17^\circ20'}\text{ В};$$

$$\dot I_1=\dot I_2\mathrm{ch}\gamma l=1{,}07e^{j27^\circ20'}\text{ А}.$$

**Пример 123.** Линия примера 119 замкнута на активное сопротивление $Z_2=400$ Ом. Определить $\dot U_1$ и $\dot I_1$, если по нагрузке протекает ток $\dot I_2=0{,}5$ А; $f=1000$ Гц.

Решение.

$$\dot U_1=\dot U_2\mathrm{ch}\gamma l+\dot I_2Z_в\mathrm{sh}\gamma l=200\cdot1{,}07e^{j27^\circ20'}+0{,}5\cdot500e^{-j37^\circ}e^{j54^\circ20'}=463e^{j22^\circ}\text{ В};$$

$$\dot I_1=\dot I_2\mathrm{ch}\gamma l+\frac{\dot U_2}{Z_в}\mathrm{sh}\gamma l=0{,}8e^{j53^\circ38'}\text{ А}.$$

**Пример 124.** По данным примера 123 определить комплекс действующего значения падающей волны в начале линии ($\dot A_2$).

Решение. В соответствии с формулой (11.28)

$$\dot A_2=A_2e^{j\psi_п}=\frac{\dot U_1+\dot I_1Z_в}{2}=\frac{463e^{j22^\circ}+0{,}8e^{j53^\circ38'}500e^{-j37^\circ}}{2}=431e^{j19^\circ30'}\text{ В}.$$

**Пример 125.** Записать выражение для мгновенного значения падающей волны напряжения в начале и конце линии по данным примера 124.

Решение. Мгновенное значение падающей волны напряжения в начале линии при $x=0$ $\sqrt2\cdot431\sin(\omega t+19^\circ30')$.

Мгновенное значение падающей волны напряжения в конце линии при $x=l$ в общем виде $\sqrt2A_2e^{-\alpha l}\sin(\omega t+\psi_п-\beta l)$; определяем

$$e^{-\alpha l}=e^{-0{,}707}=0{,}495;\ \beta l=0{,}707\text{ рад}=40^\circ20'$$

$$\sqrt2A_2e^{-\alpha l}=\sqrt2\cdot431\cdot0{,}495=301\text{ В};$$

$$\psi_п-\beta l=19^\circ31'-40^\circ20'=-20^\circ50'.$$

Следовательно, мгновенное значение падающей волны напряжения в конце линии $301\sin(\omega t-20^\circ50')$ В.

**Пример 126.** Определить затухание в неперах для линии примера 119, если на конце ее включена согласованная нагрузка.

Решение. Затухание в неперах равно $\alpha l$. Так как произведение $\alpha l=0{,}1414\cdot5=0{,}707$, то затухание линии равно 0,707 Нп.

**Пример 127.** Какую дополнительную индуктивность $L_{0\,доп}$ нужно включить на каждом километре телефонной линии с параметрами: $R_0=3$ Ом/км; $L_0=2\cdot10^{-3}$ Гн/км; $G_0=10^{-6}$ Ом·км$^{-1}$; $C_0=6\cdot10^{-9}$ Ф/км, чтобы линия стала неискажающей?

Решение. Для того чтобы линия была неискажающей, ее параметры должны удовлетворять уравнению (11.41). Следовательно,

$$L_{0\,доп}+L_0=\frac{R_0C_0}{G_0}=3\cdot6\cdot10^{-9}/10^{-6}=18\cdot10^{-3}\text{ Гн/км};$$

$$L_{0\,доп}=18-2=16\text{ мГ/км}.$$

**Пример 128.** Определить наименьшую длину короткозамкнутой на конце двухпроводной воздушной линии, чтобы при частоте $10^8$ Гц входное сопротивление ее равнялось $800j$ Ом. Расстояние между осями проводов $d = 20$ см, радиус каждого провода $r = 2$ мм.

Решение. В соответствии с формулой (11.50)

$$Z_{\text{вх к}} = j\sqrt{L_0/C_0}\,\text{tg}\beta y\,.$$

Для двухпроводной линии

$$L_0 = \frac{\mu_0}{\pi}\ln\frac{d}{r};\; C_0 = \frac{\pi\varepsilon_0}{\ln(d/r)};\; \frac{L_0}{C_0} = \frac{\mu_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{\ln(d/r)}{\pi}\right)^2;\; \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = \frac{\ln(d/r)}{\pi}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}};$$

$$\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 377\ \text{Ом};\; \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = 377\,\frac{\ln(200/2)}{\pi} = 553\ \text{Ом}.$$

По условию, $800j = j553\,\text{tg}\beta y$.
Отсюда

$$\text{tg}\beta y = 800/553 = 1{,}445;\; \beta y = 55°20' = 0{,}963\ \text{рад};$$

$$\sqrt{\mu_0\varepsilon_0} = 1/(3\cdot 10^{10})\ \text{с/см};$$

$$\beta = \omega\sqrt{L_0C_0} = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0} = 2\pi\cdot 10^8/(3\cdot 10^{10}) = 2{,}092\cdot 10^{-2}\ \text{см}^{-1}.$$

Искомая длина линии

$$y = 0{,}963/(2{,}092\cdot 10^{-2}) = 46{,}1\ \text{см}.$$

**Пример 129.** В Т-схеме рис. 6.5, *а* $Z_1 = 100$ Ом, $Z_3 = -500j$ Ом. Определить характеристическое сопротивление четырехполюсника и произведение $\gamma l$ эквивалентной ему линии с распределенными параметрами.

Решение. В соответствии с формулами (11.61) — (11.63)

$$A = 1 + \frac{Z_1}{Z_3} = 1 + 100/(-500j) = 1 + 0{,}2j = 1{,}02e^{j11°18'};$$

$$B = 2Z_1 + Z_1^2/Z_3 = 200 + 10^4/(-500j) = 200 + 20j \approx 200e^{j5°40'};$$

$$C = 1/Z_3 = 1/(-500j) = 0{,}002e^{j90°}.$$

По формуле (11.69),

$$Z_{\text{в}} = \sqrt{B/C} = \sqrt{200e^{j5°40'}/(0{,}002e^{j90°})} = 316e^{-j42°10'}\ \text{Ом}.$$

По формуле (11.70),

$$\text{tg}\gamma l = \sqrt{B/C}/A = \sqrt{200e^{j5°40'}0{,}002e^{j90°}}/(1{,}02e^{j11°18'}) = 0{,}498 + 0{,}369j.$$

По формуле (11.71),

$$e^{2\gamma l} = e^{2\alpha l}\cdot e^{j2\beta l} = \frac{1 + \text{th}\gamma l}{1 - \text{th}\gamma l} = \frac{1{,}498 + j0{,}369}{0{,}502 - j0{,}369} = 2{,}475e^{j50°10'};$$

$$\alpha l = 0{,}5\ln 2{,}475 = 0{,}454;$$

$$\beta l = 25°5' \approx 0{,}437\ \text{рад};\; \gamma l = 0{,}454 + j0{,}437.$$



**Вопросы для самопроверки**

1. Чем принципиально отличаются цепи с распределенными параметрами от цепей с сосредоточенными параметрами? 2. За счет чего токи и напряжения вдоль линии с распределенными параметрами неодинаковы для одного и того же момента времени? 3. Поясните переход от уравнений для мгновенных значений $u$ и $i$ уравнений (11.1) и (11.4) к уравнениям для комплексных значений $\dot{U}$ и $\dot{I}$ [уравнениям (11.7) и (11.8)]. 4. Каков физический смысл постоянной распространения $\gamma$ и волнового сопротивления $Z_{\text{в}}$? 5. Если два провода двухпроводной линии с малыми потерями раздвинуть по сравнению с их исходным состоянием, то как это скажется на $Z_{\text{в}}$ и $\gamma$? 6. Как определить $Z_{\text{в}}$ и $\gamma$ опытным путем? 7. Из каких условий определяют постоянные $\dot{A}_1$ и $\dot{A}_2$? 8. Как показать, что сигнал, проходя по линии без искажений, не изменяет своей формы? 9. Почему в линии передачи информации стремятся брать $Z_{\text{н}} = Z_{\text{в}}$? 10. Линия без потерь нагружена несогласованно. Коэффициент отражения по напряжению $k_u = 1/3$. Чему равно $Z_{\text{н}}$ в долях от $Z_{\text{в}}$? 11. В чем различие между бегущей и стоячей волнами в физическом и математическом отношении? Какую волну называют смешанной? 12. Покажите, что линия без потерь является неискажающей. 13. При каком соотношении между параметрами можно считать реальную линию с $R_0 \neq 0$ и $G \neq 0$ как линию без потерь? 14. Линия длиной $\lambda/2$ нагружена согласованно, $\gamma = 0{,}1 + j0{,}314$. Определите КПД линии. (*Ответ:* 0,133.) 15. Линия имеет длину 10 км и $\gamma = 0{,}2 + 0{,}314j$. В середине линии $\dot{U}_{\text{п}} = 100e^{j30°}$ В, $\dot{U}_{\text{отр}} = 50e^{-j30°}$ В. Запишите мгновенные значения $u_{\text{п}}$ и $u_0$ в начале линий. [*Ответ:* $u_{\text{п}} = 272\sin(\omega t + 120°)$, $u_0 = 36{,}8\sin(\omega t - 120°)$ В.] 16. В каком смысле четырехполюсник может быть эквивалентен линии с распределенными параметрами? 17. Как рассчитать элементы аттенюатора по известным $a$ и $Z_{\text{в}}$? 18. Каково назначение четвертьволнового трансформатора? 19. Решите задачи 13.3; 13.11; 13.23; 13.31; 13.37; 13.43.

## Глава двенадцатая

# ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ, СОДЕРЖАЩИХ ЛИНИИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

**§ 12.1. Общие сведения.** В гл. 8 рассматривались переходные процессы в линейных электрических цепях с сосредоточенными параметрами. Для электроэнергетики, телефонии, телеграфии, счетной техники, радиотехники, электроники и импульсной техники существенное значение имеют также переходные процессы в электрических цепях, содержащих линии с распределенными параметрами.

В тех участках цепей, которые могут быть представлены как участки с сосредоточенными параметрами, расчет переходных процессов производят с помощью методов, изложенных в гл. 8. В данной главе обсуждаются особенности переходных процессов в самих линиях с распределенными параметрами, вопросы согласования и увязки их с переходными процессами на участках цепей с сосредоточенными параметрами.

Как уже говорилось в § 11.2, основными уравнениями для линий с распределенными параметрами являются уравнения (11.1) и (11.4). Они справедливы для установившихся и переходных процессов.

В силу того, что интегрирование двух совместных дифференциальных уравнений в частных производных [уравнений (11.1) и (11.4)]

в общем виде представляет собой довольно сложную в математическом отношении задачу, в курсе ТОЭ переходные процессы на первом этапе изучают несколько упрощенно, а именно: рассматривают переходные процессы в однородных линиях без потерь, т. е. при $R_0 = 0$ и $G_0 = 0$. Практически это вполне оправдано, поскольку реальные линии с распределенными параметрами, как правило, обладают относительно малыми потерями.

Изучение переходных процессов при $R_0 = 0$ и $G_0 = 0$ дает возможность качественно исследовать основные черты процессов. В количественном отношении неучет $R_0$ и $G_0$ для начальных стадий переходного процесса существенного влияния обычно не оказывает, однако для последующих стадий учет $R_0$ и $G_0$ желателен и даже необходим.

После того как основные черты переходных процессов в линиях с распределенными параметрами будут изучены, в § 12.11 — 12.15 будет рассмотрено применение операторного метода, позволяющее учесть затухание волн в линиях (учесть наличие $R_0$ и $G_0$).

В энергетических, телефонных и телеграфных устройствах, содержащих линии с распределенными параметрами, переходные процессы возникают при подключении линий к источнику ЭДС (источнику сигнала), при отключении от источника ЭДС, при подключении и отключении нагрузки, а также при атмосферных (грозовых) разрядах.

В радиотехнических устройствах и устройствах, используемых в вычислительной технике, также происходят переходные процессы типа рассматриваемых в данной главе, например в линиях задержки и формирующих линиях.

**§ 12.2. Исходные уравнения и их решение.** Из уравнений (11.1) и (11.4) при $R_0 = 0$ и $G_0 = 0$ следует, что

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = L_0 \frac{\partial i}{\partial t}; \tag{12.1}$$

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = C_0 \frac{\partial u}{\partial t}. \tag{12.2}$$

Ток и напряжение являются функциями двух переменных: расстояния $x$ от начала линии и времени $t$. Продифференцируем (12.1) по $x$ и (12.2) по $t$:

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = L_0 \frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t}; \tag{12.3}$$

$$-\frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t} = C_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{12.4}$$

В соответствии с (12.4) в правую часть (12.3) вместо $\partial^2 i/\partial x \partial t$



подставим $-C_0 \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ и обозначим $L_0 C_0 = 1/v^2$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{12.5}$$

Из предыдущего [см. § 11.10, формула (11.39)] известно, что $v = 1/\sqrt{L_0 C_0}$ есть скорость распространения электромагнитной волны по линии. Если уравнение (12.2) продифференцировать по $x$, а (12.1) — по $t$ и в правую часть продифференцированного уравнения (12.2) подставить правую часть продифференцированного уравнения (12.1), то получим

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}. \tag{12.6}$$

Уравнения (12.5) и (12.6) — это уравнения второго порядка в частных производных. Из курса математики известно, что уравнения такого вида называют *волновыми*.

Решением уравнения (12.5) является сумма любых функций $f_1$ и $f_2$, причем аргументом функции $f_1$ является $(t - x/v)$, а аргументом функции — $f_2$ — $(t + x/v)$

$$u = f_1(t - x/v) + f_2(t + x/v). \tag{12.7}$$

Для сокращения записи в дальнейшем будем обозначать:

$$u_п = f_1(t - x/v); \tag{12.8}$$

$$u_о = f_2(t + x/v). \tag{12.9}$$

Следовательно,

$$u = u_п + u_о, \tag{12.10}$$

где индексы «о» и «п» означают отраженная и падающая (волны).

Вид функций $f_1$ и $f_2$ определяется граничными условиями в начале и конце линии. Функции $f_1$ и $f_2$ в общем случае должны позволять дважды дифференцировать их по $x$ и $t$.

Подстановка функций $f_1(t - x/v)$ и $f_2(t + x/v)$ в (12.5) дает тождество.

Решение уравнения (12.6):

$$i = \varphi_1(t - x/v) + \varphi_2(t + x/v). \tag{12.11}$$

Для сокращения записи обозначим:

$$i_п = \varphi_1(t - x/v); \tag{12.12}$$

$$i_о = \varphi_2(t + x/v). \tag{12.13}$$

Тогда

$$i = i_п + i_о. \tag{12.14}$$

**§ 12.3. Падающие и отраженные волны на линиях.** В соответствии с формулами (12.7) и (12.11) напряжение и ток в линии могут быть представлены в виде двух функций: функции $f_1(t - x/v)$ и $\varphi_1(t - x/v)$ — падающие волны; функции $f_2(t + x/v)$ и $\varphi_2(t + x/v)$ — отраженные волны.

*Падающие волны* перемещаются со скоростью $v$ по направлению от источника энергии к приемнику, т. е. в сторону увеличения координаты $x$; *отраженные волны* — от приемника энергии к источнику, т. е. в сторону уменьшения координаты $x$.

Обсудим, как следует понимать, что аргументом функции $f_1$ является $(t - x/v)$ (аналогичные выводы можно сделать и по отношению к другим функциям).

Пусть в некоторой точке линии при $x = x_1$ и $t = t_1$ значение функции $f_1(t_1 - x_1/v)$ равно $F_1$. Это значение функция $f_1$ будет принимать во всех точках линии, где $x > x_1$ с запозданием во времени, равным $(x - x_1)/v$ и обусловленным конечной скоростью перемещения волны по линии.

Так, в точке $x = x_2$ значение функции $f_1$ будет равно $F_1$ при $t = t_2 = t_1 + (x_2 - x_1)/v$. Действительно,

$$f_1(t_2 - x_2/v) = f_1\left(t_1 + \frac{x_2 - x_1}{v} - \frac{x_2}{v}\right) = f_1\left(t_1 - \frac{x_1}{v}\right) = F_1.$$

Таким образом, каков бы ни был закон изменения напряжения падающей волны $f_1$ в начале линии, по такому же закону, но с запозданием во времени изменяется напряжение падающей волны в любой точке линии.

**§ 12.4. Связь между функциями $f_1$, $f_2$ и функциями $\varphi_1$, $\varphi_2$.** Найдем связь между функциями $f_1$ и $\varphi_1$, а также $f_2$ и $\varphi_2$. С этой целью в (12.1) и (12.2) подставим (12.7) и (12.11) и для сокращения записи обозначим:

$$\frac{df_1(t - x/v)}{d(t - x/v)} = f_1'; \quad \frac{d\varphi_1(t - x/v)}{d(t - x/v)} = \varphi_1';$$

$$\frac{df_2(t + x/v)}{d(t + x/v)} = f_2'; \quad \frac{d\varphi_2(t + x/v)}{d(t + x/v)} = \varphi_2'.$$

Тогда уравнение (12.1) дает

$$\frac{1}{v}f_1' - \frac{1}{v}f_2' = L_0\varphi_1' + L_0\varphi_2'. \qquad \textbf{(12.15)}$$

Из (12.2) следует, что

$$\frac{1}{v}\varphi_1' - \frac{1}{v}\varphi_2' = C_0f_1' + C_0f_2'. \qquad \textbf{(12.16)}$$

Перепишем (12.15) и (12.16):



$$f_1' - f_2' = vL_0(\varphi_1' + \varphi_2'); \qquad (12.15а)$$

$$f_1' + f_2' = \frac{1}{vC_0}(\varphi_1' - \varphi_2'). \qquad (12.16а)$$

Но

$$vL_0 = L_0/\sqrt{L_0C_0} = \sqrt{L_0/C_0} = Z_в;$$

$$1/(vC_0) = \sqrt{L_0C_0}/C_0 = \sqrt{L_0/C_0} = Z_в,$$

где $Z_в$ — волновое сопротивление однородной линии без потерь [см. формулу (11.23а)].

Таким образом,

$$f_1' - f_2' = Z_в(\varphi_1' + \varphi_2'); \qquad (12.15б)$$

$$f_1' + f_2' = Z_в(\varphi_1' - \varphi_2'). \qquad (12.16б)$$

Следовательно,

$$\varphi_1' = f_1'/Z_в; \qquad (12.17)$$

$$\varphi_2' = -f_2'/Z_в. \qquad (12.18)$$

Если производные двух функций (например, $\varphi_1'$ и $f_1'$) при любых значениях $x$ и $t$ равны, то это значит, что сами функции ($\varphi_1$ и $f_1$) равны с точностью до постоянной. Поэтому

$$\varphi_1(t - x/v) = \frac{1}{Z_в}f_1(t - x/v); \qquad (12.19)$$

$$\varphi_2(t + x/v) = -\frac{1}{Z_в}f_2(t + x/v). \qquad (12.20)$$

Постоянные интегрирования опустили, так как полагаем, что в токах и напряжениях падающей и отраженной волн отсутствуют постоянные составляющие, не зависящие от $x$ и от $t$. Два последних уравнения можно переписать с учетом (12.8), (12.9), (12.12), (12.13):

$$i_п = u_п/Z_в; \qquad (12.19а)$$

$$i_о = -u_о/Z_в. \qquad (12.20а)$$

Из (12.19а) следует, что ток падающей волны для любого момента времени и для любой точки на линии равен частному от деления напряжения падающей волны для того же момента времени и для той же точки линии на волновое сопротивление.

Из (12.20а) вытекает, что ток отраженной волны для любого момента времени и для любой точки линии равен взятому с обратным знаком частному от деления напряжения отраженной волны в той же точке линии и для того же момента времени на волновое сопротивление. Знак минус в (12.20а) означает, что ток отраженной

волны направлен встречно положительному направлению отсчета тока, показанному на рис. 11.2.

**§ 12.5. Электромагнитные процессы при движении прямоугольной волны по линии.** Пусть источник постоянного напряжения $u$, имеющий внутреннее сопротивление, равное нулю, подключается к незаряженной однородной линии с распределенными параметрами, у которой $R_0 = G_0 = 0$ (рис. 12.1).

По линии перемещается падающая электромагнитная волна. Начальный участок волны, первым продвигающимся по линии, принято называть *фронтом волны*. В данном случае волна имеет прямоугольный фронт.

Двигаясь по линии, волна создает между проводами линии электрическое и магнитное поля.

Приращение магнитного потока (потокосцепления) на фронте волны за время $dt$ равно произведению тока $i$ на индуктивность участка линии длиной $dx$: $d\psi = iL_0 dx$; оно вызывает ЭДС

$$e = -\frac{d\psi}{dt} = -iL_0\frac{dx}{dt} = -iL_0 v = -i\frac{L_0}{\sqrt{L_0C_0}} = -i\sqrt{\frac{L_0}{C_0}} =$$

$$= -iZ_в = -u_п = -u.$$

Таким образом, на фронте волны возникает ЭДС самоиндукции, численно равная напряжению генератора. На фронте волны происходит зарядка проводов линии: один провод, например верхний, присоединенный к плюсу источника ЭДС, приобретает положительный заряд, другой (нижний) — отрицательный заряд (такой же величины).

Кроме того, на фронте волны возникает ток смещения $i_{см} = dq/dt$, где $dq$ — приращение заряда на одном из проводов линии за время $dt$:

$$dq = C_0 u dx = C_0 u v dt.$$

Проходящий по диэлектрику на фронте волны ток смещения равен току падающей волны, проходящему по проводам линии:

$$i_{см} = dq/dt = C_0 uv = u_п/Z_в.$$

Электромагнитная волна, продвигаясь по линии, каждой единице длины ее сообщает энергию электрического поля $C_0 u_п^2/2$ и энергию магнитного поля $L_0 i_п^2/2$. Можно показать, что эти количества энергий равны. Действительно,

$$u_п = i_п Z_в = i_п\sqrt{L_0/C_0}.$$

Следовательно,

$$C_0 u_п^2/2 = C_0 i_п^2 L_0/(2C_0) = L_0 i_п^2/2.$$



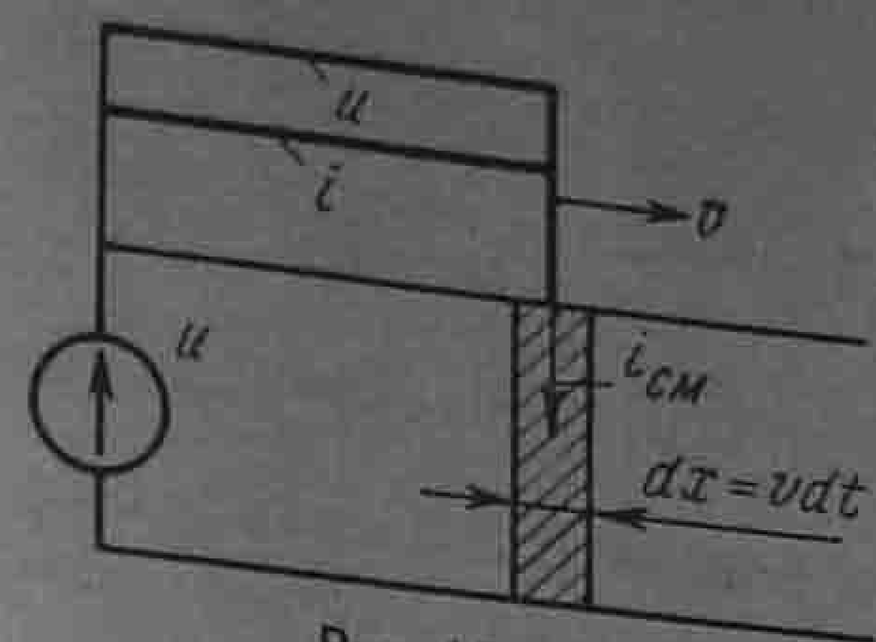



Рис. 12.1

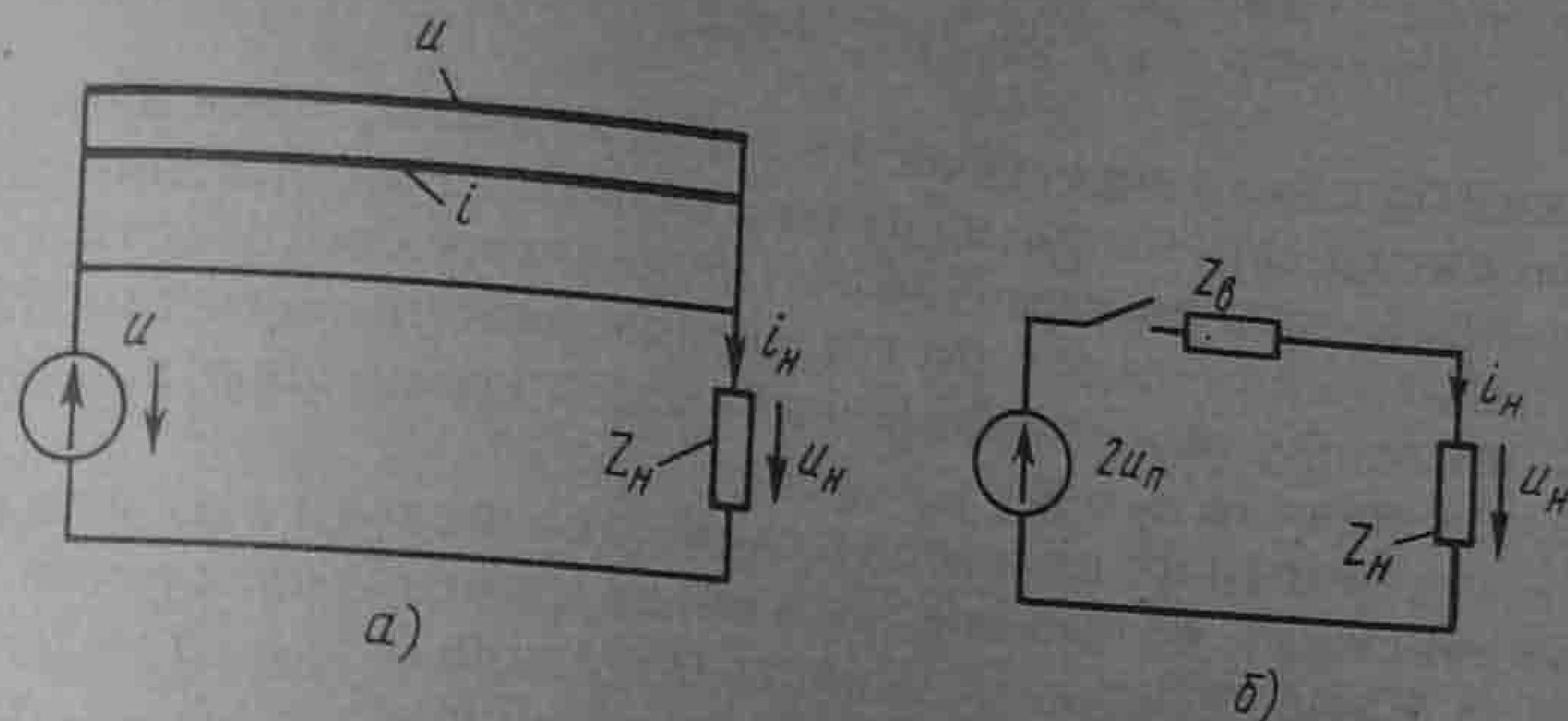



Рис. 12.2

Когда падающая волна достигает конца линии, к которому в общем случае присоединена некоторая нагрузка или другая линия (с другим волновым сопротивлением), то часть падающей волны проходит в нагрузку (или соответственно во вторую линию), а часть отражается — возникает отраженная волна.

Чтобы выяснить, какова форма волны, проходящей в нагрузку, какова форма отраженной волны и как они деформируются во времени, применяют расчетную схему, которую принято называть *схемой замещения для исследования волновых процессов в линии с распределенными параметрами*.

**§ 12.6. Схема замещения для исследования волновых процессов в линиях с распределенными параметрами.** Для обоснования методики составления схемы замещения обратимся к рис. 12.2, *а*. На нем изображена линия с распределенными параметрами, на конце которой включена некоторая нагрузка. Начиная с того момента, когда падающая волна дойдет до конца линии, по нагрузке пойдет ток $i_н$ и на ней будет напряжение $u_н$.

На рис. 12.2, *а* изображены эпюры волн $u$ и $i$ на линии для момента времени, непосредственно предшествующего подходу волны к концу линии.

В соответствии с формулами (12.10) и (12.14) напряжение и ток в любой точке линии можно представить в виде суммы падающих и отраженных волн. Это справедливо также в отношении напряжения и тока в конце линии. Следовательно,

$$u_п + u_0 = u_н; \qquad (12.21)$$

$$i_п + i_0 = i_н. \qquad (12.22)$$

Заменив $i_п$ на $u_п/Z_в$, а $i_0$ на $-u_0/Z_в$, получим

$$u_п + u_0 = u_н; \ u_п - u_0 = i_н Z_в,$$

или

$$2u_п = u_н + i_н Z_в. \qquad (12.23)$$

Таким образом, напряжение на конце линии $u_н$ и ток в нагрузке $i_н$ независимо от характера нагрузки связаны с напряжением падающей волны $u_п$ уравнением (12.23). Последнему соответствует схема с сосредоточенными параметрами, изображенная на рис. 12.2, *б*. В ней к источнику ЭДС напряжением $2u_п$ подключают последовательно соединенные $Z_в$ и $Z_н$.

Расчет переходного процесса в схеме с сосредоточенными параметрами (рис. 12.2, *б*) выполняют любым из методов, рассмотренных в гл. 8. Расчет дает возможность определить $i_н = f(t)$ и $u_н = f(t)$. После того как эти зависимости найдены, можно определить характер изменения во времени напряжения и тока отраженной волны: $u_о = f(t)$ и $i_о = f(t)$. Действительно, из уравнений (12.21) и (12.20а) следует, что

$$u_о(t) = u_н(t) - u_п(t);$$

$$i_о(t) = -u_о(t)/Z_в;$$

$$Z_в = \sqrt{L_о/C_о}. \qquad (12.21а)$$

Рассмотрим несколько примеров, иллюстрирующих применение схемы замещения.

**§ 12.7. Подключение разомкнутой на конце линии к источнику постоянного напряжения.** В линии без потерь, так же как и в колебательном контуре без потерь, при подключении к источнику постоянной ЭДС возникают незатухающие колебания. Период колебаний состоит из четырех частей или стадий (рис. 12.3, *а* — *г*) одинаковой продолжительности $l/v$, где $l$ — длина линии, $v$ — скорость распространения волны. Для рассмотрения этих стадий воспользуемся двумя различными схемами замещения. Первая схема (рис. 12.4, *а*) соответствует разомкнутому концу линии ($Z_н = \infty$), когда к нему подходит падающая от начала линии волна. Вторая схема (рис. 12.4, *б*) соответствует моменту времени, когда отраженная волна подошла к началу линии, где включен генератор постоянного напряжения, внутреннее сопротивление которого полагаем равным нулю ($Z_н = 0$).

Рассмотрим каждую из стадий процесса в отдельности.



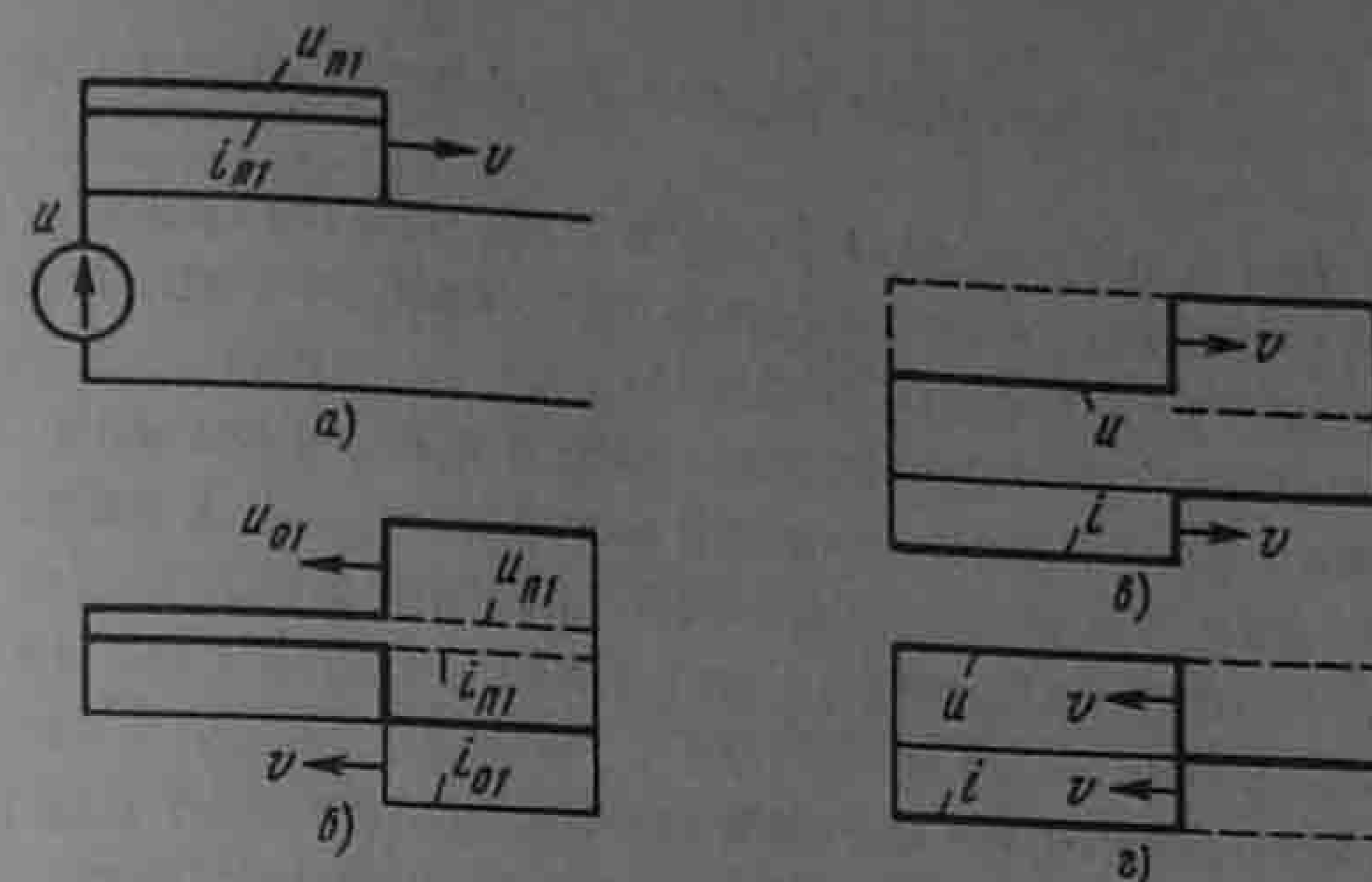



Рис. 12.3

*Первая стадия.* От генератора к концу линии распространяются волна напряжения $u_{п1} = u$ и волна тока $i_{п1} = u_{п1}/Z_В = i$ (см. рис. 12.3, *а*).

*Вторая стадия* заключается в том, что от конца линии к ее началу движется отраженная волна ($u_{о1}$, $i_{о1}$). Для определения $u_{о1}$ и служит схема рис. 12.4, *а*. Она составлена в соответствии с общим методом, изложенным в § 12.6. В ней к напряжению $2u_{п1} = 2u$ подключаются волновое сопротивление линии $Z_в$ и сопротивление нагрузки $Z_н = \infty$ (линия на конце разомкнута!).

Согласно рис. 12.4, *а* напряжение на нагрузке равно удвоенному напряжению падающей волны. Действительно, при $Z_н \to \infty$

$$u_{Z_н} = 2u_{п1}\frac{Z_н}{Z_н + Z_в} = 2u_{п1} = 2u.$$

В соответствии с формулой (12.21а) отраженная волна напряжения

$$u_{о1} = u_н - u_{п1} = 2u_{п1} - n_{п1} = u;$$

в соответствии с формулой (12.20а) отраженная волна тока

$$i_{о1} = -u_{о1}/Z_в = -i_{п1} = -i.$$

Таким образом, в течение второй стадии процесса от конца линии к началу продвигается отраженная волна $u_{о1} = u$, $i_{о1} = -i$. Результирующее состояние на линии определяется наложением первой падающей волны ($u_{п1}$, $i_{п1}$) и первой отраженной волны ($u_{о1}$, $i_{о1}$). На рис. 12.3, *б* дана эпюра распределения напряжения и тока по линии для некоторого момента времени во второй стадии. (В этой стадии для участков линии, на которые прошли отраженные волны,

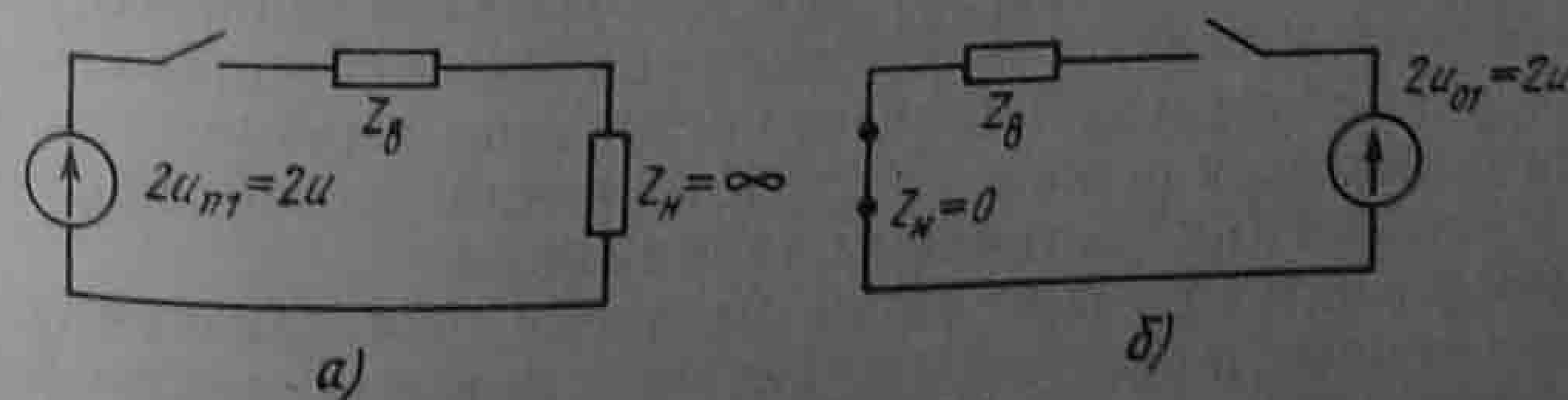



Рис. 12.4

результирующее напряжение равно $2u$, а результирующий ток равен нулю.)

*Третья стадия* процесса состоит в том, что волна $u_{о1}$, $i_{о1}$, дойдя до начала линии, отразится от генератора, как от короткозамкнутого конца линии (внутреннее сопротивление генератора принято равным нулю), и вызовет распространение в направлении от генератора к концу линии второй падающей волны ($u_{п2}$, $i_{п2}$), являющейся, по существу, отраженной волной по отношению к волне ($u_{о1}$, $i_{о1}$).

Для определения характера отражения волн от начала линии используем схему рис. 12.4, *б*. В ней $Z_н=0$, $2u_{о1}=2u$. Так как нагрузка $Z_н=0$, то и напряжение на ней равно нулю. Но напряжение на нагрузке в соответствии с (12.21) равно сумме напряжения падающей волны (в данном случае $u_{о1}=u$) и напряжения отраженной от начала линии волны, распространяющейся от генератора к концу линии и потому названной второй падающей волной. Следовательно, $0=u+u_{п2}$. Отсюда

$$u_{п2}=-u;\ i_{п2}=u_{п2}/Z_в=-i.$$

Результирующее состояние на линии во время третьей стадии процесса изображено на рис. 12.3, *в*. Оно получено в результате наложения трех волн: первой падающей волны ($u_{п1}$, $i_{п1}$), первой отраженной от конца волны ($u_{о1}$, $i_{о1}$) и второй падающей волны ($u_{п2}$, $i_{п2}$).

*Четвертая стадия* процесса заключается в том, что на три предыдущие волны накладывается четвертая волна, представляющая собой отражение от разомкнутого конца линии второй падающей волны.

Отражение второй падающей волны от конца линии произойдет в соответствии со схемой замещения рис. 12.4, *а*, только вместо $2u_{п1}=2u$ в схеме будет напряжение $2u_{п2}=-2u$.

Вторая отраженная волна имеет $u_{о2}=-u$, $i_{о2}=i$. Результирующее состояние на линии во время четвертой стадии (рис. 12.3, *г*) есть результат наложения четырех волн:

$$u_{п1}+u_{о1}+u_{п2}+u_{о2}=u+u-u-u=0;$$

$$i_{п1}+i_{о1}+i_{п2}+i_{о2}=i-i-i+i=0.$$

Таким образом, к концу четвертой стадии напряжение и ток вдоль всей линии равны нулю — линия приобретает такое же состояние, какое у нее было к началу первой стадии. Затем процесс повторяется до бесконечности, так как $R_0$ и $G_0$ были приняты равными нулю. В действительности благодаря наличию сопротивления $R_0$ и утечки $G_0$ колебательный процесс постепенно затухает и вдоль линии устанавливается режим, соответствующий установившемуся процессу в линии при постоянном напряжении.

В рассмотренном примере линия на конце была разомкнута, поэтому отраженные волны имели такую же прямоугольную форму, как и падающие.



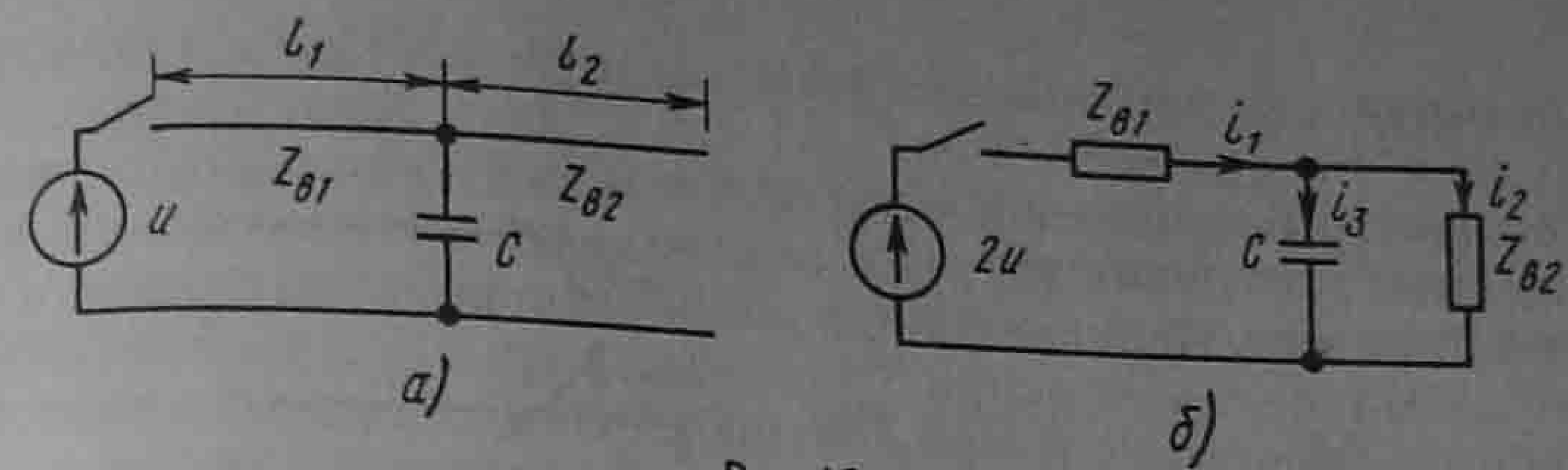



Рис. 12.5

Отраженные волны будут иметь форму, в общем случае не похожую на форму падающей волны, если в состав нагрузки на конце линии входят емкости и (или) индуктивности, а также в том случае, если в месте перехода с одной линии на другую есть сосредоточенные индуктивности и (или) емкости.

**§ 12.8. Переходный процесс при подключении источника постоянного напряжения к двум последовательно соединенным линиям при наличии емкости в месте стыка линий.** Пусть первая линия имеет длину $l_1$ и волновое сопротивление $Z_{в1}$, вторая линия — длину $l_2$ и $Z_{в2}\neq Z_{в1}$. Напряжение источника ЭДС равно $u$ (рис. 12.5, *а*). В месте стыка линий есть сосредоточенная емкость $C$.

Требуется определить форму волны, проникающей во вторую линию, характер изменения тока через сосредоточенную емкость, а также результирующее распределение напряжения и тока вдоль первой линии при движении по ней отраженной от стыка линий волны.

Переходный процесс начинается с того, что от генератора по первой линии распространяется падающая волна с прямоугольным фронтом $u_{п1}=u$ и $i_{п1}=u/Z_{в1}$.

Для определения характера изменения токов и напряжений, когда падающая волна дойдет до стыка линий, обратимся к схеме замещения с сосредоточенными параметрами рис. 12.5, *б*. В этой схеме нагрузка образована двумя параллельными ветвями — емкостью $C$ и волновым сопротивлением второй линии $Z_{в2}$.

Две параллельные ветви появились в схеме замещения потому, что в исходной схеме рис. 12.5, *а* падающая волна, дойдя до места стыка линий, встречает два пути для своего дальнейшего распространения: первый путь — через емкость $C$, второй путь — по второй линии с волновым сопротивлением $Z_{в2}$.

Расчет переходного процесса в схеме рис. 12.5, *б* дает:

$$i_2=\frac{2u}{Z_{в1}+Z_{в2}}(1-e^{pt}); \quad (а)$$

$$i_3=\frac{2u}{Z_{в1}}e^{pt}; \quad (б)$$

$$i_1=\frac{2u}{Z_{в1}+Z_{в2}}\left(1+\frac{Z_{в2}}{Z_{в1}}e^{pt}\right); \quad (в)$$

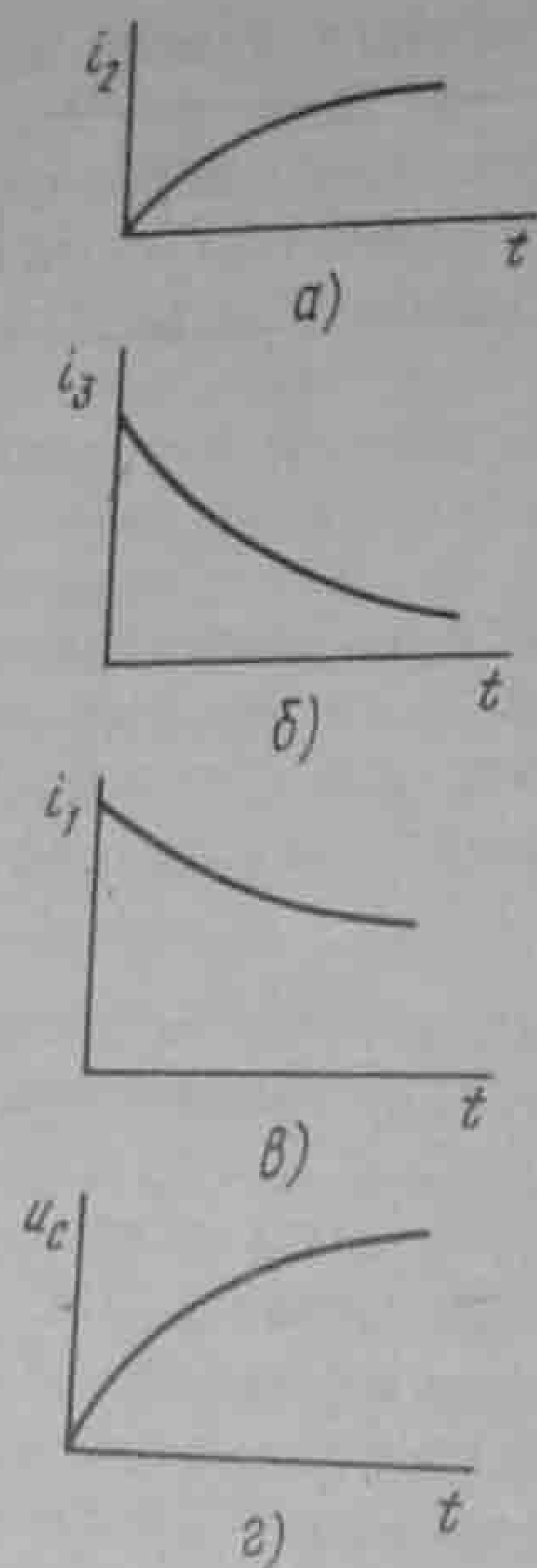



Рис. 12.6

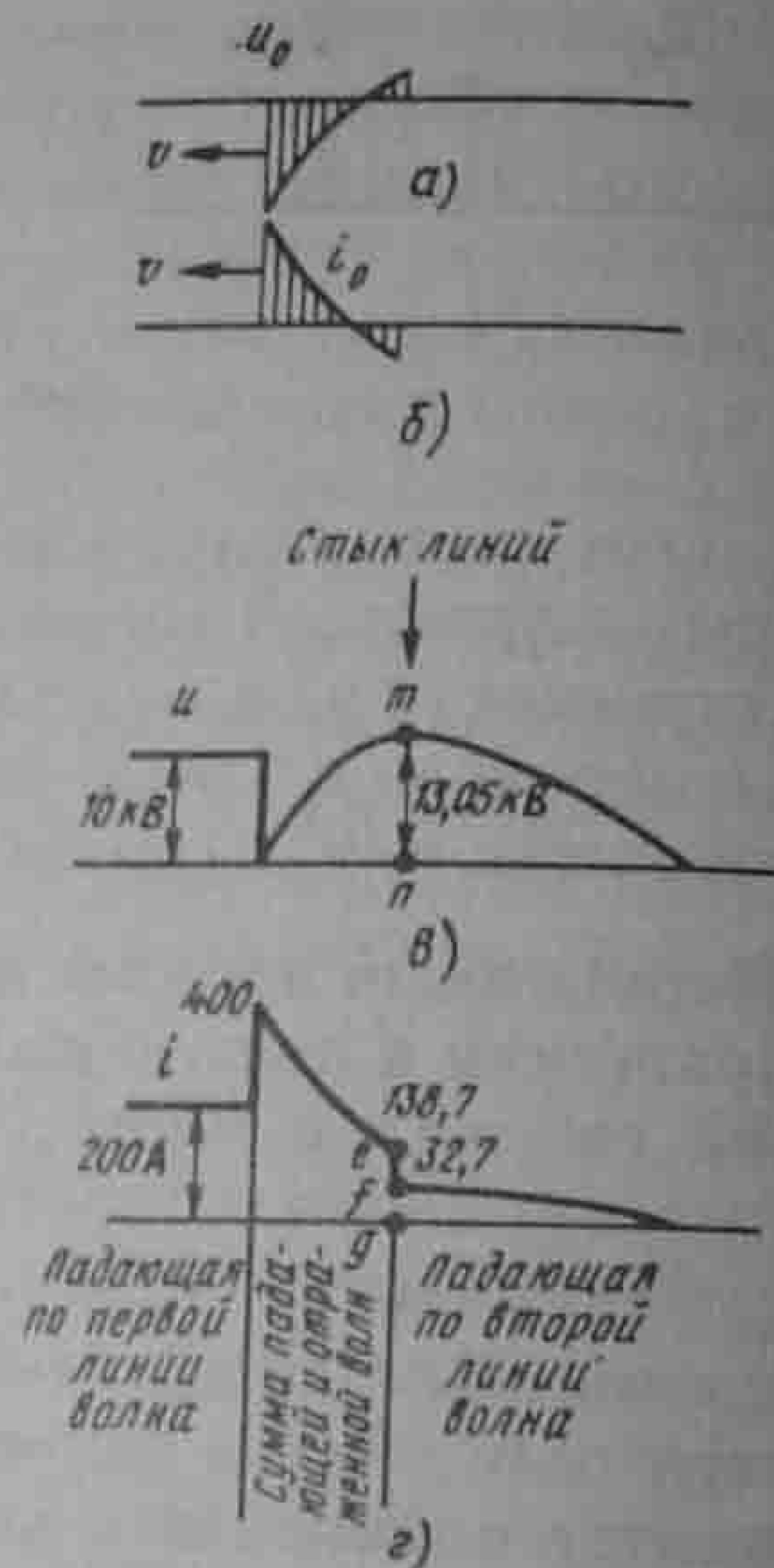



Рис. 12.7

$$u_C = u_{Zв2} = \frac{2uZ_{в2}}{Z_{в1}+Z_{в2}}(1-e^{pt}); \qquad (г)$$

$$p = -\frac{Z_{в1}+Z_{в2}}{Z_{в1}\,Z_{в2}\,C}. \qquad (д)$$

Характер изменения $i_2$, $i_3$, $i_1$ и $u_C$ в функции от времени изображен на рис. 12.6, *а — г*. В первый момент после подхода волны к месту стыка линий напряжение падает до нуля, так как незаряженный конденсатор для этого момента времени представляет собой как бы короткое замыкание.

Начальное значение тока через конденсатор равно $2u/Z_{в1}$. Затем конденсатор заряжается, напряжение на нем растет, а ток через него уменьшается. Ток $i_2$ в схеме замещения представляет собой ток электромагнитной волны, распространяющейся по второй линии; напряжение волны, распространяющейся по второй линии, равно $i_2Z_{в2}$.

Для получения отраженной волны напряжения, распространяющейся по первой линии в направлении от стыка линий к генератору, из ординат кривой рис. 12.6, *г* нужно вычесть соответствующие ординаты напряжения падающей волны и затем перенести полученную кривую на линию, зная скорость отраженной волны.



На рис. 12.7, *а, б* изображены соответственно отраженные волны напряжения и тока.

Эпюра распределения напряжения и тока вдоль первой и второй линий для момента времени, когда отраженная от стыка волна дошла до середины первой линии, представлена соответственно на рис. 12.7, *в, г*.

Перепад тока *ef* в кривой рис. 12.7, *г* равен току через конденсатор для данного момента времени. По второй линии волна продвинулась на расстояние, вдвое большее, чем прошла отраженная волна по первой линии. Это объясняется тем, что первая линия кабельная, а вторая — воздушная. Скорость продвижения волны по воздушной линии 300 000 км/с, а по кабельной — около 150 000 км/с (формула для скорости $v$ движения волны по линии и входящие в нее $L_0$ и $C_0$ приведены в § 11.10).

**Пример 130.** В схеме рис. 12.5, *а* $Z_{в1}=50$ Ом; $Z_{в2}=400$ Ом; $l_1=100$ км; $C=5{,}62$ мкФ; $l_1=60$ км; $u=10$ кВ. Первая линия кабельная, вторая воздушная. Построить эпюры распределения волн напряжения и тока вдоль линий для момента времени, когда распространяющаяся по второй линии волна дойдет до конца второй линии.

Р е ш е н и е. По формуле (д), $p = -\dfrac{50+400}{50\cdot 400\cdot 5{,}62\cdot 10^{-6}} = -4000\ с^{-1}$.

Ток падающей волны по первой линии $i_п=u/Z_{в1}=10^4/50=200$ А.

По формуле (а), $i_2=44{,}5(1-e^{-4000t})$ А. График изображен на рис. 12.6, *а*.

По формуле (б), $i_3 = 400e^{-4000t}$ А. График $i_3=f(t)$ представлен на рис. 12.6, *б*.

По формуле (в), $i_1 = 44{,}5(1+8e^{-4000t})$ А. График тока изображен на рис. 12.6, *в*.

По формуле (г), $u_C = u_{Zв2} = 17\,750(1-e^{-4000t})$ В. Кривая изображена на рис. 12.6, *г*.

По условию, падающая по второй (воздушной) линии волна должна дойти до конца второй линии. Расстояние $l_2=100$ км она пройдет за время $t=l_2/v=100/300\,000=1/3000$ с.

За это время отраженная от стыка волна пройдет по первой кабельной линии расстояние, в два раза меньшее.

Графики распределения $u$ и $i$ вдоль линии изображены на рис. 12.7, *а, б*.

Перепад *ef* на рис. 12.7, *б* равен току $i_3$ при $t=1/3000$ с; $i_3 = 400e^{-4/3}=106$ А.

Отрезок *gf* равен току $i_2$ при $t=1/3000$ с: $i_2=44{,}5(1-e^{-4/3})=32{,}7$ А.

Отрезок *mn* на рис. 12.7, *а* равен напряжению $u_C$ при $t=1/3000$ с: $u_C=13{,}05$ кВ.

В рассмотренном примере электрическая цепь, содержащая линию с распределенными параметрами, подключалась к источнику постоянного напряжения.

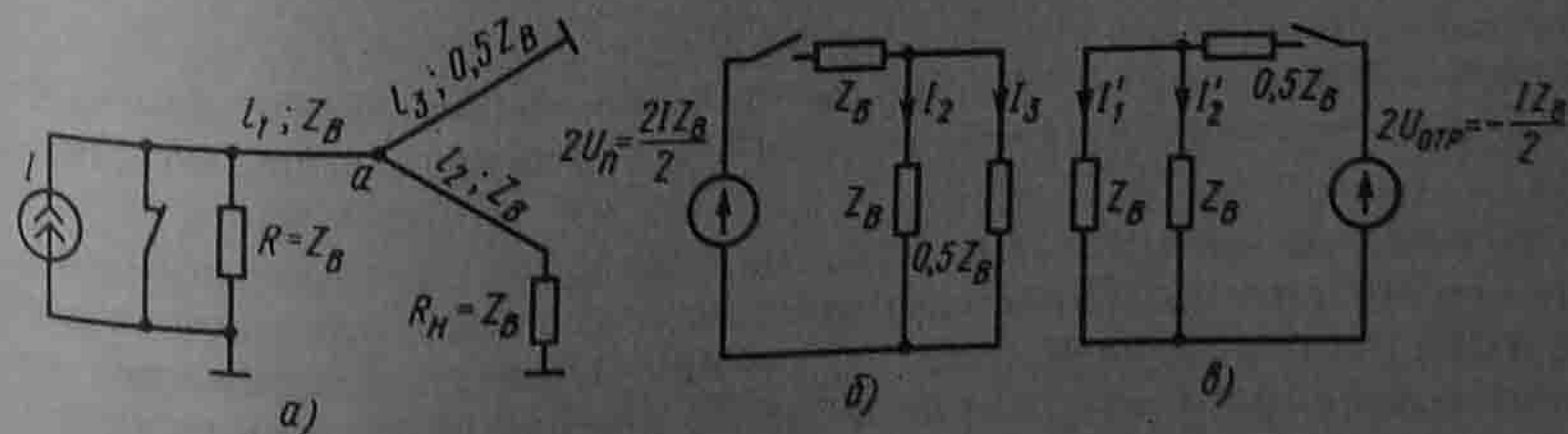



Рис. 12.8

Однако часто встречаются цепи, в которых ЭДС источника изменяется по синусоидальному закону во времени. Если длина линии с распределенными параметрами и частота синусоидальной ЭДС таковы, что время пробега волны по линии ($t=l/v$) много меньше периода переменного тока $T$, например составляет величину порядка $(\frac{1}{30}\div\frac{1}{50})\,T$, то при исследовании первых стадий переходного процесса в первом грубом приближении можно принять, что линия подключается к источнику постоянной ЭДС, которая равна амплитуде синусоидальной ЭДС (расчет на наиболее тяжелый случай). Если же время пробега волны по линии составляет большую, чем $(\frac{1}{50}\div\frac{1}{30})$, часть периода, то при расчетах учитывают изменение ЭДС источника при перемещении падающей волны по линии.

*При отключении нагрузки* или ее части в линиях также возникают переходные процессы. Расчет их производят на основании принципа наложения, включая в размыкаемую ветвь источник тока, который дает ток, равный и противоположно направленный току в размыкаемой ветви.

Результирующие волны тока и напряжения на всех участках линии находят наложением на волны тока и напряжения, которые были на линии до отключения ветви, волн тока и напряжения, продвигающихся от места размыкания в остальные участки линии.

*При подключении в каком-либо месте линии новой ветви* токи и напряжения в этой ветви находят методом эквивалентного генератора, а токи в остальных участках линии — методом наложения.

**§ 12.9. Линия задержки**. Под *линией задержки*, применяемой в импульсной технике, понимают устройство, которое включают между источником сигнала и нагрузкой, служащее для задержки поступления сигнала в нагрузку на некоторое заданное время $t_\text{з}$. В простейшем случае (при малом $t_\text{з}$) линию задержки выполняют в виде куска коаксиального кабеля длиной $l$. Он создает задержку $t_\text{з}=l/v_\text{ф}$. Если хотят получить относительно большое $t_\text{з}$, то используют цепочку из каскадно соединенных одинаковых фильтров низкой частоты (см. рис. 5.1, *а*), выбирая параметры $L$ и $C$ фильтров так, чтобы полоса частот сигнала $0$ — $\omega_c$ находилась в полосе прозрачности фильтра и чтобы $\omega_c<\omega_2$, где $\omega_2=\sqrt{2/LC}$ — частота среза фильтра. Параметры фильтра согласуют с нагрузкой $R_\text{н}=\sqrt{2L/C}$. Время задержки $t_\text{з}\approx n(\mathrm{d}b/\mathrm{d}\omega)_{\omega=0}=n\sqrt{2LC}$. Содержание, вкладываемое в термин "время задержки" (ВЗ) линии и четырехполюсника, различно. ВЗ линии — это время прохождения линии электромагнитной волной. ВЗ, оказываемое четырехполюсником, — это время, отсчитываемое от момента поступления сигнала на вход четырехполюсника до момента, когда напряжение на выходе его нарастает от нуля до некоторого определенного значения, скажем до 0,5 от амплитудного при относительно небольшом



изменении формы сигнала по сравнению с входным. Физически это время обусловлено переходным процессом в самом четырехполюснике и нагрузке. Выведем записанную формулу для $t_\text{з}$.

В § 9.4 показано, что передаточная функция четырехполюсника $K(j\omega)=\frac{U_2(j\omega)}{U_1(j\omega)}=|K(j\omega)|\,e^{j\varphi(\omega)}$, пропускающего сигнал без искажения, но с задержкой $t_0=t'_\text{з}$ во времени, должна обладать двумя свойствами: 1) модуль $|K(j\omega)|=\text{const}$ (в частности, равен единице); 2) аргумент $\varphi(\omega)=-\omega t'_\text{з}$.

Применительно к фильтру $K(j\omega)=1/e^g=1/(e^a e^{jb})$. Сопоставление характеристик фильтра с характеристиками четырехполюсника для зоны прозрачности дает

$$|K(j\omega)|=1/e^a=1,\quad b=-\varphi(\omega)=\omega t'_\text{з}.$$

Для фильтра НЧ (см. рис. 5.1, *а*) в зоне прозрачности

$$b=\arccos A=\arccos(1-\omega^2LC)$$

нелинейно зависит от $\omega$. Для определения времени задержки приближенно заменим эту нелинейную зависимость прямой с угловым коэффициентом, равным $\left(\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\omega}\right)_{\omega\to 0}$, т. е. положим $b=\omega\left(\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\omega}\right)_{\omega\to 0}$.

Тогда время задержки, создаваемое одним фильтром,

$$t'_\text{з}=\left(\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\omega}\right)_{\omega\to 0}=\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}(1-\omega^2LC)}\frac{\mathrm{d}(1-\omega^2LC)}{\mathrm{d}\omega}=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{1-(1-\omega^2LC)^2}}(-2\omega LC)\approx-\frac{1}{\omega\sqrt{2LC}}(-2\omega LC)=\sqrt{2LC}.$$

Если каскадно соединены $n$ фильтров НЧ, то время задержки в $n$ раз больше: $t_\text{з}=n\sqrt{2LC}$.

Если сигнал, проходящий через четырехполюсник, представляет собой короткий импульс, то его частотный спектр весьма широк и четырехполюсник в отличие от линии с распределенными параметрами не в состоянии пропустить без затухания колебания всех частот. В этом случае можно только условно говорить о времени задержки, понимая под ним усредненную производную $\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\omega}$, подсчитанную для основной части частотного спектра.

**§ 12.10. Использование линий для формирования кратковременных импульсов.** На рис. 12.8, *а* изображена схема, позволяющая формировать прямоугольные импульсы тока в нагрузке $R_\text{н}$. В схеме имеется источник постоянного тока $I$ и три линии. При размыкании ключа от источника тока $I$ по первой линии длиной $l_1$ с волновым сопротивлением $Z_\text{в}$ распространяется прямоугольная падающая волна тока $I/2$ и волна напряжения $IZ_\text{в}/2$. Дойдя до узла $a$, волна частично пройдет во вторую и третью линии и частично отразится. Для определения волн, проходящих во вторую и третью линии, служит схема замещения на рис. 12.8, *б*. Из нее следует, что $I_2=I/4$ и $I_3=I/2$.

По второй линии распространяется волна $U_2=I_2Z_\text{в}$, по третьей $U_3=I_3 0{,}5Z_\text{в}$. Волна $U_2$, дойдя до конца второй линии, где включена нагрузка $R_\text{н}=Z_\text{в}$, поглощается в ней без отражения.

Волна $U_3$, дойдя до короткозамкнутого конца третьей линии, отразится от него с переменой знака у напряжения. Отраженная от конца третьей линии волна напряжения — $I_0 \cdot 0{,}5Z_в = -IZ_в/2$, дойдя до узла $a$, вызовет токи $I'_2 = I'_1 = -I/4$ в первой и второй линиях в соответствии со схемой замещения (рис. 12.8, *в*). Волна тока $I'_1$ поглощается без отражения в сопротивлении $Z_в$, шунтирующем источник тока. Как только волна тока $I'_2$ дойдет до конца второй линии, импульс тока в нагрузке $R_н$ прекратится, поскольку токи $I_2$ и $I'_2$ равны по величине и противоположны по знаку. Прямоугольный импульс тока через нагрузку появится через время $(l_1+l_2)/v$ и протекает в течение времени $2l_3/v$, равного удвоенному времени движения волны по линии длиной $l_3$.

До сих пор в гл. 12 рассматривали переходные процессы в линии, используя метод наложения падающих и отраженных волн, продвигающихся по линиям без затухания (так как было принято, что $R_0 = G_0 = 0$). Теперь рассмотрим, как рассчитывают переходные процессы с учетом $R_0$ и $G_0$.

**§ 12.11. Исходные положения по применению операторного метода к расчету переходных процессов в линиях.** В линии с распределенными параметрами ток $i$ и напряжение $u$ являются функциями времени и расстояния от начала линии, т. е. $i = i(x, t)$; $u = u(x, t)$. Току $i(x, t)$ соответствует операторное изображение $I(x, p)$, а напряжению $u(x, t)$ — операторное изображение $I(x, p)$. Кроме того, имеют место соотношения $L_0(\partial/\partial t)\, i(x,t) \doteq L_0 p I(x, p)$; $G_0(\partial/\partial t) u(x, t) \doteq G_0 p U(x, p)$.

Имея это в виду, запишем уравнения (11.1) и (11.4) в операторной форме:

$$-\frac{dU(x, p)}{dx} = Z_0 I(x, p); \qquad (12.24)$$

$$-\frac{dI(x, p)}{dx} = Y_0 U(x, p), \qquad (12.25)$$

где

$$Z_0 = R_0 + pL_0; \qquad (12.26)$$

$$Y_0 = G_0 + pC_0. \qquad (12.27)$$

Уравнения (12.24) и (12.27) отличаются от уравнений (11.7) и (11.8) тем, что $j\omega$ заменено на комплексную частоту $p$. Из (12.24) и (12.25) следует, что

$$\frac{d^2U(x, p)}{dx^2} = Z_0 Y_0 U(x, p); \qquad (12.28)$$

$$\frac{d^2I(x, p)}{dx^2} = Z_0 Y_0 I(x, p). \qquad (12.29)$$

Решение (12.28) и (12.29):

$$U(x, p) = A_1 e^{\gamma x} + A_2 e^{-\gamma x}; \qquad (12.30)$$

$$I(x, p) = -\frac{A_1}{Z_в} e^{\gamma x} + \frac{A_2}{Z_в} e^{-\gamma x}, \qquad (12.31)$$



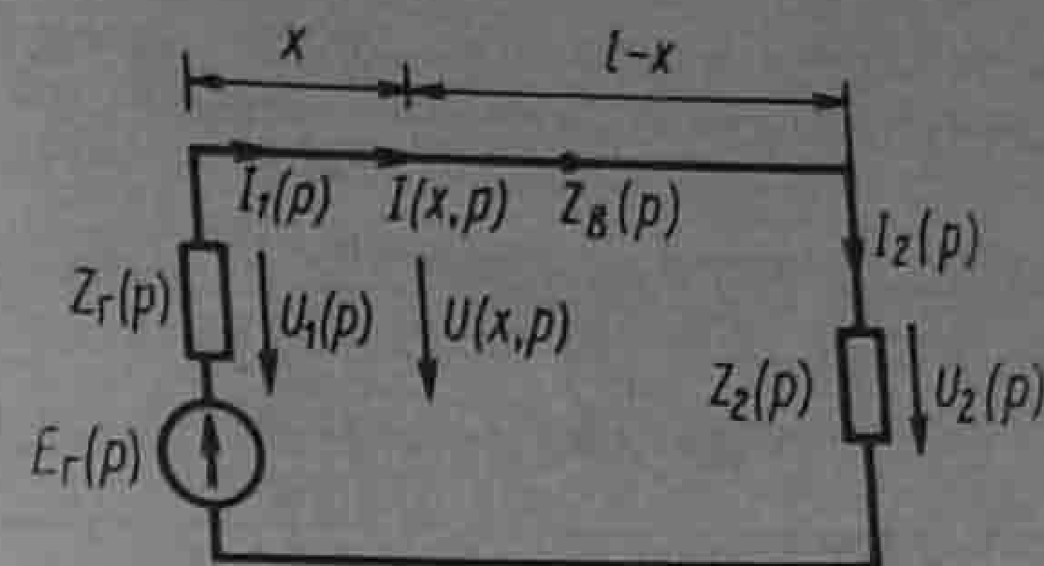



Рис. 12.9

где $A_1$ и $A_2$ — постоянные интегрирования, зависящие от граничных условий. Постоянная распространения $\gamma$ и волновое сопротивление являются функциями комплексной частоты $p$:

$$\gamma = \sqrt{(R_0 + pL_0)(G_0 + pC_0)}; \qquad (12.32)$$

$$Z_в = \sqrt{\frac{R_0 + pL_0}{G_0 + pC_0}}. \qquad (12.33)$$

Если линия бесконечно протяженная, то отраженная волна отсутствует и $A_1 = 0$; $A_2 = U_1(0, p) = U_1(p)$, где $U_1(p)$ — операторное изображение напряжения на входе линии (при $x = 0$). В этом случае

$$U(x, p) = U_1(p) e^{-\gamma x}; \qquad (12.34)$$

$$I(x, p) = \frac{U_1(p)}{Z_в} e^{-\gamma x}. \qquad (12.35)$$

На рис. 12.9 изображена линия длиной $l$, нагруженная на $Z_н(p)$. Напряжение в начале линии $U_1(p)$, в конце линии $U_2(p)$. Напряжение генератора $U_г(p)$. Внутреннее сопротивление генератора $Z_г(p)$; $x$ — расстояние текущей точки на линии от начала линии. Операторное изображение напряжения и тока в точке $x$ запишем аналогично уравнениям (11.35) и (11.36), заменив в них $y$ на $l - x$:

$$U(x, p) = U_2(p) \operatorname{ch} \gamma (l-x) + I_2(p) Z_в \operatorname{sh} \gamma (l-x); \qquad (12.36\text{ а})$$

$$I(x, p) = \frac{U_2(p)}{Z_в} \operatorname{sh} \gamma (l-x) + I_2(p) \operatorname{ch} \gamma (l-x). \qquad (12.36\text{ б})$$

Ток в нагрузке $I_2(p) = \dfrac{U_2(p)}{Z_н}$. Положим $x = 0$ и из (12.36а — б) получим

$$\left.\begin{aligned} U_1(p) &= U_2(p)\left[\operatorname{ch}\gamma l + \frac{Z_в}{Z_2}\operatorname{sh}\gamma l\right]; \\ I_1(p) &= U_2(p)\left[\frac{\operatorname{ch}\gamma l}{Z_2} + \frac{\operatorname{sh}\gamma l}{Z_в}\right]. \end{aligned}\right\} \qquad (12.37)$$

Напряжение генератора

$$U_{\text{г}}(p)=U_1(p)+I_1(p)Z_{\text{г}}=U_2(p)\left[\left(1+\frac{Z_{\text{г}}}{Z_{\text{в}}}\right)\text{ch}\gamma l+\left(\frac{Z_{\text{в}}}{Z_2}+\frac{Z_{\text{г}}}{Z_{\text{в}}}\right)\text{sh}\gamma l\right]. \qquad (12.38)$$

Из (12.38) определим $U_2(p)$ и затем $I_2(p)$ и подставим их в (12.36):

$$U(x,\ p)=\frac{U_{\text{г}}(p)\left[\text{ch}\gamma\,(l-x)+\dfrac{Z_{\text{в}}}{Z_2}\text{sh}\gamma(l-x)\right]}{\left(1+\dfrac{Z_{\text{г}}}{Z_2}\right)\text{ch}\gamma l+\left(\dfrac{Z_{\text{в}}}{Z_2}+\dfrac{Z_{\text{г}}}{Z_{\text{в}}}\right)\text{sh}\gamma l}; \qquad (12.39)$$

$$I(x,\ p)=\frac{U_{\text{г}}(p)\left[\text{ch}\gamma(l-x)+\dfrac{Z_2}{Z_{\text{в}}}\text{sh}\gamma\,(l-x)\right]}{Z_{\text{в}}\left[1+\dfrac{Z_{\text{г}}}{Z_2}\right]\text{ch}\gamma l+\left(\dfrac{Z_{\text{в}}}{Z_2}+\dfrac{Z_{\text{г}}}{Z_{\text{в}}}\right)\text{sh}\gamma l}. \qquad (12.40)$$

Обозначим $a=\dfrac{Z_{\text{в}}(p)}{Z_{\text{н}}(p)}$; $b=\dfrac{Z_{\text{г}}(p)}{Z_{\text{н}}(p)}$; $c=\dfrac{Z_{\text{г}}(p)}{Z_{\text{в}}(p)}$; $m=\dfrac{Z_{\text{г}}(p)}{Z_{\text{в}}(p)}$

и введем эти обозначения в (12.39) и (12.40). Получим

$$U(x,\ p)=U_{\text{г}}(p)\frac{(1+a)e^{\gamma(l-x)}+(1-a)e^{-\gamma(l-x)}}{(1+a+b+c)e^{\gamma l}+(1+b-a-c)e^{-\gamma l}}; \qquad (12.39а)$$

$$I(x,\ p)=\frac{U_{\text{г}}(p)}{Z_{\text{в}}(p)}\,\frac{(1+a)e^{\gamma(l-x)}+(a-1)e^{-\gamma(l+x)}}{(1+a+b+c)e^{\gamma l}+(1+b-a-c)e^{-\gamma l}}. \qquad (12.40а)$$

Поделив числитель на знаменатель формулы (12.39а), получим изображения падающих и отраженных волн напряжения в точке, удаленной на расстояние $x$ от начала линии:

$$U(x,\ p)=U_{\text{г}}(p)\,[F_1(p)\,e^{-\gamma x}+F_2(p)\,e^{-\gamma(2l-x)}-$$
$$-F_3(p)\,e^{-\gamma(2l+x)}-F_4(p)\,e^{-\gamma(4l-x)}+$$
$$+F_5(p)\,e^{-\gamma(4l+x)}+F_6(p)\,e^{-\gamma(6l-x)}-\ldots]. \qquad (12.39б)$$

Аналогично, для тока:

$$I(x,\ p)=\frac{U_{\text{г}}}{Z_{\text{в}}(p)}[F_1(p)\,e^{-\gamma x}-F_2(p)\,e^{-\gamma(2l-x)}-$$
$$-F_3(p)\,e^{-\gamma(2l+x)}+F_4(p)\,e^{-\gamma(4l-x)}+F_5(p)\,e^{-\gamma(4l+x)}-F_6(p)\,e^{-\gamma(6l-x)}-\ldots]. \qquad (12.40б)$$

Здесь

$$F_1(p)=\frac{1+a}{1+a+b+c};\quad F_2(p)=\frac{1-a}{1+a+b+c};\quad F_3(p)=\frac{(1+a)\,(1+b-a-c)}{(1+b+a+c)^2};$$

$$F_4(p)=\frac{(1-a)\,(1+b-a-c)}{(1+b+a+c)^2};\quad F_5(p)=\frac{(1+a)\,(1+b-a-c)^2}{(1+b+a+c)^3};$$



$$F_6(p)=\frac{(1-a)\,(1+b-a-c)^2}{(1+b+a+c)^3}.$$

Нахождение функций времени, соответствующих уравнениям (12.39б) и (12.40б) с учетом того, что $U_1$, $\gamma$, $Z_{\text{г}}$, $Z_{\text{в}}$ и $Z_2$ являются функциями $p$, в общем случае оказывается довольно громоздким делом. Поэтому ограничимся рассмотрением лишь нескольких задач.

## § 12.12. Подключение линии без потерь конечной длины $l$, разомкнутой на конце, к источнику постоянного напряжения.

В этом случае $R_0=G_0=0$ и в соответствии с (12.32) и (12.33)

$$\gamma=p\sqrt{L_0C_0}=p\ /v;\ \ Z_{\text{в}}=\sqrt{L_0\ /C_0};\ \ U_1(p)=U\ /p.$$

Обозначим время прохождения волной расстояния $l$ через $\tau_0(\tau_0=l\ /v)$ и время $x/v$ через $\tau$. Тогда из (12.39) следует, что

$$U(x,\ p)=\frac{U}{p}\,\frac{\text{ch}(\tau_0-\tau)}{\text{ch}p\tau_0}=\frac{U}{p}\,\frac{e^{p(\tau_0-\tau)}+e^{-p(\tau_0-\tau)}}{e^{p\tau_0}+e^{-p\tau}}.$$

Поделив почленно числитель на знаменатель, получим

$$U(x,\ p)=\frac{U}{p}[e^{-p\tau}+e^{-p(2\tau_0-\tau)}-e^{-p(2\tau_0+\tau)}-$$
$$-e^{-p(4\tau_0-\tau)}+e^{-p(4\tau_0+\tau)}+\ldots]. \qquad (12.41)$$

В соответствии с теоремой смещения в области оригиналов (см. § 8.40) от (12.41) перейдем к функции времени

$$u(x,t)=U\{1(t-\tau)+1[t-(2\tau_0-\tau)]-$$
$$-1[t-(2\tau_0+\tau)]+1[t-(4\tau_0+\tau)]-\ldots\}. \qquad (12.42)$$

Таким образом, решение для напряжения в произвольной точке записано как сумма падающих и отраженных волн напряжения (что совпадает с решением, полученным в § 12.7 волновым методом), незатухающих по амплитуде. Каждое слагаемое решения вступает в действие, когда аргумент соответствующей единичной функции становится $\geqslant 0$.

## § 12.13. Подключение линии без искажения конечной длины $l$, разомкнутой на конце, к источнику постоянного напряжения $U$.

В этом случае $R_0/L_0=G_0/C_0=\delta$, $\gamma=(p+\delta)\sqrt{L_0C_0}=(p+\delta)/v$; $Z_{\text{в}}=\sqrt{L_0/C_0}$ Из (12.39) следует, что

$$U(x,\ p)=\frac{U}{p}\cdot\frac{\text{ch}\left\{(p+\delta)\sqrt{L_0C_0}(l-x)\right\}}{\text{ch}\left\{(p+\delta)\sqrt{L_0C_0}\,l\right\}}=\frac{U}{p}\cdot\frac{\text{ch}\,(p+\delta)\,(\tau_0-\tau)}{\text{ch}(p+\delta)\tau_0}=$$
$$=\frac{U}{p}\cdot\frac{e^{(p+\delta)(\tau_0-\tau)}+e^{-(p+\delta)(\tau_0-\tau)}}{e^{(p+\delta)\tau_0}+e^{-(p+\delta)\tau_0}}. \qquad (12.43)$$

Поделим почленно числитель на знаменатель и перейдем к функции времени:

$$u(x,\ t)=U\{e^{-\delta\tau}1(t-\tau)+e^{-(2\tau_0-\tau)\delta}1\,[(t-(2\tau_0-\tau)]-$$
$$-e^{-\delta(2\tau_0+\tau)}1[t-(2\tau_0+\tau)]-e^{-\delta(4\tau_0-\tau)}1[t-(4\tau_0-\tau)]+\ldots\}. \quad (12.44)$$

Падающие и отраженные волны теперь затухают по амплитуде по экспоненциальному закону в зависимости от пройденных ими расстояний. Установившееся значение напряжения в конце линии при $t\to\infty$ в соответствии с п. 5 § 8.40:

$$\lim_{p\to 0} pU(l,\ p)=\frac{U\mathrm{ch}0}{\mathrm{ch}(\delta\sqrt{L_0C_0}\,l)}=\frac{U}{\mathrm{ch}\,lR_0\sqrt{C_0/L_0}}. \quad (12.45)$$

**§ 12.14. Подключение бесконечно протяженного кабеля без индуктивности и утечки к источнику постоянного напряжения $U$.** Полагаем, что прямой и обратный провода кабеля близко расположены друг к другу (поэтому $L_0\approx 0$) и его изоляция между проводами очень хорошая ($G_0\approx 0$). Тогда согласно (12.32) и (12.33) $\gamma=\sqrt{RCp}$; $Z_в=\sqrt{R/Cp}$. Обозначим $a=x\sqrt{RC}$ и учтем, что $U_1(p)=U/p$. По (12.39) и (12.40),

$$U(x,p)=\frac{U}{p}e^{-a\sqrt{p}};\quad I(x,p)=\frac{U(x,p)}{Z_в}=U\sqrt{\frac{C}{R}}\frac{e^{-a\sqrt{p}}}{\sqrt{p}}.$$

В соответствии с табл. § 8.39:

$$\frac{e^{-a\sqrt{p}}}{p}\doteq 1-\Phi\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right);\quad \frac{e^{-a\sqrt{p}}}{\sqrt{p}}\doteq\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-a^2/4t}.$$

Функция $\Phi(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^z e^{-z^2}dz$ (в нашем случае $z=x\sqrt{RC}/2\sqrt{t}=a/2\sqrt{t}$) представляет собой интеграл ошибок Гаусса (рис. 12.10, *а*). Решение для напряжения и тока:

$$u(x,\ t)=U[1-\Phi(z)]; \quad (12.46)$$

$$i(x,\ t)=U\sqrt{\frac{C}{\pi R}}\frac{e^{-z^2}}{\sqrt{t}}. \quad (12.47)$$

Отметим, что решение, полученное в предположении, что у кабеля $L_0=G_0=0$, имеет два недостатка: 1) напряжение и ток передаются от точки к точке не с конечной, а с бесконечно большой скоростью; 2) ток в начале линии в момент включения достигает бесконечно большого значения (в действительности он ограничивается хотя и малым, но конечным сопротивлением источника питания).



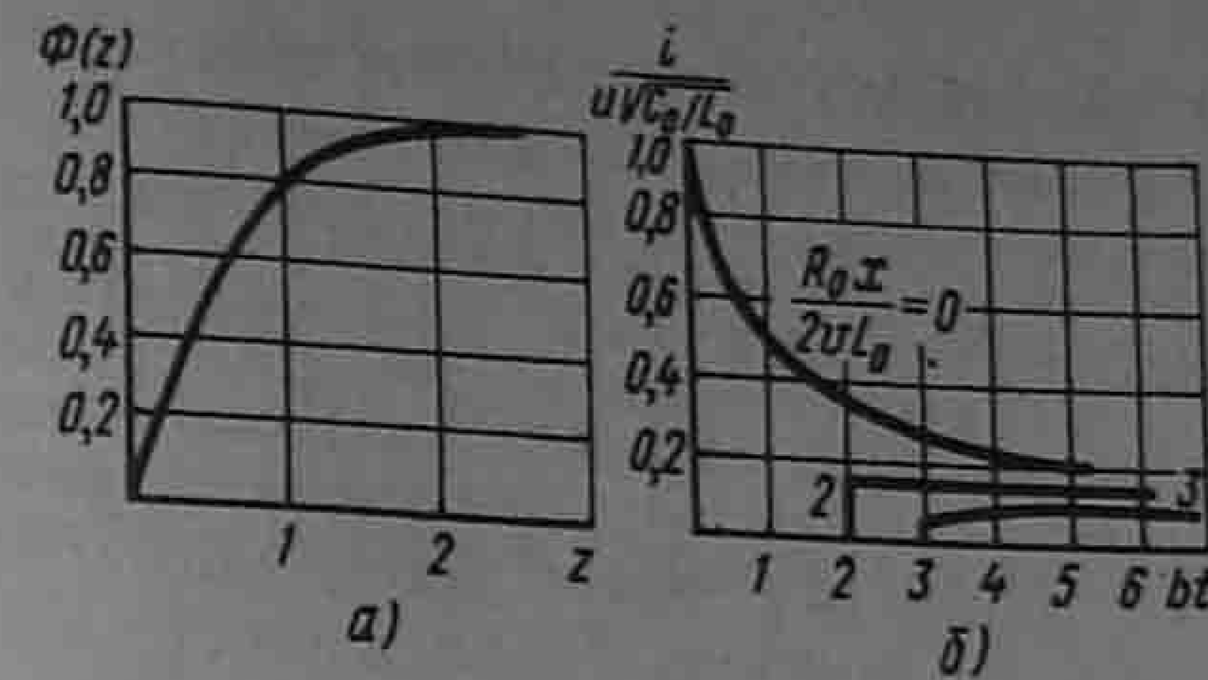



Рис. 12.10

**§ 12.15. Подключение бесконечно протяженной линии без утечки к источнику постоянного напряжения.** Полагаем $G_0=0$ и из формул (12.32) и (12.33), обозначив $v=1/\sqrt{LC}$; $b=R_0/2L_0$, определим

$$\gamma=\sqrt{(R_0+pL_0)pC_0}=\frac{1}{v}\sqrt{p^2+2bp};$$

$$Z_в=\sqrt{\frac{R_0+pl_0}{pC_0}}=\sqrt{\frac{L_0}{C_0}}\frac{1}{p}\sqrt{p^2+2bp}.$$

Изображение напряжения в начале линии $U_1(0,p)=U/p$. В соответствии с формулами (11.34) и (11.35) изображение напряжения и тока в точке, удаленной на расстояние $x$ от начала линии,

$$U(x,\ p)=\frac{U}{p}e^{-\frac{x}{v}\sqrt{p^2+2bp}};$$

$$I(x,\ p)=\frac{U(x,\ p)}{Z_в}=\frac{U\sqrt{\frac{C_0}{L_0}}e^{-\frac{x}{v}\sqrt{p^2+2bp}}}{\sqrt{p^2+2bp}}.$$

Для определения тока $i(x,t)$ как функции времени $t$ и расстояния $x$ (для $t>x/v=\tau$) воспользуемся табличным соотношением

$$\frac{e^{-\tau\sqrt{p^2+2bp}}}{\sqrt{p^2+2bp}}\doteq e^{-bt}J_0(jb\sqrt{t^2-\tau^2}),$$

где $J_0(jb\sqrt{t^2-\tau^2})$ — бесселева функция нулевого порядка от мнимого аргумента. Значения ее приведены в табл. 15.1. Следовательно,

$$i(x,\ t)=U\sqrt{\frac{C_0}{L_0}}e^{-bt}J_0\left(jb\sqrt{t^2-\left(\frac{x}{v}\right)^2}\right). \quad (12.48)$$

В соответствии с (12.48) на рис. 12.10, *б* изображена зависимость

$$\frac{i(x,\ t)}{U\sqrt{\frac{C_0}{L_0}}}=f(bt)=f\left(\frac{R_0}{2L_0}t\right).$$

Из рисунка видно, что при малых $x$ (малых $\frac{R_0x}{2vL_0}$) ток $i$, получив

большой начальный толчок, уменьшается во времени. При больших значениях $x$ ток $i$ после скачка сначала возрастает, а затем уменьшается. Так как для линии с распределенными параметрами, у которой $G_0 = 0$, $\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{C_0}\frac{\partial i}{\partial x}$, то

$$u(x,\ t) = -\frac{1}{C_0}\int\limits_{x/v}^{t}\frac{\partial i(x,\ t)}{\partial x}\,dt. \qquad (12.49)$$

Возьмем частную производную от $i(x, t)$ [см. (12.48)] по $x$, подставим ее в (12.49) и учтем также напряжение, обусловленное скачком тока на фронте волны. В результате получим

$$\frac{u(x,\ t)}{U} = e^{-\frac{bx}{v}} - \frac{jbx}{v}\int\limits_{x/v}^{t}\frac{e^{-bt}}{\sqrt{t^2-\left(\frac{x}{v}\right)^2}}\,J_1\left(jb\sqrt{t^2-\left(\frac{x}{v}\right)^2}\right)dt, \qquad (12.50)$$

где $J_1$ — функция Бесселя первого порядка от мнимого аргумента (см. табл. 15.1).

Слагаемое $e^{-bx/v}$ в (12.50) соответствует скачку тока на фронте волны. На фронте волны в точке $x$ в момент $x/v$ ток равен $U\sqrt{\frac{C_0}{L_0}}e^{-\frac{bx}{v}}$, а в соседней точке $x+\Delta x$ в тот же момент времени ток еще отсутствует. Поэтому напряжение, вызванное скачком тока на фронте волны,

$$-\lim\frac{1}{C_0}\int\limits_{x/v}^{x/v+\Delta x}\frac{\partial i(x,\ t)}{\partial x}\frac{v}{v}\,dx = -\frac{1}{vC_0}\int\limits_{x}^{x+\Delta x}di(x,\ t) =$$

$$= -\frac{1}{vC_0}\left|i(x,\ t)\right|_{x}^{x+\Delta x} = -0 + \frac{U\sqrt{\frac{C_0}{L_0}}}{vC_0}e^{-\frac{bx}{v}} = Ue^{-\frac{bx}{v}}.$$

## Вопросы для самопроверки

1. При каких допущениях на первом этапе изучения рассматривают переходные процессы в линиях с распределенными параметрами? Какими дифференциальными уравнениями описывают эти процессы? 2. Как понимать, что аргументами функций, являющихся решением, оказываются $(t-x/v)$ и $(t+x/v)$? 3. Как показать, что для линии без потерь характер изменения $u$ или $i$ падающей волны в любой точке линии повторяет характер изменения $u$ и $i$ в начале линии, но с запозданием во времени? 4. Как согласовывают переходные процессы в линиях с распределенными параметрами с переходными процессами в нагрузке на конце линии? 5. Обосновать методику составления схем замещения для исследования волновых процессов, когда волна дойдет до нагрузки. 6. Как из временных графиков напряжения $u_н$ на нагрузке и тока $i_н$ в нагрузке получить графики отраженных волн $u_0$ и $i_0$ на линии? 7. Какова идея расчета переходных процессов в линии с распределенными параметрами при отключении нагрузки или части ее? 8. Охарактеризуйте стадии волнового процесса при подключении разомкнутой на конце линии длиной $l$ к источнику постоянного напряжения, полагая сначала для линии $R_0=G_0=0$, а затем, что линия является линией без искажения. 9. Как от уравнений для мгновенных значений тока и напряжения перейти к уравнениям, записанным для операторных изображений этих величин? 10. В каком случае в качестве линии задержки используют линию с распределенными параметрами, а в каком — каскадное соединение фильтров НЧ? 11. Объясните идею формирования кратковременных импульсов с помощью линии с распределенными параметрами. 12. Решите задачи 15.5; 15.6; 15.12; 15.17.

# Литература к I части

***а) Учебники***

1. *Нейман Л. Р., Демирчян К. С.* Теоретические основы электротехники. Ч. I, II. —М.: Энергия, 1981.
2. Теоретические основы электротехники/Под ред. *П. А. Ионкина*. Ч. I, II. — М.: Высшая школа, 1975.

***б) Учебные пособия и монографии по линейным цепям***

3. *Балабанян Н.* Синтез электрических цепей: Пер. с англ./Под ред. *Г. И. Атабекова*. — М.: Госэнергоиздат, 1961.
4. *Бессонов Л. А.* Линейные электрические цепи. — М.: Высшая школа, 1983.
5. *Гарднер М. Ф., Бэрнс Д. А.* Переходные процессы в линейных системах. — М.: Физматгиз, 1961.
6. *Деруссо П., Рой Р., Клоуз Ч.* Пространство состояний в теории управления: Пер. с англ./Под ред. *М. В. Меерова*. — М.: Наука, 1970.
7. Основы инженерной электрофизики./Под ред. *П. А. Ионкина*. Ч. II. — М.: Высшая школа, 1972.
8. *Круг К. А.* Переходные процессы в линейных электрических цепях. — М.— Л.: Госэнергоиздат, 1948.
9. *Лэм Г.* Аналоговые и цифровые фильтры. Расчет и реализация: Пер. с англ./Под ред. *И. Н. Теплюка*. — М.: Мир, 1982.
10. *Баскаков С. И.* Радиотехнические цепи и сигналы. — М.: Высшая школа, 1988.
11. *Мэзон С., Циммерман Г.* Электронные цепи, сигналы и системы: Пер. с англ./Под ред. *П. А. Ионкина*. — М.: ИЛ, 1963.
12. *Матханов П. Н.* Основы анализа электрических цепей. Линейные цепи. — М.: Высшая школа, 1981.
13. *Матханов П. Н.* Основы синтеза линейных электрических цепей. — М.: Высшая школа, 1976.
14. *Новак М.* Частотные преобразования в теории цепей: Пер. с чешского. — М.: Советское радио, 1975.
15. *Рабинер Л., Гоулд Б.* Теория и применение цифровой обработки сигналов. — М.: Мир, 1978.
16. *Харкевич А. А.* Спектры и анализ. — М.: Гостехиздат, 1962.
17. *Мошиц Г., Хорн П.* Проектирование активных фильтров: Пер. с англ./Под ред. *И. Н. Теплюка*. — М.: Мир, 1984.
18. *Bryant P. R.* The Algebra and Topology of Electrical Networks. The Institution of Electrical Engineers (англ.). Nov. 1960.

***в) Учебные пособия и монографии по нелинейным цепям***

19. *Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э.* Теория колебаний. — М.: Физматгиз, 1959.
20. *Бессонов Л. А.* Нелинейные электрические цепи. — М.: Высшая школа, 1977.
21. *Бессонов Л. А.* Автоколебания (автомодуляция и некоторые динамические явления) в нелинейных электрических цепях со сталью. — М.: Госэнергоиздат, 1958.
22. *Каннингхем В.* Введение в теорию нелинейных систем: Пер. с англ. — М.: Госэнергоиздат, 1962.

***г) Задачники***

23. Сборник задач по теоретическим основам электротехники/*Л. А. Бессонов, Демидова И. Г., Заруди М. Е., Расовская С. Э., С. А. Миленина*. — М.: Высшая школа, 1988.
24. Задачник по теоретическим основам электротехники. Теория цепей/Под ред. *К. М. Поливанова*. — М.: Энергия, 1973.
25. Сборник задач и упражнений по теоретическим основам электротехники/Под ред. *П. А. Ионкина*. — М.: Энергоиздат, 1982.

***д) Руководства по применению универсальных программ для ЭВМ по расчету цепей***

26. *Удалов Н. Н., Разевиг В. Д.* Программа анализа нелинейных радиоэлектронных схем на ЕС ЭВМ. — М.: МЭИ, 1981.
27. *Удалов Н. Н., Разевиг В. Д.* Моделирование радиоэлектронных схем на СМ ЭВМ. — М.: МЭИ, 1986.

В [26] и [27] даны методические указания к программе NAP, позволяющей проводить расчет установившихся и переходных процессов в линейных и нелинейных цепях, расчет АЧХ и ФЧХ, чувствительности, осуществить оптимизацию.

28. Методические указания по эксплуатации комплекса СПАРС моделирования электронных схем на ЭВМ ЕС при курсовом и дипломном проектировании/*А. И. Петренко, А. И. Власов, А. П. Тимченко, В. С. Мачуговский*. — Киев: КПИ, 1979. (СПАРС — схемотехническое проектирование аналоговых радиоэлектронных схем.)
29. Инструкция программы ПАЛЬМА анализа линейных цепей/*В. М. Богачев, В. М. Демидов, С. В. Дмитриев, Н. Г. Юрчак*. — М.: МЭИ, 1986. Программа предназначена для анализа линейных цепей в символьной форме. Позволяет рассчитать передаточную функцию в аналитической форме, АЧХ, ФЧХ, переходные процессы, осуществить оптимизацию. Программы для ЭВМ ЕС и ЭВМ СМ-4.

Часть II

# НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

Глава тринадцатая

## НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА

§ 13.1. **Основные определения.** Как уже говорилось в § 2.1, под нелинейными электрическими цепями принято понимать электрические цепи, содержащие нелинейные элементы. Нелинейные элементы подразделяют на резистивные, индуктивные и емкостные.

Нелинейные резисторы (НР) в отличие от линейных обладают нелинейными вольт-амперными характеристиками. Напомним, что вольт-амперная характеристика (ВАХ) — это зависимость тока, протекающего через резистор, от напряжения на нем. Нелинейные резисторы могут быть подразделены на две большие группы: *неуправляемые и управляемые*. В управляемых НР в отличие от неуправляемых кроме основной цепи, как правило, есть еще по крайней мере одна вспомогательная или управляющая цепь, воздействуя на ток или напряжение которой можно деформировать ВАХ основной цепи. В неуправляемых НР ВАХ изображается одной кривой, а в управляемых — семейством кривых.

В *группу неуправляемых* НР входят лампы накаливания, электрическая дуга, бареттер, газотрон, стабиловольт, тиритовые сопротивления, полупроводниковые выпрямители (диоды) и некоторые другие.

В *группу управляемых* НР входят трехэлектродные (и более) лампы, транзисторы, тиристоры, терморезисторы, фоторезисторы, фотодиоды, магниторезисторы, магнитодиоды, магнитотранзисторы и другие элементы.

§ 13.2. **ВАХ нелинейных резисторов.** На рис. 13.1 изображено четырнадцать типов наиболее часто встречающихся ВАХ неуправляемых резисторов.

ВАХ на рис. 13.1, *а* имеют, например, лампы накаливания с металлической нитью. Чем больше протекающий через нить ток, тем сильнее нагревается нить и тем больше становится ее сопротивление.



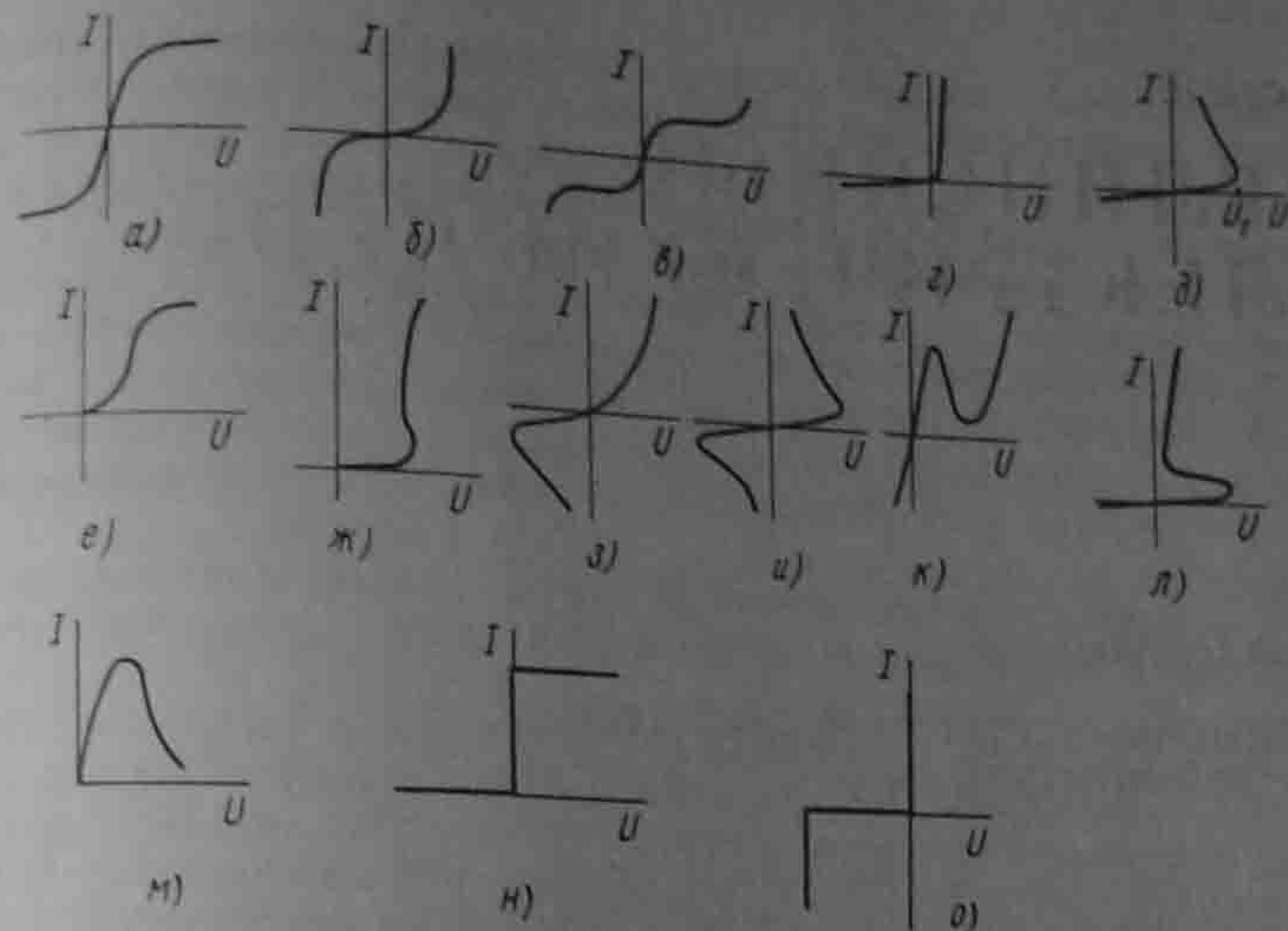



Рис. 13.1

Если величину, откладываемую по оси абсцисс, обозначить $x$, а величину, откладываемую по оси ординат, $f(x)$, то характеристика рис. 13.1, *а* подчиняется условию $f(x) = -f(-x)$.

Нелинейные резисторы, для которых выполняется это условие, называют НР *с симметричной* вольт-амперной характеристикой.

ВАХ на рис. 13.1, *б* обладают варисторы, некоторые типы терморезисторов и лампы накаливания с угольной нитью.

Для данной группы характерно, что с увеличением протекающего тока сопротивление их уменьшается. ВАХ их симметрична.

ВАХ на рис. 13.1, *в* обладает, например, бареттер. Бареттер выполняют в виде спирали из стальной проволоки, помещенной в стеклянный сосуд, заполненный водородом при давлении порядка 80 мм рт. ст. В определенном диапазоне изменения тока ВАХ бареттера расположена почти горизонтально. Бареттер используют, например, для стабилизации тока накала электронных ламп при изменении напряжения питания. ВАХ на рис. 13.1, *в* также симметрична.

ВАХ на рис. 13.1, *г* в отличие от предыдущих *несимметрична*. Ею обладают полупроводниковые диоды (кремниевые, германиевые), широко применяемые для преобразования переменного тока в постоянный. Они способны пропускать ток практически только в одном, проводящем направлении. Широко используют их также в различных датчиках и преобразователях устройств автоматики.

ВАХ на рис. 13.1, *д* имеют электрическая дуга с разнородными электродами, газотрон и некоторые типы терморезисторов. Если напряжение повышать начиная с нуля, то сначала ток растет, но

остается весьма малым, после достижения напряжения $U_1$ (напряжения зажигания) происходит резкое увеличение тока в цепи и снижение напряжения на электрической дуге или газотроне. Для верхнего участка ВАХ приращению тока соответствует убыль напряжения на нелинейном сопротивлении.

Участок ВАХ типа верхнего участка кривой рис. 13.1, *д* называется *падающим участком вольт-амперной характеристики*[1].

Электрическую дугу широко применяют при сварке металлов, в электротермии (в дуговых электропечах), а также в качестве мощного источника электрического освещения, например в прожекторах.

Газотрон представляет собой лампу с двумя электродами, заполненную благородным газом (неоном, аргоном и др.) или парами ртути.

ВАХ на рис. 13.1, *е* имеет двухэлектродная выпрямительная лампа — кенотрон. По нити накала лампы пропускают ток. Этот ток разогревает катод (один из двух электродов лампы) до высокой температуры, в результате чего с поверхности катода начинается термоэлектронная эмиссия. Под действием электрического поля поток электронов направляется ко второму, холодному, электроду— аноду. В начальной части ВАХ зависимость тока от напряжения подчиняется закону трех вторых: $i = au^{3/2}$. ВАХ кенотрона несимметрична, это объясняется тем, что поток электронов направляется с катода на анод только в том случае, если анод положителен по отношению к катоду.

ВАХ на рис. 13.1, *ж* обладают лампы с тлеющим разрядом. К числу их относятся стабиловольты (стабилитроны) и неоновые лампы. При тлеющем разряде благородный газ, которым заполнена лампа, светится. ВАХ на рис. 13.1, *ж* свидетельствует о том, что в определенном диапазоне значений токов напряжение на лампе остается практически неизменным.

Некоторые типы точечных германиевых и кремниевых диодов имеют ВАХ на рис. 13.1, *з*.

Электрическая дуга между электродами, выполненными из одного и того же материала и находящимися в одинаковых условиях, имеет ВАХ типа рис. 13.1, *и*.

ВАХ четырехслойного германиевого (кремниевого) диода — динистора — изображена на рис. 13.1, *л*; ВАХ туннельного диода — на рис. 13.1, *к* (о принципах работы тринистора см. § 15.43 и туннельного диода см., например, [20]).

ВАХ лямбда-диода изображена на рис. 13.1, *м*, ВАХ диодного ограничителя тока — на рис. 13.1, *н* и ВАХ полупроводникового стабилизатора тока — на рис. 13.1, *о*. ВАХ управляемых нелинейных элементов рассмотрены в гл. 15.

[1]Падающий участок ВАХ представляет собой такой ее участок, на котором положительному приращению тока через НР соответствует отрицательное приращение напряжения на нем.



**§ 13.3. Общая характеристика методов расчета нелинейных электрических цепей постоянного тока.** В гл. 13 учебника рассматривается методика расчета простейших нелинейных электрических цепей с последовательно, параллельно и последовательно-параллельно соединенными НР и источниками ЭДС. Кроме того, изложена методика расчета сложных цепей, в основу которой положена диакоптика.

Обратим внимание на то, что с линейной частью любой сложной разветвленной цепи, содержащей НР, можно осуществлять любые преобразования, рассмотренные в гл. 1, если они облегчают расчет всей сложной схемы. Одно из таких преобразований — от треугольника сопротивлений к звезде для облегчения нахождения входного сопротивления линейной части схемы — использовано при расчете в § 13.9.

Из методов расчета, приведенных в гл. 1, к нелинейным цепям применимы следующие: метод двух узлов; замена нескольких параллельно включенных ветвей одной эквивалентной; метод эквивалентного генератора.

До проведения расчета нелинейных цепей должны быть известны ВАХ НР, входящих в схему. Расчет нелинейных цепей постоянного тока производят, как правило, графически. Могут применяться и ЭВМ.

**§ 13.4. Последовательное соединение НР.** На рис. 13.2, *а* изображена схема последовательного соединения НР с заданной ВАХ, линейного сопротивления $R$ и источника ЭДС $E$.

Требуется найти ток в цепи. ВАХ НР обозначена на рис. 13.2, *б* как $I = f(U_{НР})$, ВАХ линейного сопротивления — прямая линия. ВАХ всей цепи, т. е. зависимость тока в цепи от суммы падений напряжений на НР и $R$, обозначена через $I = f(U_{НС} + U_R)$. Расчет основывается на законах Кирхгофа. Обсудим два способа расчета. Первый способ иллюстрирует рис. 13.2, *б*, второй — рис. 13.2, *в*.

При расчете цепи по первому способу строим результирующую ВАХ всей пассивной части схемы, исходя из того, что при последовательном соединении через НР и $R$ проходит одинаковый ток. Для построения результирующей ВАХ задаемся произвольным током — точкой $m$, проводим через нее (рис. 13.2, *б*) горизонталь и складываем отрезок $\overline{mn}$, равный напряжению на НР, с отрезком $\overline{mp}$, равным напряжению на $R$: $\overline{mn} + \overline{mp} = \overline{mq}$[1].

Тогда $q$ принадлежит результирующей ВАХ всей схемы. Аналогично строят и другие точки результирующей ВАХ. Определение

[1]Здесь и далее черта над отрезком означает, что речь идет о его длине.

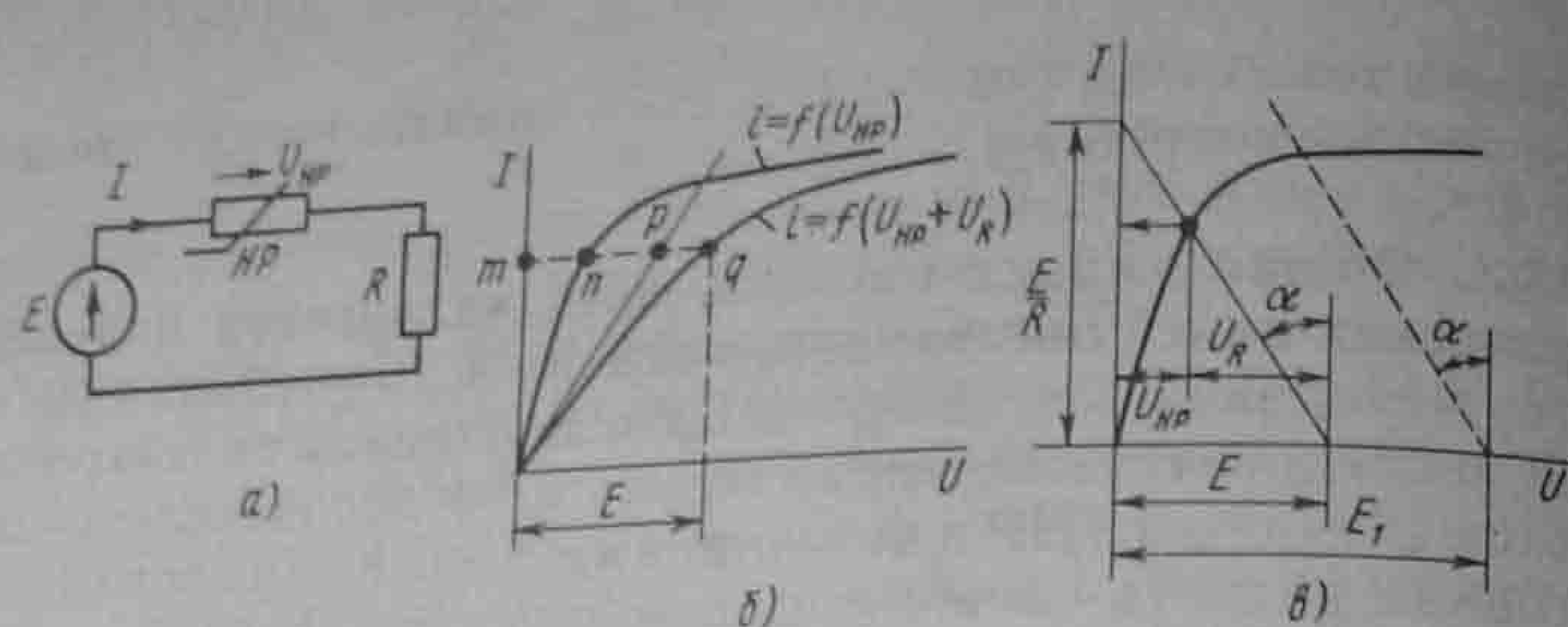



Рис. 13.2

тока в цепи при заданной ЭДС $E$ производят графически по результирующей ВАХ. С этой целью следует заданное значение ЭДС $E$ отложить по оси абсцисс и через полученную точку провести вертикаль до пересечения с результирующей ВАХ в точке $q$. Ордината точки $q$ равна искомому току.

При расчете цепи по второму способу нет необходимости строить результирующую ВАХ пассивной части схемы. Учитывая, что уравнение $IR + U_{\text{НР}} = E$ в координатах $I$ и $U_{\text{НР}}$ представляет собой уравнение прямой, проходящей через точки $I = E/R$; $U = U_{\text{НР}} = 0$; $I = 0$; $U_{\text{НР}} = U = E$, проводим на рис. 13.2, *в* эту прямую. Тангенс угла $\alpha$ наклона ее к вертикали, умноженный на отношение $m_U/m_I$ масштабов по осям, численно равен $R$. Точка пересечения прямой с ВАХ НР определяет режим работы цепи. Действительно, для этой точки ток, проходящий через НР и $R$, одинаков, а сумма падений напряжений $U_{\text{НР}} + U_R = E$. При изменении ЕДС от $E$ до $E_1$ прямую $I = f(U_R)$ следует переместить параллельно себе так, чтобы она исходила из точки $I = 0$, $U = E_1$ (пунктирная прямая на рис. 13.2, *в*).

Аналогично рассчитывают цепи при последовательном соединении двух и большего числа НР. В этом случае сначала находят ВАХ двух НР, затем трех и т. д.

Обсудим применение второго способа для расчета цепи (рис. 13.3, *а*) с двумя различными НР, ВАХ НР1 и НР2 изображена на рис. 13.3, *б*. Так как НР2 имеет нелинейную ВАХ, то вместо прямой $I=f(U_R)$, как это было на рис. 13.2, *в*, теперь нужно построить нелинейную зависимость $I = f(U_2)$. Начало ее

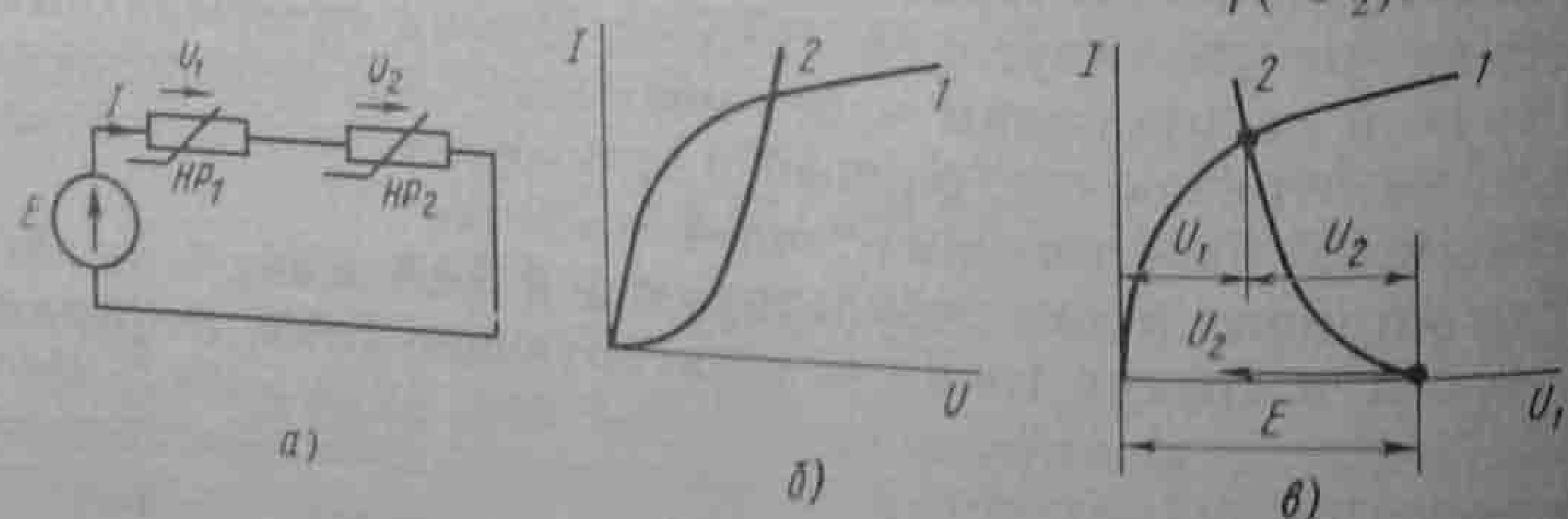



Рис. 13.3



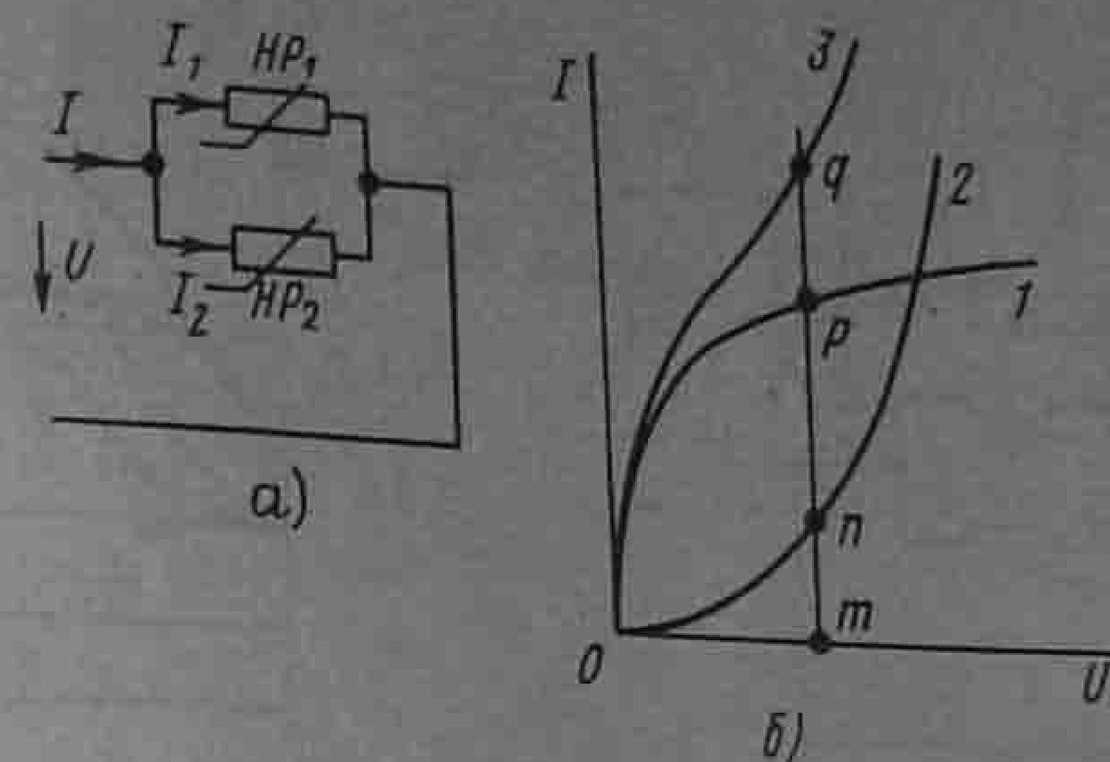



Рис. 13.4

(рис. 13.3, *в*) расположено в точке $I = 0$, $U_1 = E$. Отсчет положительных значений $U_2$ производится влево от этой точки. Так как положительные значения $U_2$ на рис. 13.3, *б* откладываем вправо от начала координат, а на рис. 13.3, *в* — влево, то кривая $I = f(U_2)$ (рис. 13.3, *в*) представляет собой зеркальное отображение кривой *2* (рис. 13.3, *б*) относительно вертикальной оси, проведенной через точку $U_1 = E$.

**§ 13.5. Параллельное соединение НР.** Схема параллельного соединения двух НР изображена на рис. 13.4, *а*; ее ВАХ — на рис. 13.4, *б*. При построении результирующей ВАХ исходят из того, что напряжения на НР1 и НР2 равны в силу их параллельного соединения, а ток в неразветвленной части схемы $I = I_1 + I_2$.

Кривая *3* рис. 13.4, *б* представляет собой ВАХ параллельного соединения. Строим ее следующим образом. Задаемся произвольно напряжением $U$, равным отрезку $Om$. Проводим через точку $m$ вертикаль. Складываем отрезок $mn$, равный току в НР2, с отрезком $mp$, равным току в НР1: $mn + mp = mq$.

Отрезок $mq$ равен току в неразветвленной части цепи при напряжении $Om$. Аналогично определяют и другие точки результирующей ВАХ параллельного соединения.

**§ 13.6. Последовательно-параллельное соединение сопротивлений.** На рис. 13.5 изображена схема последовательного соединения НР3 и двух параллельно соединенных НР1 и НР2. Требуется найти токи в ветвях схемы. Заданы ВАХ нелинейных резисторов (кривые *1*, *2*, *3* на рис. 13.6) и ЭДС $E$. Сначала строим ВАХ параллельного соединения в соответствии с методикой, рассмотренной в § 13.5 (кривая *1* + *2* на рис. 13.6). После этого цепь сводится к последовательному соединению НР3 и НР, имеющего ВАХ *1* + *2*.

Применяем второй способ построения (см. § 13.4). Кривая *3′* (рис. 13.6) представляет собой ВАХ НС3, зеркально отраженную относительно вертикали, проведенной через точку $U = E$. В точке пересечения кривой *3′* с кривой *1* + *2* удовлетворяется второй закон Кирхгофа: $U_3 + U_{12} = E$. Сумма токов $I_1 + I_2 = I_3$.

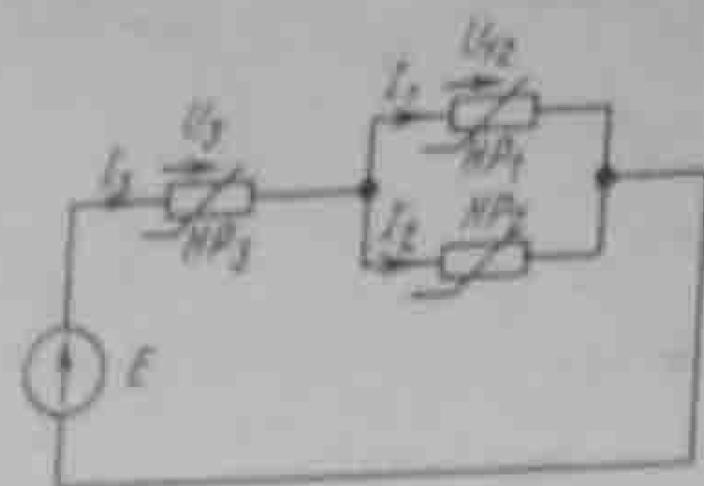



Рис. 13.5

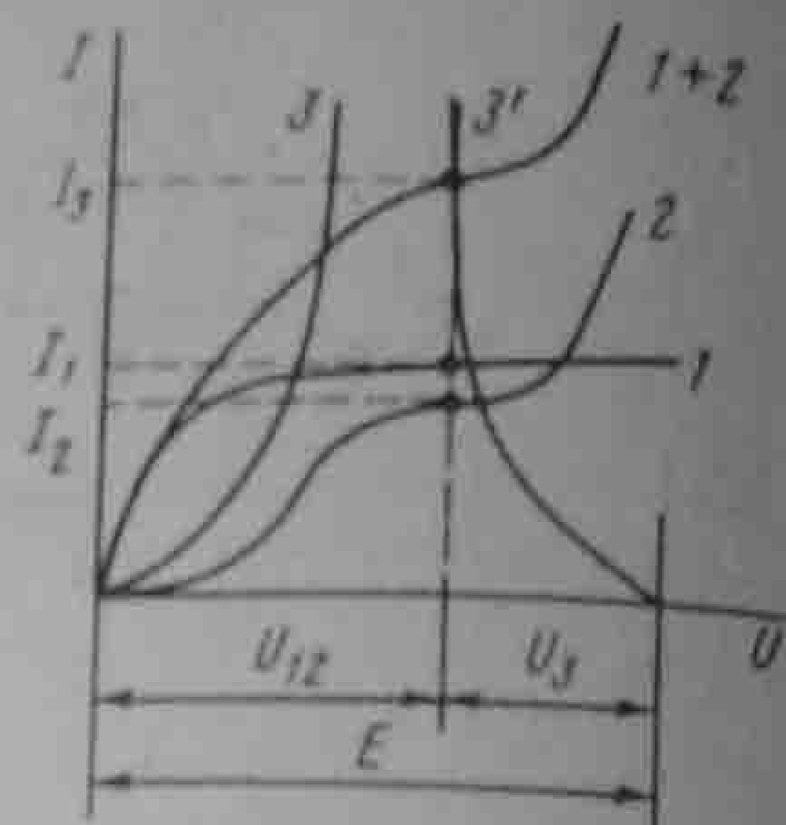



Рис. 13.6

**§ 13.7. Расчет разветвленной нелинейной цепи методом двух узлов.** Для схем, содержащих только два узла или приводящихся к ним, применяют метод двух узлов. Рассмотрим его на примере схемы (рис. 13.7). В схеме три НР и три источника ЭДС. Пусть ВАХ НР изображаются кривыми (рис. 13.8, *а* — *в*). Для определенности положим, что $E_1 > E_2 > E_3$. Выберем положительные направления для токов. Пусть, например, все токи направлены к узлу *a*. Тогда, по первому закону Кирхгофа,

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0. \qquad (13.1)$$

Каждый из токов является нелинейной функцией падения напряжения на своем НР. Так, $I_1$ является функцией $U_1$, $I_2$ — функцией $U_2$ и $I_3$ — функцией $U_3$.

Выразим все токи в функции одного переменного — напряжения $U_{ab}$ между двумя узлами. Для этого выразим $U_1$, $U_2$, $U_3$ через ЭДС и $U_{ab}$:

$$U_1 = E_1 - U_{ab}; \qquad (13.2)$$

$$U_2 = E_2 - U_{ab}; \qquad (13.3)$$

$$U_3 = E_3 - U_{ab}. \qquad (13.4)$$

Таким образом, возникает задача о том, как перестроить кривую $I_1 = f(U_1)$ в кривую $I_1 = f(U_{ab})$, кривую $I_2 = f(U_2)$ — в кривую $I_2 = f(U_{ab})$ и т. д. На рис. 13.9 показано, как из кривой $I_1 = f(U_1)$ (рис. 13.8, *а*) получить кривую $I_1 = f(U_{ab})$ — точки соответственно обозначены одинаковыми цифрами.

Для точки *5* кривой (рис. 13.8, *а*) $I_1 = 0$ и $U_1 = 0$; при этом $U_{ab} = E_1$ [см. (13.2)], т. е. начало кривой $I_1 = f(U_{ab})$ сдвинуто в точку $U_{ab} = E_1$.

Росту $U_1$ при $U_1 > 0$ соответствует убыль $U_{ab}$. Для точки *2* при



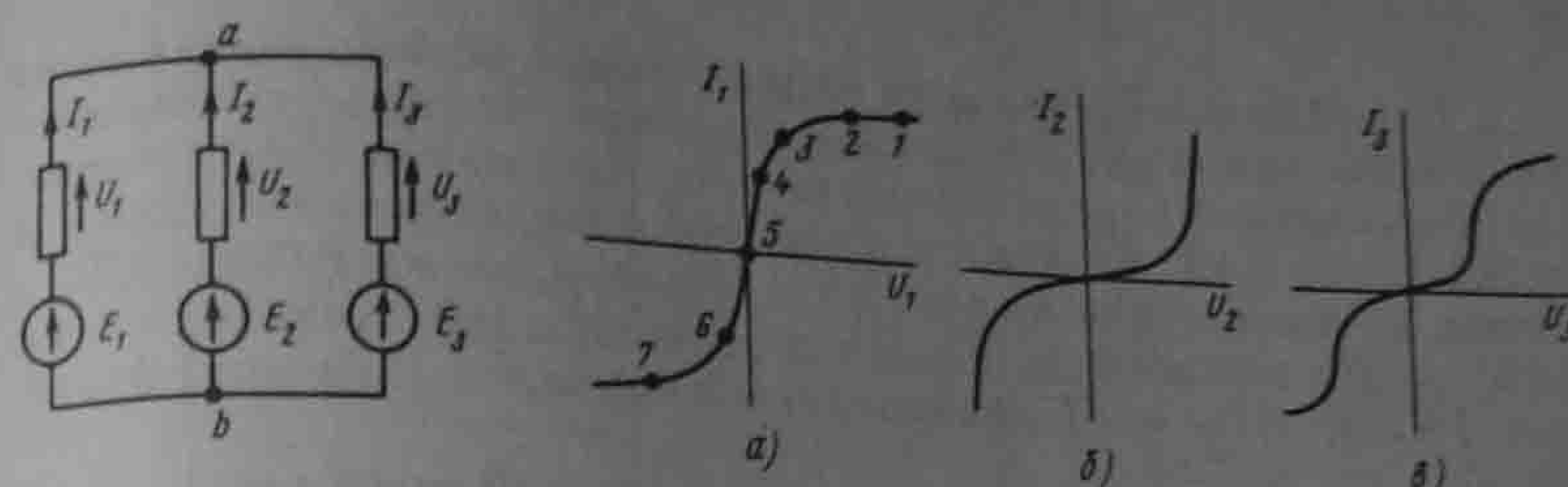



Рис. 13.7

Рис. 13.8

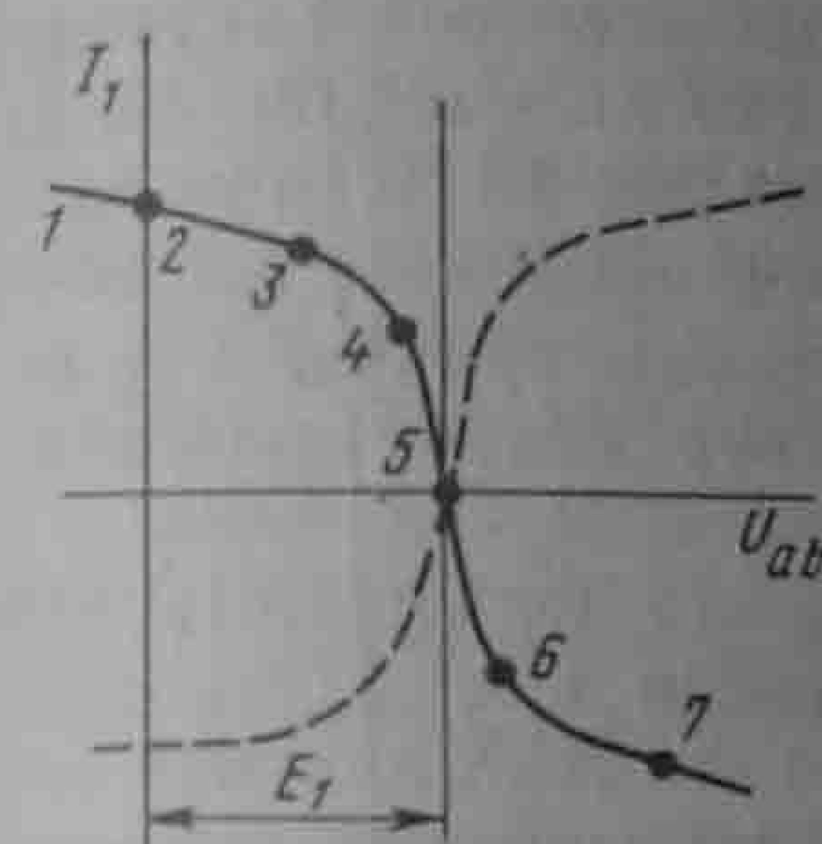



Рис. 13.9

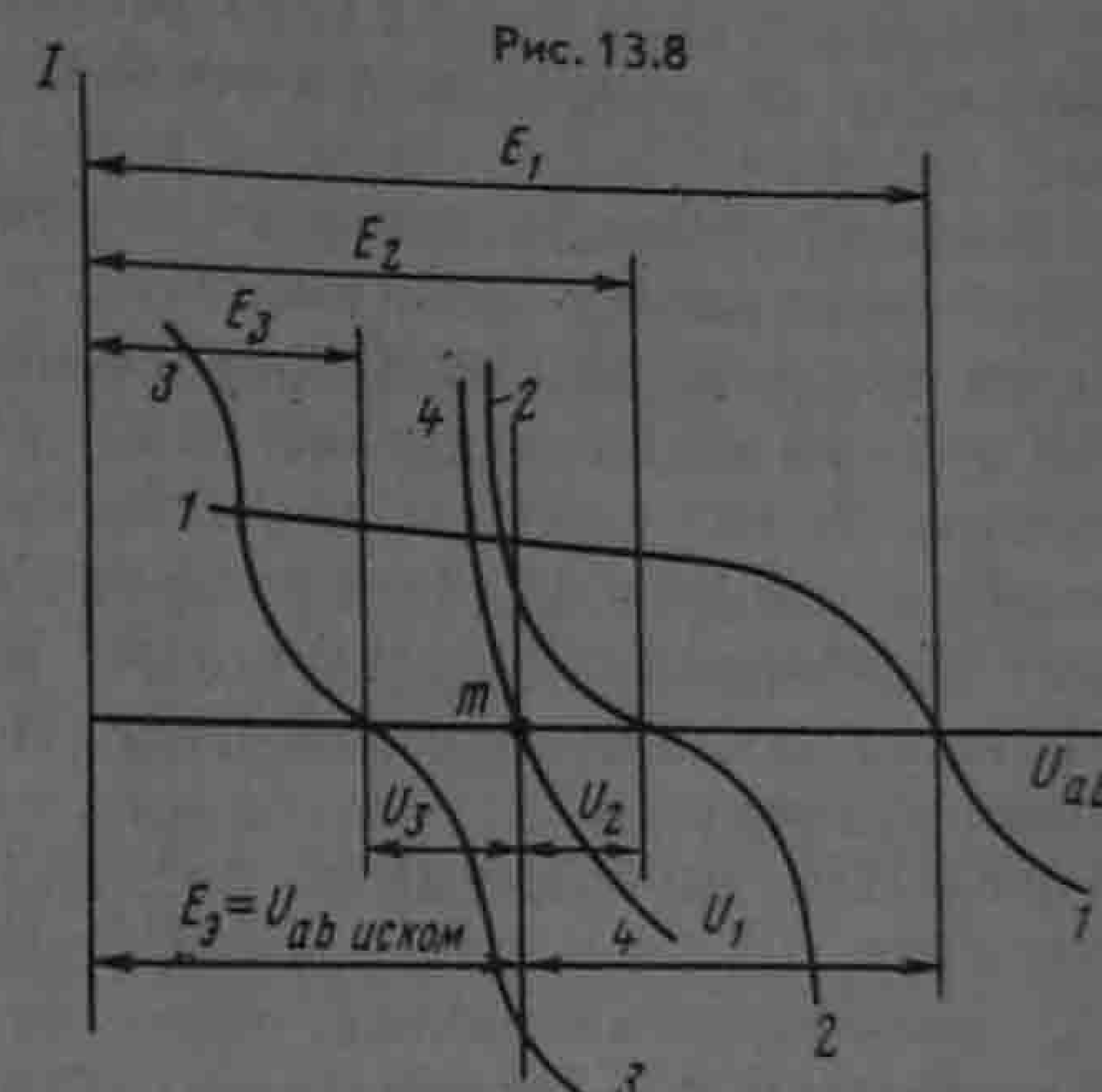



Рис. 13.10

$U_1 = E_1$ $U_{ab} = 0$. Росту $U_1$ при $U_1 < 0$ отвечает рост $U_{ab}$, причем $U_{ab} > E_1$.

На основании изложенного рекомендуется поступать следующим образом:

1) сместить кривую $I_1 = f(U_1)$ параллельно самой себе так, чтобы ее начало находилось в точке $U_{ab} = E_1$ (кривая, полученная в результате переноса, представлена пунктиром на рис. 13.9);

2) провести через точку $U_{ab} = E_1$ вертикаль и зеркально отразить пунктирную кривую относительно вертикали.

Аналогичным образом перестраивают кривые и для других ветвей схемы. Нанесем кривые $I_1 = f(U_{ab})$, $I_2 = f(U_{ab})$ и $I_3 = f(U_{ab})$ на одном рисунке (кривые *1*, *2*, *3* на рис. 13.10) и построим кривую $I_1 + I_2 + I_3 = f(U_{ab})$ (кривая *4* на рис. 13.10), просуммировав ординаты кривых *1*, *2*, *3*. Точка *m* пересечения кривой *4* с осью абсцисс дает значение $U_{ab}$, при котором удовлетворяется уравнение (13.1). Восставим в этой точке перпендикуляр к оси абсцисс. Ординаты точек пересечения перпендикуляра с кривыми *1*, *2*, *3* дадут соответственно токи $I_1$, $I_2$ и $I_3$ по величине и по знаку.

**§ 13.8. Замена нескольких параллельных ветвей, содержащих НР и ЭДС, одной эквивалентной.** Положим, что имеется совокупность нескольких параллельных ветвей, содержащих НР и источники ЭДС (рис. 13.11). Параллельные ветви входят в состав сложной схемы, не показанной на рис. 13.11. Каковы должны быть ЭДС и ВАХ эквивалентного нелинейного резистора $НР_{эк}$ участка схемы (рис. 13.12), чтобы он был эквивалентен параллельным ветвям (рис. 13.11)?

Одна ветвь (рис. 13.12) будет эквивалентной ветвям (рис. 13.11) в том случае, если ток $I$ в неразветвленной части цепи (рис. 13.11) при любых значениях напряжения $U_{ab}$ будет равен току $I$ в ветви (рис. 13.12).

Воспользуемся построениями на рис. 13.10. Кривая *4* этого рисунка представляет собой зависимость $I_1 + I_2 + I_3 = f(U_{ab})$, т. е. является результирующей ВАХ трех параллельных ветвей. Такую же ВАХ должна иметь ветвь (рис. 13.12). Если ток $I$ в схеме (рис. 13.12) равен нулю, то $U_{ab} = E_3$. Следовательно, $E_3$ на рис. 13.10 определяется напряжением $U_{ab}$, при котором кривая *4* пересекает ось абсцисс. Для определения ВАХ $НР_{эк}$ необходимо кривую *4* (рис. 13.10) зеркально отобразить относительно вертикали, проведенной через точку $m$.

ВАХ $НР_{эк}$ изображена на рис. 13.13. Важно подчеркнуть, что включение ЭДС в параллельные ветви привело к тому, что ВАХ $НР_{эк}$ стала несимметричной, несмотря на то что ВАХ нелинейных сопротивлений *1, 2, 3* в схеме (рис. 13.7) были взяты симметричными.

Таким образом, изменяя ЭДС в ветвях параллельной группы, можно изменять ее результирующую ВАХ и как бы искусственно создавать НР с самыми причудливыми ВАХ.

**§ 13.9. Расчет нелинейных цепей методом эквивалентного генератора.** Если в сложной электрической цепи есть одна ветвь с НР, то определить ток в ней можно методом эквивалентного генератора.

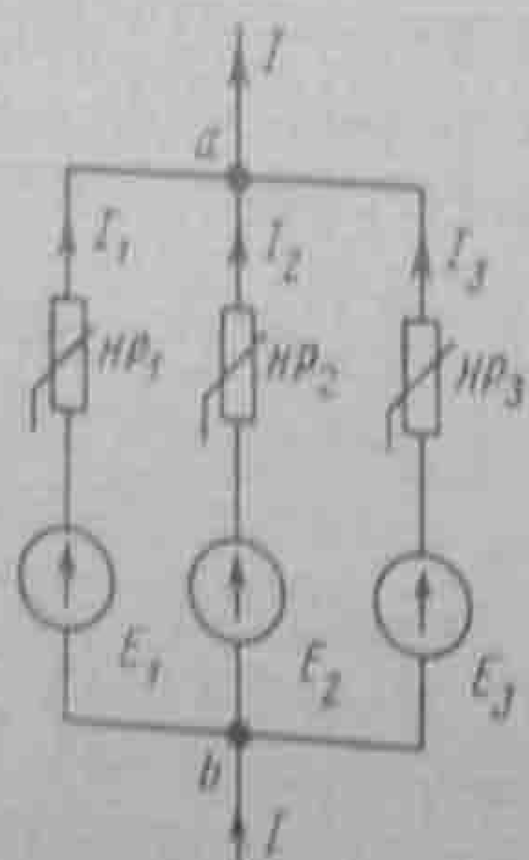



Рис. 13.11

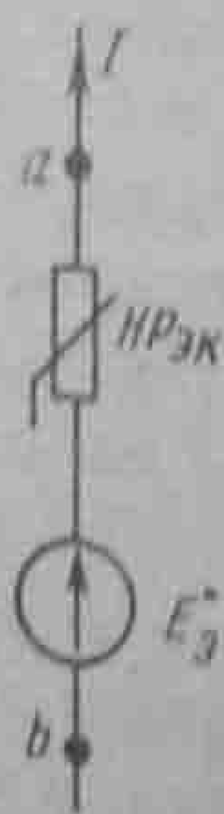



Рис. 13.12

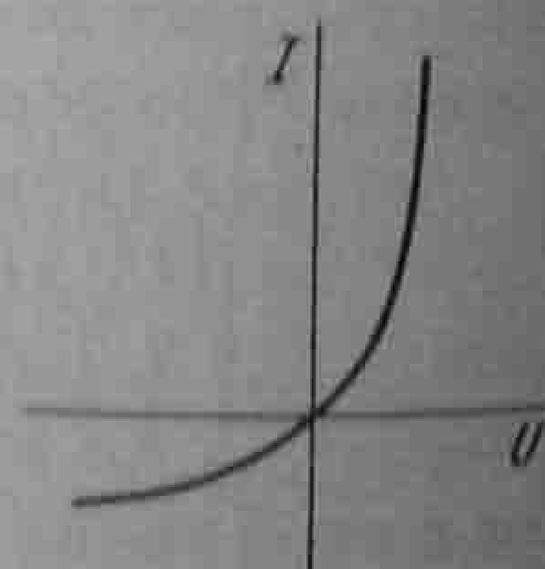



Рис. 13.13



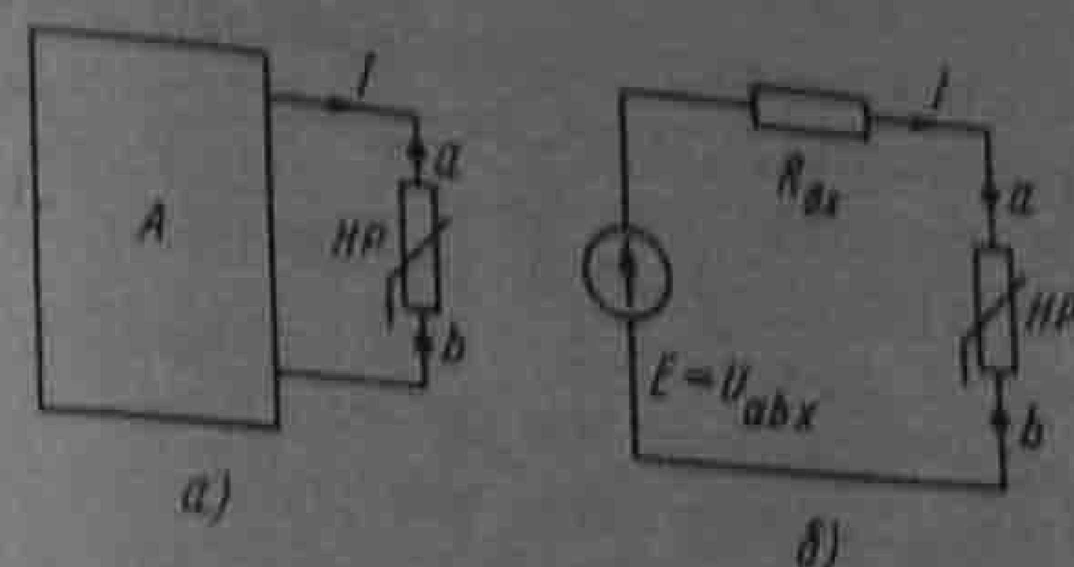



Рис. 13.14

С этой целью выделим ветвь с НР, а всю остальную линейную схему представим в виде активного двухполюсника (рис. 13.14, *а*).

Как известно из § 2.25, схему линейного активного двухполюсника по отношению к зажимам $a$ и $b$ выделенной ветви можно представить в виде последовательного соединения источника ЭДС с ЭДС, равной напряжению на зажимах $ab$ при разомкнутой ветви $ab$ ($U_{abx}$), сопротивления, равного входному сопротивлению $R_{вх}$ линейного двухполюсника, и сопротивления ветви $ab$ (рис. 13.14, *б*).

Определение тока в схеме (рис. 13.14, *б*) не представляет труда и может проводиться в соответствии с § 13.4.

**Пример 131.** Определить ток в ветви $ab$ схемы (рис. 13.15) по методу эквивалентного генератора при $R_1 = R_0 = 27$ Ом; $R_2 = 108$ Ом, $R_3 = 81$ Ом; $R_4 = 54$ Ом; $E = 70$ В. ВАХ НР изображена на рис. 13.16, *а*.

Р е ш е н и е. Размыкаем ветвь и определяем напряжение холостого хода: $U_{abx} = 20$ В.

Для подсчета входного сопротивления $R_{вх}$ линейной части схемы относительно зажимов $ab$ необходимо преобразовать треугольник сопротивлений $R_1, R_2, R_3$ (или $R_4, R_0, R_3$) (рис. 13.15, *б*) в эквивалентную звезду (рис. 13.15, *в*) по формулам (2.35 — 2.37):

$$R_5 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_0} = 18 \text{ Ом}; R_6 = 4{,}45 \text{ Ом};$$

$$R_7 = 18 \text{ Ом}; R_{вх} = R_5 + \frac{(R_6 + R_3)(R_7 + R_4)}{R_6 + R_3 + R_7 + R_4} = 57 \text{ Ом}.$$

Для определения тока в ветви $ab$ схемы (рис. 13.15, *а*) на рис. 13.16, *а* проводим прямую, проходящую через точки $U = U_{abx} = 20$ В, $I = 0$ и $U = 0$, $I = U_{abx}/R_{вх} =$

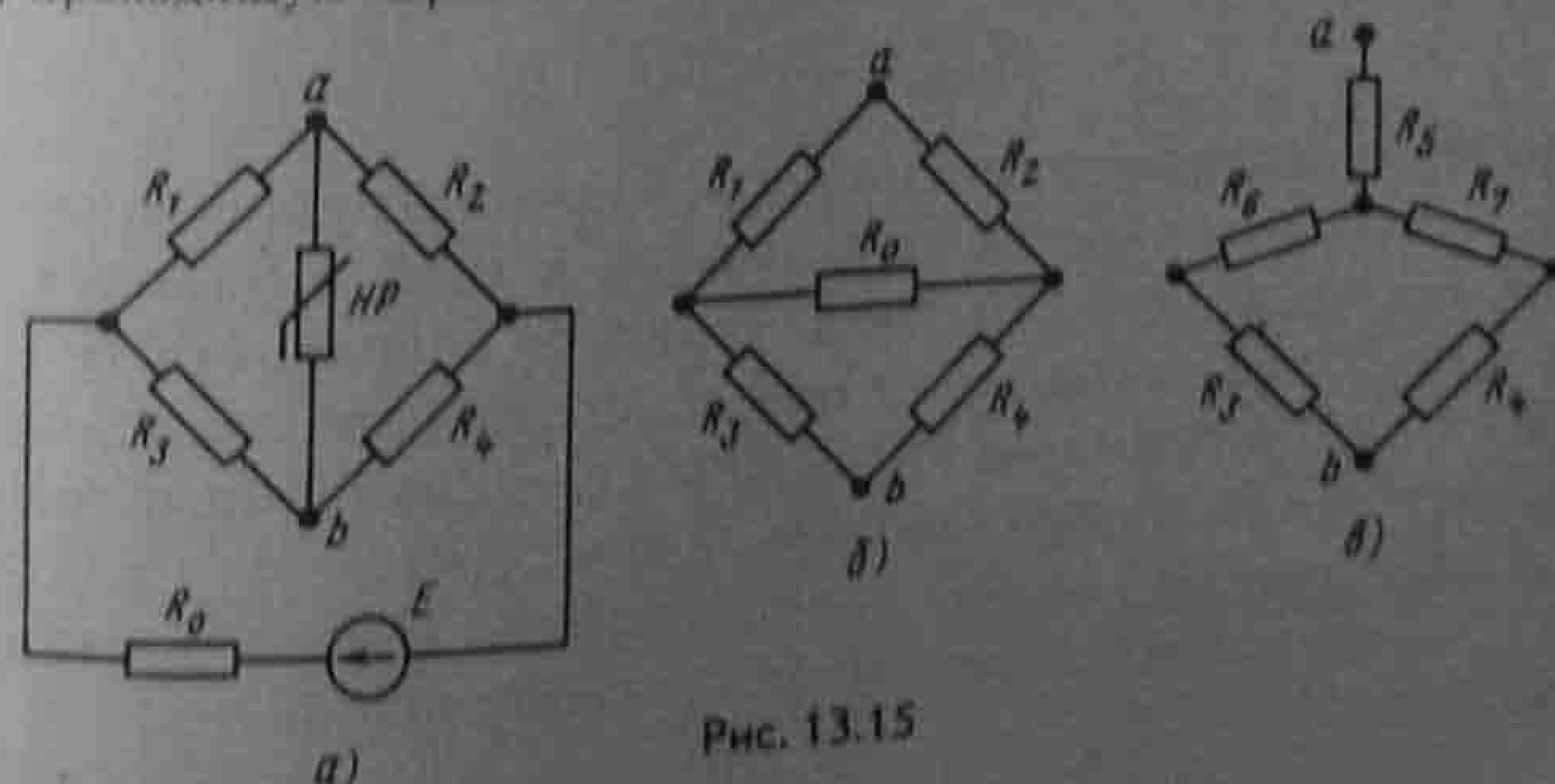



Рис. 13.15

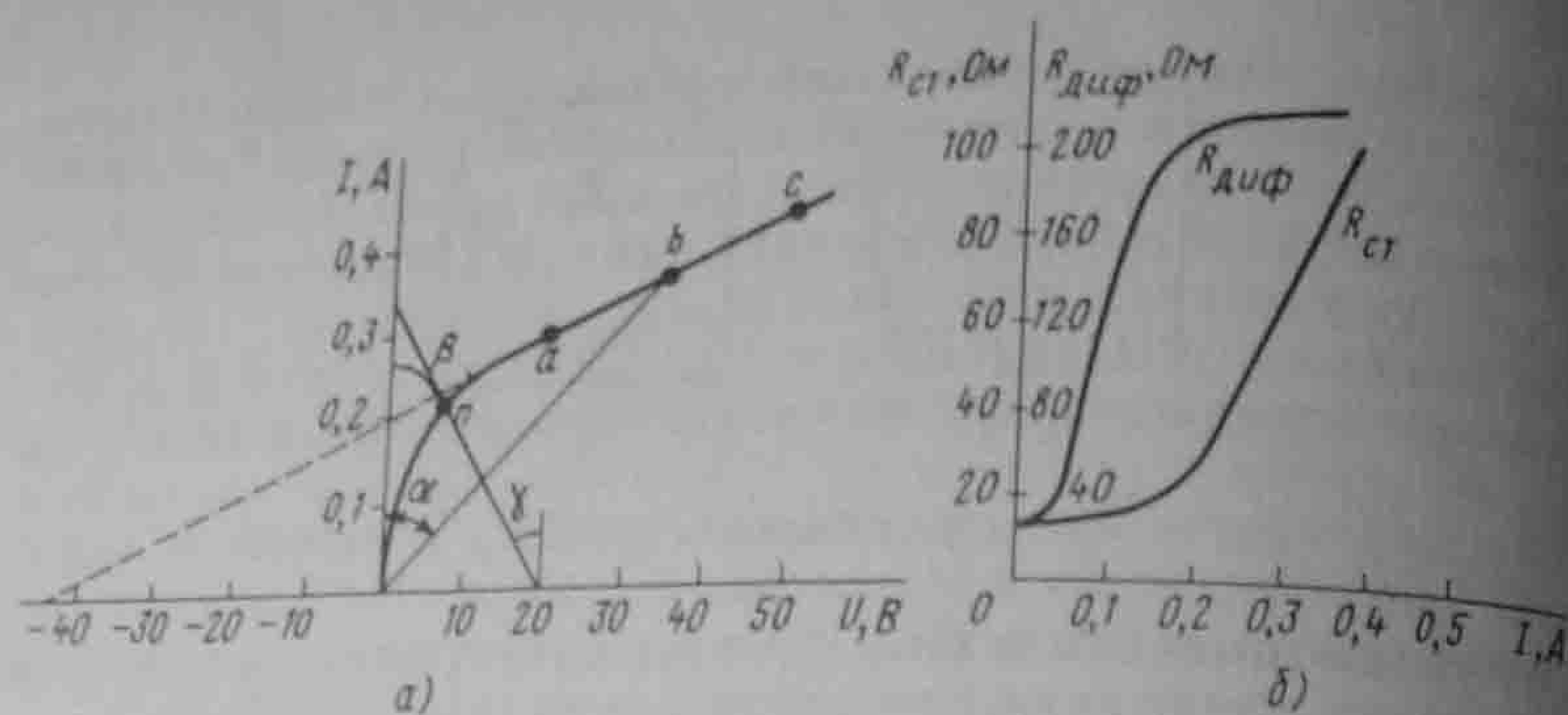



Рис. 13.16

$=0{,}351$ А (угол $\gamma$ наклона этой прямой к вертикали с учетом масштабов по осям равен $R_{вх}$). Точка пересечения этой прямой с ВАХ НР (точка $n$) определяет рабочий режим схемы. Ток $I = 0{,}22$ А.

**§ 13.10. Статическое и дифференциальное сопротивления.** Свойства нелинейного резистора могут быть охарактеризованы либо его ВАХ, либо зависимостями его статического и дифференциального сопротивлений от тока (напряжения).

Статическое сопротивление $R_{ст}$ характеризует поведение НР в режиме неизменного тока. Оно равно отношению напряжения на НР к протекающему по нему току:

$$R_{ст} = U/I. \tag{13.5}$$

Сопротивление $R_{ст}$ численно равно тангенсу угла $\alpha$ между осью ординат и прямой, идущей в точку $b$ (рис. 13.16, $a$), умноженному на отношение масштабов по осям $m_U/m_I$.

При переходе от одной точки ВАХ к соседней статическое сопротивление изменяется.

Под *дифференциальным сопротивлением* $R_{диф}$ принято понимать отношение малого (теоретически бесконечно малого) приращения напряжения $\mathrm{d}U$ на НР к соответствующему приращению тока $\mathrm{d}I$:

$$R_{диф} = \mathrm{d}U/\mathrm{d}I. \tag{13.6}$$

Дифференциальное сопротивление численно равно тангенсу угла $\beta$ (рис. 13.16, $a$) наклона касательной к ВАХ в рабочей точке, умноженному на $m_U/m_I$. Оно характеризует поведение НР при достаточно малых отклонениях от предшествующего состояния, т. е. приращение напряжения на НР связано с приращением тока, проходящего через него, соотношением $\mathrm{d}U = R_{диф}\mathrm{d}I$.

Таким образом, $R_{ст}$ — это сопротивление НР по постоянному току, а $R_{диф}$ — по малой переменной составляющей.



Если ВАХ НР имеет падающий участок, т. е. такой участок, на котором увеличению напряжения на $\Delta U$ соответствует убыль тока на $\Delta I$, что имеет место, например, для электрической дуги (см. ее ВАХ на рис. 13.1, $д$), то дифференциальное сопротивление на этом участке отрицательно.

Из двух сопротивлений ($R_{ст}$ и $R_{диф}$) чаще применяют $R_{диф}$. Его используют, например, при замене НР эквивалентным линейным сопротивлением и источником ЭДС (см. § 13.11), а также при исследовании устойчивости режимов работы нелинейных цепей (см. § 17.3).

**Пример 132.** Построить кривые зависимости $R_{ст}$ и $R_{диф}$ в функции тока $I$ для нелинейного сопротивления, ВАХ которого изображена на рис. 13.16, $a$.

Р е ш е н и е. Кривые построены на рис. 13.16, $б$.

**§ 13.11. Замена нелинейного резистора эквивалентным линейным сопротивлением и ЭДС.** Если заранее известно, что изображающая точка будет перемещаться лишь по определенному участку ВАХ НР и этот участок может быть с известной степенью приближения заменен прямой линией, то НР при расчете может быть заменен эквивалентным линейным сопротивлением и источником ЭДС.

Положим, что рабочая точка перемещается лишь по участку $ab$ (рис. 13.16, $a$, а также рис. 13.17). Для этого участка

$$U = U_0 + I\operatorname{tg}\beta = U_0 + I\frac{m_U}{m_I}R_{диф}. \tag{13.7}$$

Уравнению (13.7) удовлетворяет участок цепи (рис. 13.18). На нем $E = -U_0$ и линейное сопротивление $R = R_{диф}$.

Замена НР линейным сопротивлением и источников ЭДС удобна тем, что после нее вся схема становится линейной и ее работа может быть исследована методами, разработанными для линейных цепей. Однако при этом необходимо внимательно следить за тем, чтобы рабочая точка не выходила за пределы линейного участка ВАХ.

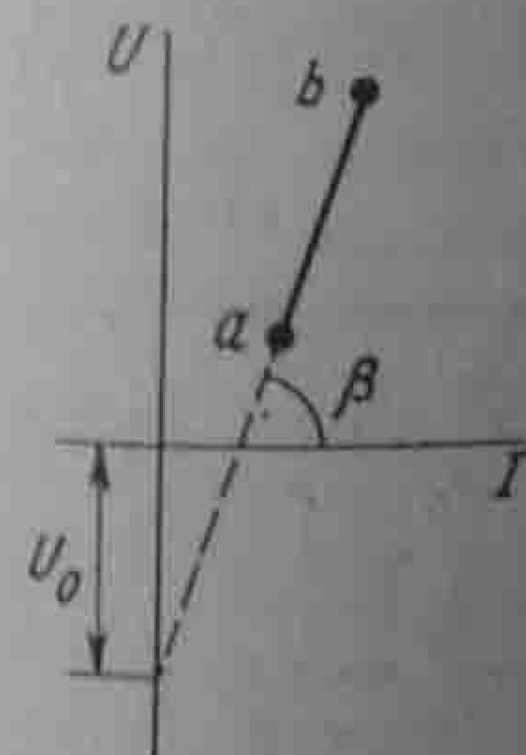



Рис. 13.17

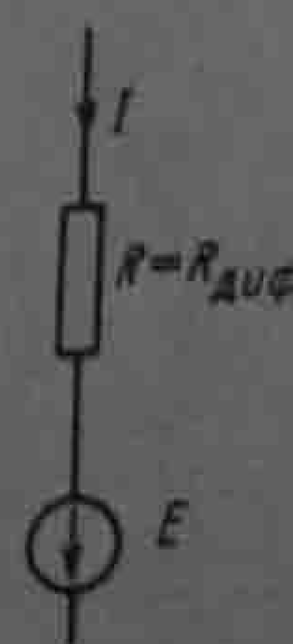



Рис. 13.18

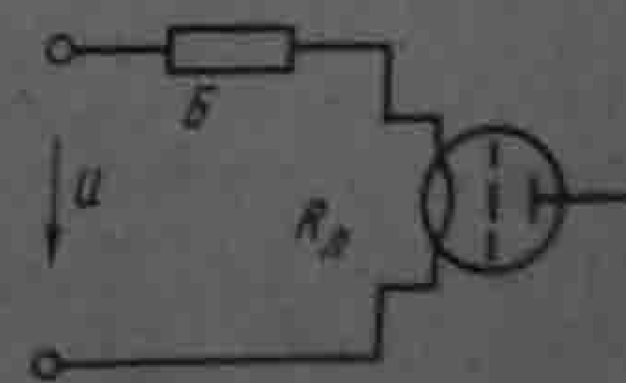



Рис. 13.19

**Пример 133.** Выразить аналитически участок ВАХ (рис. 13.16, *а*) в интервале между точками *а* и *с*.

Решение. Из рис. 13.16, *а* находим $U_0 = -45$ В и $R_{диф} = 220$ Ом. Следовательно, $U \approx -45 + 220I$.

* * *

Нелинейные резисторы в ряде случаев придают электрическим цепям свойства, принципиально недостижимые в линейных цепях, например с их помощью можно осуществить стабилизацию тока, стабилизацию напряжения, усиление постоянного напряжения и др.

**§ 13.12. Стабилизатор тока.** *Стабилизатором тока* называют устройство, которое способно поддерживать в нагрузке неизменный ток при изменении сопротивления нагрузки и напряжения на входе всей схемы.

Стабилизацию постоянного тока можно производить с помощью различных схем. Простейшей схемой стабилизатора тока является схема на рис. 13.19. В ней последовательно с нагрузкой $R_л$ включен бареттер *Б*. На рис. 13.20 приведена ВАХ бареттера.

**Пример 134.** Бареттер используют для стабилизации тока накала электронной лампы. Номинальный ток накала 0,3 А, напряжение 6 В. Определить, в каких пределах можно изменять напряжение $U$ на входе схемы, чтобы ток нити накала лампы оставался неизменным и равным 0,3 А.

Решение. Сопротивление нити накала лампы $R_л = 6/0{,}3 = 20$ Ом.

Проводим через точки *a* и *b* (рис. 13.20), ограничивающие участок бареттирования, две прямые под углом $\alpha$($\mathrm{tg}\,\alpha$ с учетом масштабов по осям численно равен 20) к вертикали. По рис. 13.20 определяем, что напряжение $U$ можно изменять в интервале 23 — 41 В.

**Пример 135.** В схему предыдущей задачи введено последовательное сопротивление $R_1$. Полагая напряжение на входе схемы неизменным и равным 41 В, найти, до какого максимального значения $R_1$ в схеме имеет место стабилизация тока.

Решение. Если $R_1 = 0$ и $U = 41$ В, то рабочий режим характеризуется положением точки *b* (рис. 13.20). С увеличением сопротивления $R_1$ рабочая точка на ВАХ перемещается по направлению к точке *a*. В граничном режиме (точка *a*)

$$R_{1max} + R_1 = \mathrm{tg}\,\alpha_2 \frac{m_U}{m_I} = 80 \text{ Ом. Следовательно, } R_{1max} = 80 - 20 = 60 \text{ Ом.}$$

**§ 13.13. Стабилизатор напряжения.** *Стабилизатором напряжения* называют устройство, напряжение на выходе которого $U_н$ поддерживается постоянным или почти постоянным при изменении сопротивления нагрузки $R_н$ или напряжения $U_1$ на входе устройства.

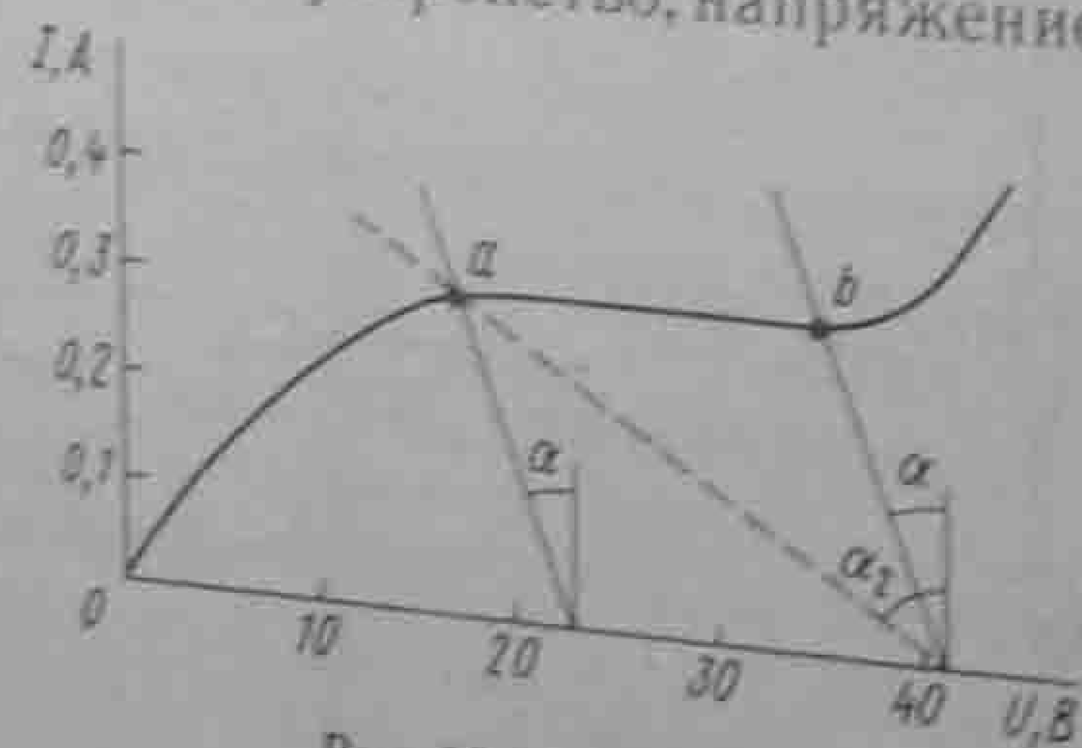


Рис. 13.20

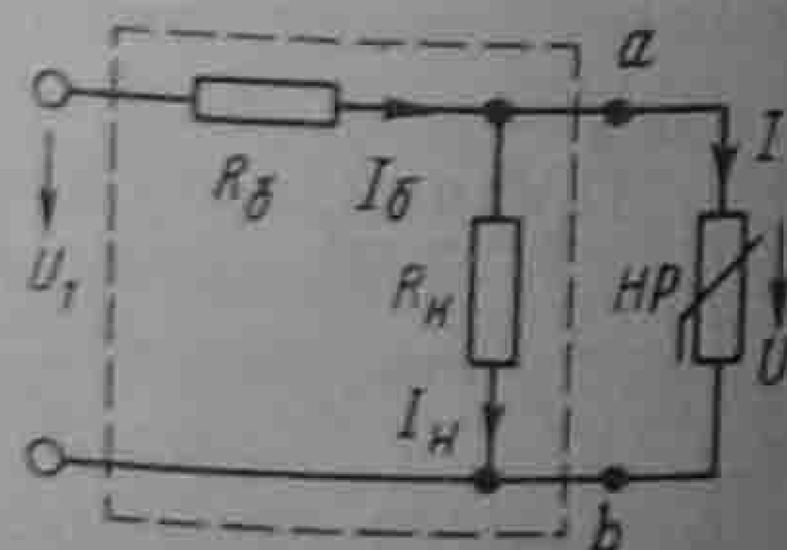


Рис. 13.21



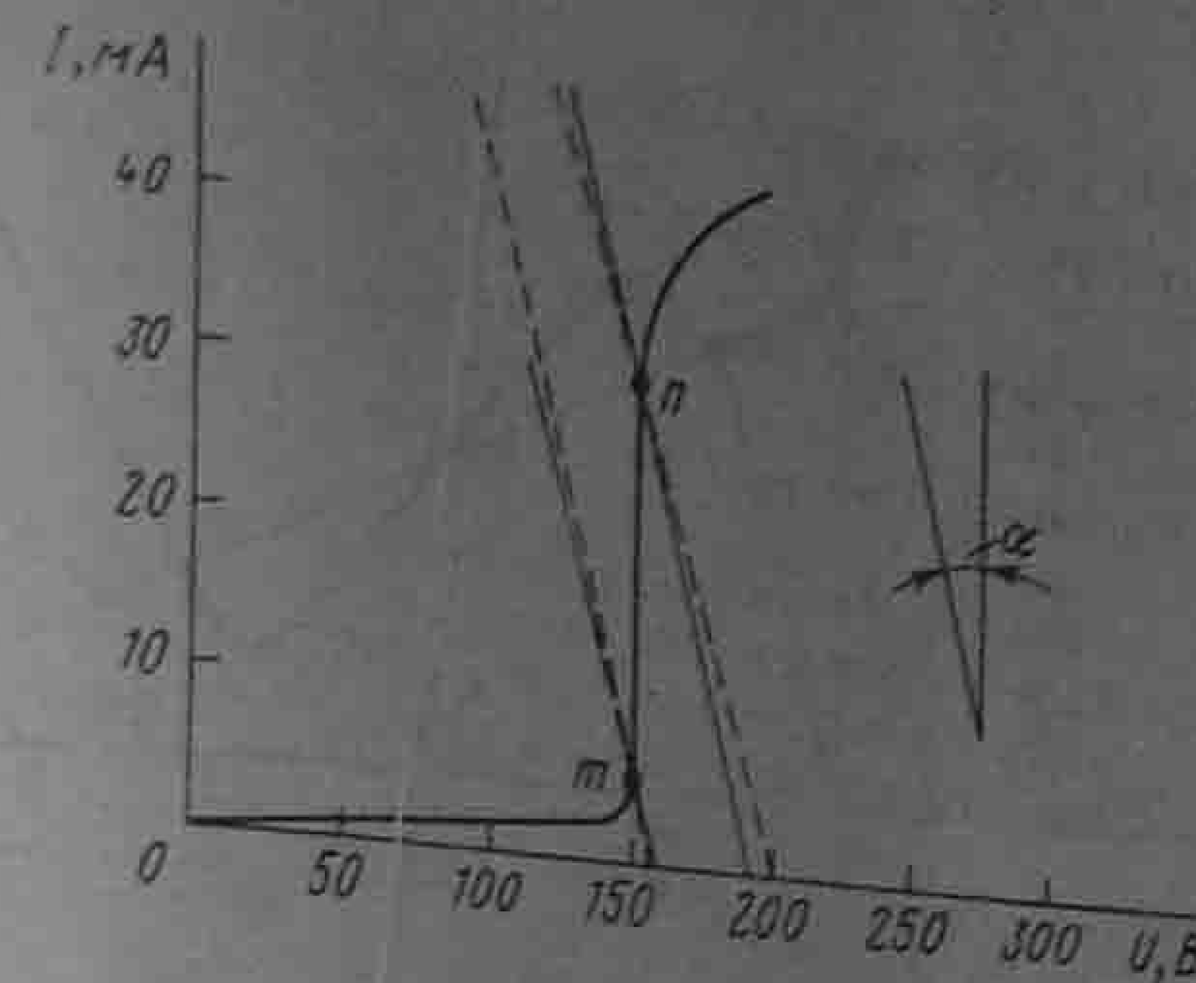


Рис. 13.22

Схема простейшего стабилизатора напряжения приведена на рис. 13.21. В качестве НР используется стабилитрон; $R_б$ — балластное сопротивление. На рис. 13.22 изображена ВАХ стабилитрона.

При анализе работы стабилизатора определяют пределы допустимых изменений $U_1$ при $R_н = \mathrm{const}$, а также исследуют работу стабилизатора при одновременном изменении $U_1$ и $R_н$.

Для оценки качества работы стабилизатора иногда пользуются понятием *коэффициента стабилизации*. Под ним понимают отношение относительного приращения напряжения на входе стабилизатора ($\Delta U_1/U_1$) к относительному приращению напряжения на выходе стабилизатора ($\Delta U_н/U_н$).

**Пример 136.** В схеме на рис. 13.21 $R_н = 5$ кОм; $R_б = 2$ кОм. ВАХ стабилитрона соответствует рис. 13.22. Определить границы допустимого изменения $U_1$, при которых на выходе стабилитрона поддерживается стабилизированное напряжение 150 В.

Решение. Воспользуемся методом эквивалентного генератора. Разомкнем ветвь стабилитрона и найдем напряжение холостого хода:

$$U_{abx} = U_1 \frac{R_н}{R_н + R_б} = 0{,}713 U_1; \quad R_{вхab} = \frac{R_н R_б}{R_н + R_б} = 1427 \text{ Ом.}$$

На рис. 13.22 проведем две прямые (сплошные) линии через точки *m* и *n* ВАХ стабилитрона так, чтобы тангенс угла (образованного ими с вертикалью), умноженный на $m_U/m_I$, был равен $R_{вхab} = 1427$ Ом.

Отрезки, отсекаемые этими прямыми на оси абсцисс, равны $U_{abx}$. Из рис. 13.22 находим $0{,}713 U_{1min} = 157$ В, или $U_{1min} = 220$ В. Аналогично, $0{,}713 U_{1max} = 192$ В, или $U_{1max} = 269$ В. Следовательно, напряжение $U_1$ может изменяться от 220 до 269 В.

**Пример 137.** Для схемы на рис. 13.21 при $R_б = 2{,}5$ кОм (ВАХ стабилитрона см. на рис. 13.22) и $U_1 = 250$ В определить, в каких пределах можно изменять сопротивление нагрузки $R_н$, чтобы стабилизатор мог выполнять свои функции по стабилизации выходного напряжения.

Решение. Составим уравнение по второму закону Кирхгофа: $I_б R_б + U = U_1$. Подставив в него $I_б = I_н + I = \frac{U}{R_н} + I$, получим

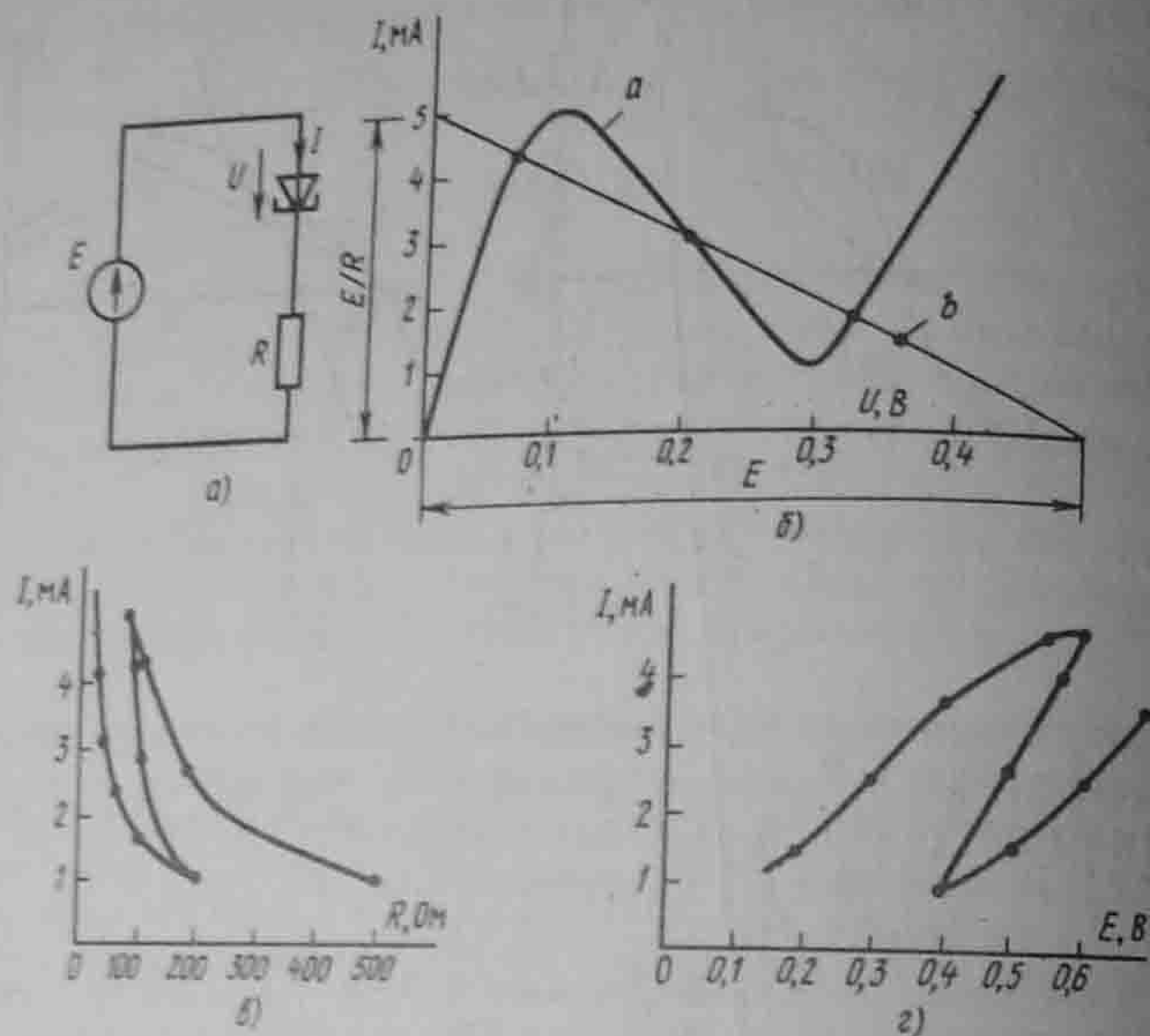



Рис. 13.23

$$U(1 + R_б/R_н) + IR_б = U_1. \qquad (а)$$

Из (а) следует, что при $U = 0$ $I = U_1/R_б = 250/2000 = 125$ мА.

Отметим положение этой точки на оси ординат (рис. 13.22) и пунктиром проведем из нее два луча, чтобы они проходили через точки $m$ и $n$, ограничивающие участок стабилизации. Решим уравнение (а) относительно $R_н$:

$$R_н = \frac{U}{(U_1 - U)/R_б - I}. \qquad (б)$$

Уравнение (б) применим дважды: один раз, используя координаты точки $m$, другой раз — точки $n$. Для точки $m$ $I = 5$ мА; $U = 150$ В и $R_{н1} = 4{,}28$ кОм. Для точки $n$ $I = 30$ мА; $U = 157$ В, $R_{н2} = 9{,}52$ кОм. Таким образом, сопротивление можно изменять в пределах от 4,28 до 9,52 кОм.

**Пример 138.** В схеме на рис. 13.23, *а* к источнику ЭДС $E$ присоединены туннельный диод (его ВАХ — кривая *a* на рис. 13.23, *б*) и линейный резистор $R$. Построить зависимость: 1) тока $I$ от изменения $R$ при $E = 0{,}5$ В; 2) тока $I$ от ЭДС $E$ при $R = 100$ Ом.

Решение. Построение для случая 1 дано на рис. 13.23, *в* и для случая 2 — на рис. 13.23, *г*. Кривые построены по точкам пересечения ВАХ диода (кривой *a* рис. 13.23, *б*) с ВАХ резистора R (прямая *b*, ее координаты $U = 0$, $I = E/R$, и $U = E$, $I = 0$). В случае 1 проводим несколько прямых при различных $R$, в случае 2 прямую *b* переносим параллельно самой себе.

**§ 13.14. Построение ВАХ участков цепей, содержащих узлы с подтекающими извне токами.** На рис. 13.24, *а* изображен участок цепи, между точками *a* и *b* которого имеются НР1 и НР2, а к узлу $m$ подтекает ток $I$ от непоказанной на рисунке части схемы. ВАХ НР1 и НР2 известны (рис. 13.24, *б*). Требуется построить семейство ВАХ $I_1 = f(U_{ab})$ при нескольких фиксированных значениях тока $I$. При любом $U_{ab}$ ток $I_1$ больше тока $I_2$ на ток $I$. Это учтено при построениях на рис. 13.24, *г* тем, что начало



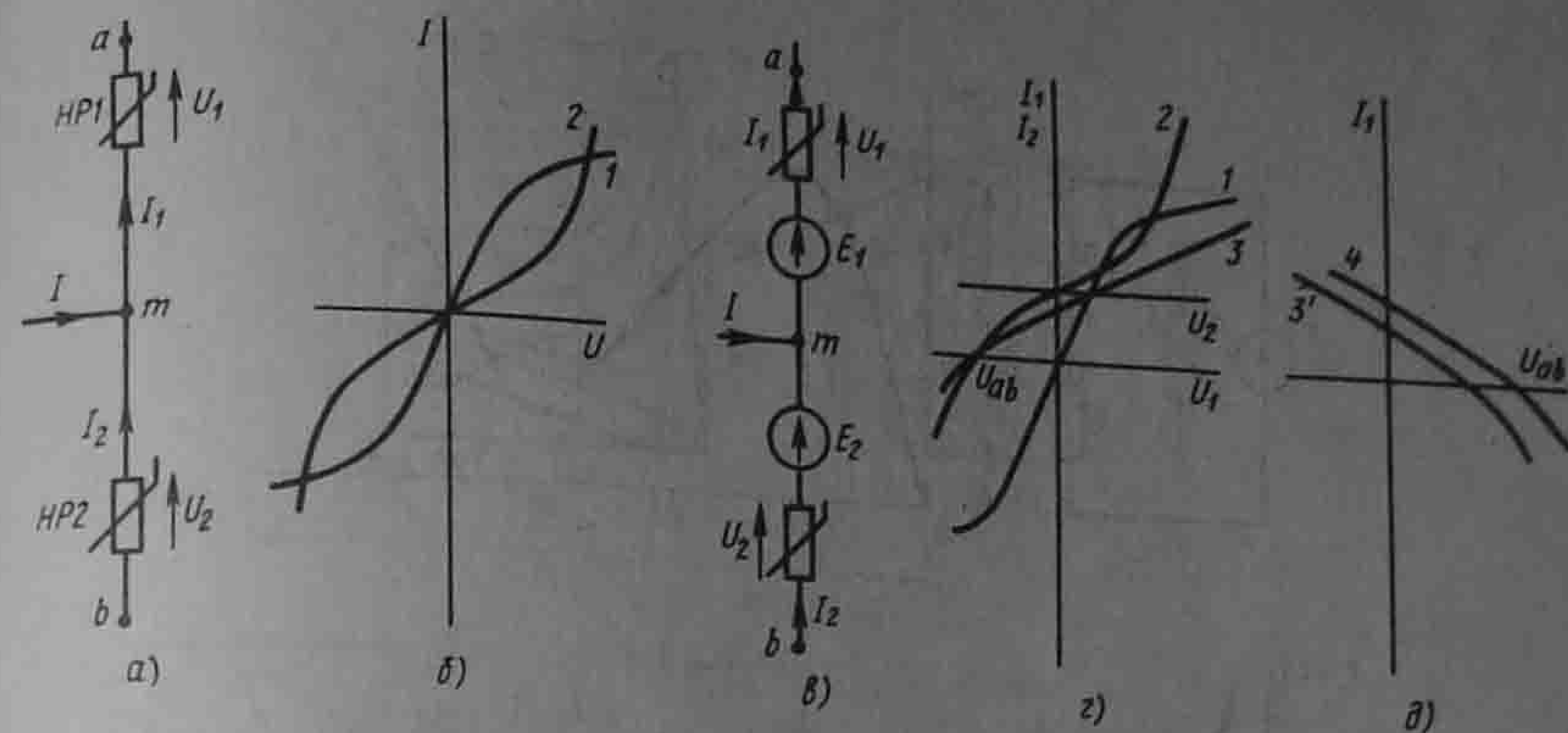



Рис. 13.24

кривой $I_2 = f(U_2)$ смещено выше начала кривой $I_1 = f(U_1)$ на ток $I$. Из рис. 13.24, *а* следует, что $U_{ba} = U_1 + U_2$ или $U_{ab} = -(U_1 + U_2)$. Для построения кривой $I_1(U_{ba})$ при $I = \text{const}$ задаемся произвольным током $I_1$, проводим через это значение $I_1$ горизонталь и суммируем абсциссы пересечения этой горизонтали с абсциссами кривых *1* и *2*. Получаем кривую *3*. Кривая $I_1 = f(U_{ab})$ (кривая *3′*) на рис. 13.24, *д* получается из кривой *3* (рис. 13.24, *г*) зеркальным отражением относительно вертикальной оси. При ином значении $I$ будет новая кривая $I_1 = f(U_{ab})$. Если на участках *1* и *2* будут включены ЭДС $E_1$ и $E_2$ (рис. 13.24, *в*), то $U_{ab} = -(U_1 + U_2) + E_1 + E_2$.

ВАХ $I_1 = f(U_{ab})$ в этом случае получаем параллельным переносом кривой *3* (рис. 13.24, *д*) на $(E_1 + E_2)$ — кривая *4*.

**§ 13.15. Диакоптика нелинейных цепей.** Под *диакоптикой* понимают расчет сложных цепей по частям, с учетом влияния частей друг на друга.

Проиллюстрируем идею метода на примере схемы (рис. 13.25, *а*). Это мостовая схема с шестью ветвями и шестью НР. Всю схему, за исключением ветви *5* с током $I_5$, представим на рис. 13.25, *б* некоторым нелинейным двухполюсником *1*, а ветвь *5* — двухполюсником *2*. Общим для них является ветвь *ab* с током $I_5$.

Если на рис. 13.25, *в* построить кривую $I_5 = f(U_{ab})$ — кривую *1* — для двухполюсника *1* и кривую $I_5 = f(U_{ab})$ — кривую *2* — для двухполюсника *2*, то точка пересечения кривых *1* и *2* удовлетворяет работе обеих частей схемы, т. е. является решением задачи.

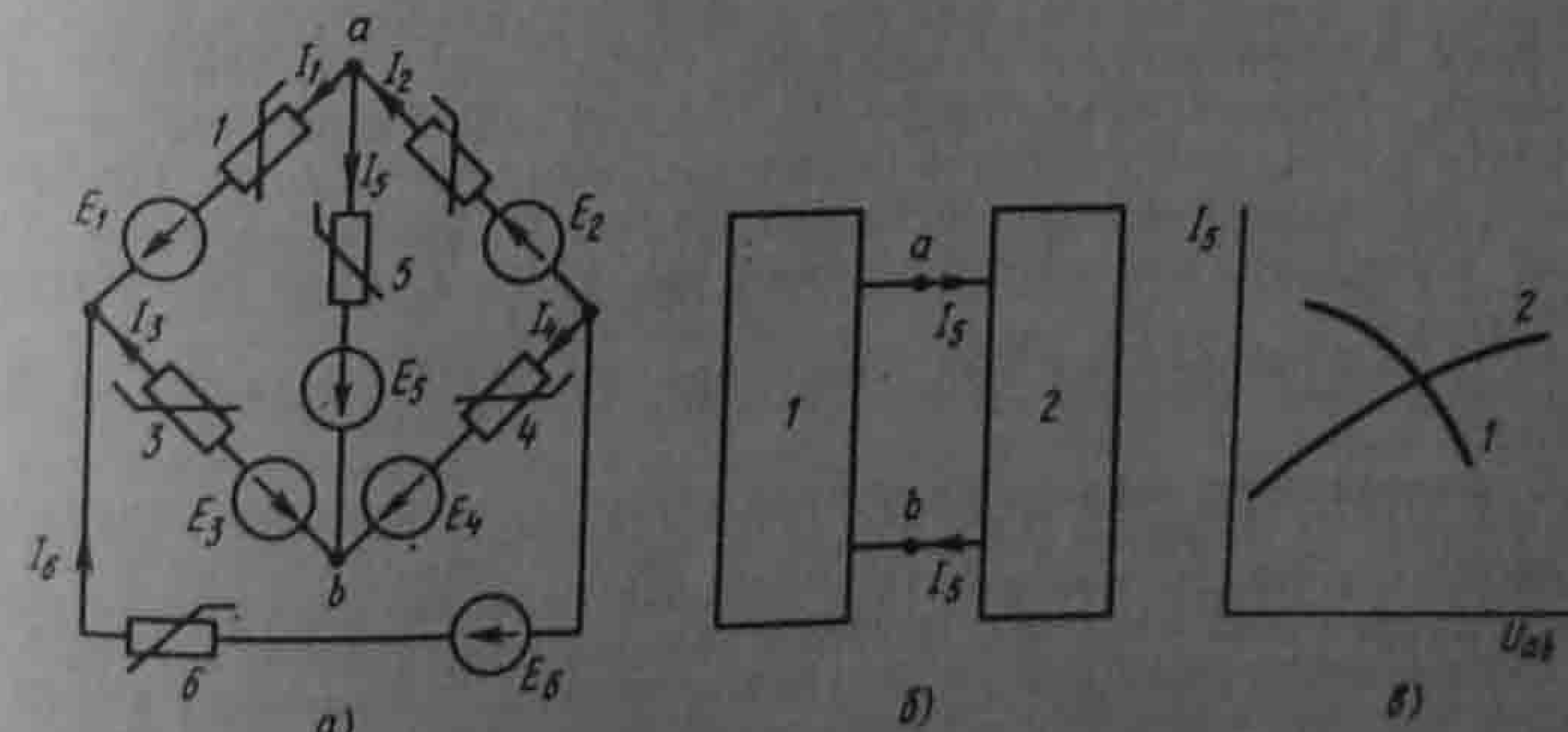



Рис. 13.25

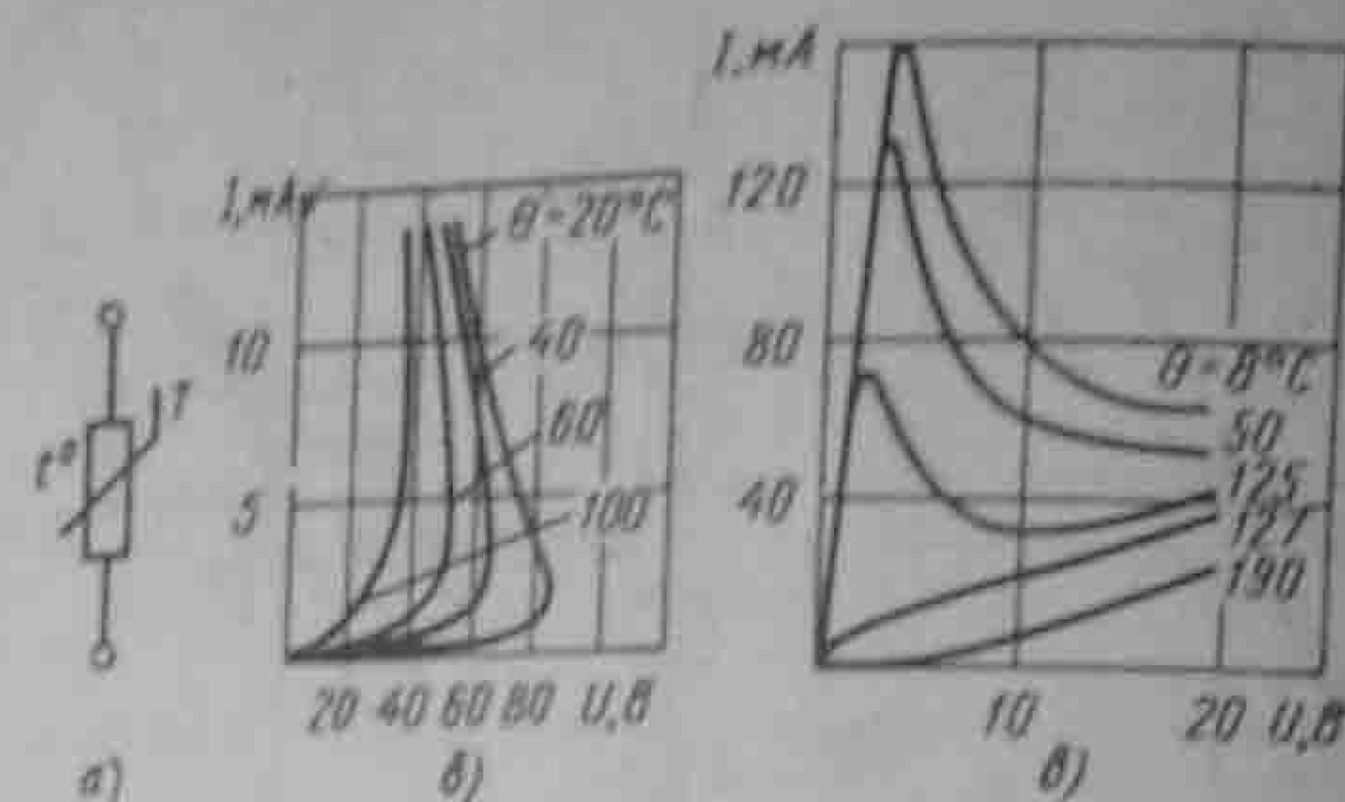



Рис. 13.26

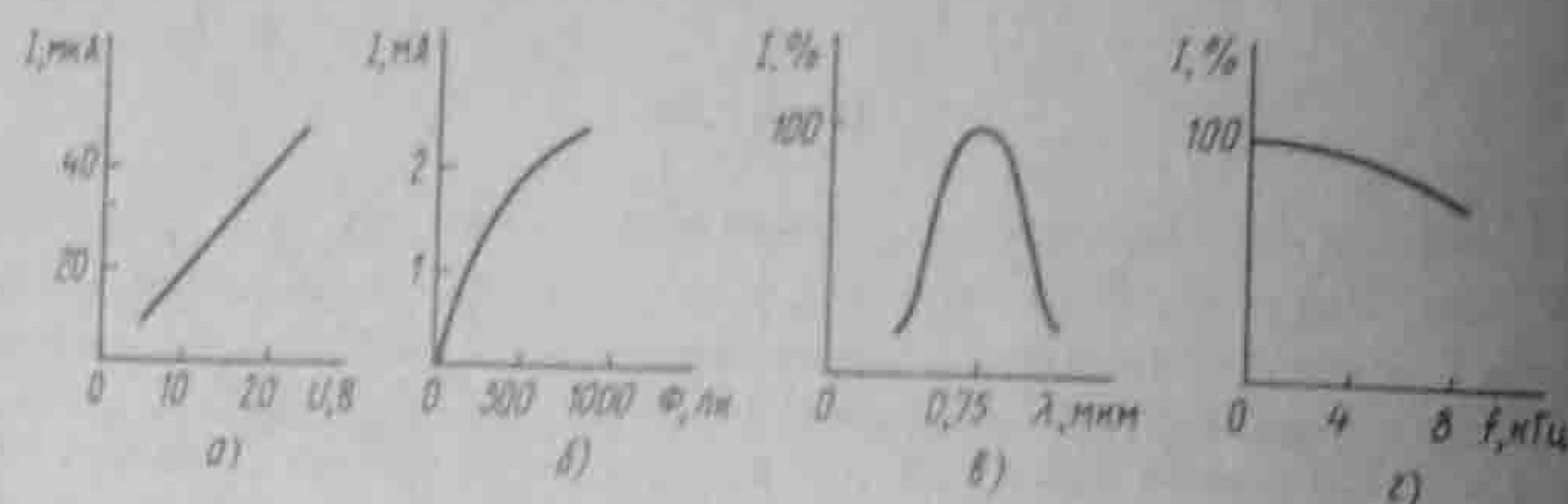



Рис. 13.27

Для получения кривой 1 необходимо в соответствии с § 13.14 сначала построить семейство ВАХ ветвей 1 и 2 $I_1 = f(U_{cd})$, ВАХ ветвей 3 и 4 $I_3 = f(U_{cd})$ при различных $I_5$. Затем учесть, что $I_1 + I_3 + I_6 = 0$ для каждого $I_5$. Из этого условия определить $U_{cd}$, $I_1$, $I_3$ для каждого фиксированного $I_5$ и по ним построить $I_5 = f(U_{ab})$.

**§ 13.16. Терморезисторы.** Терморезисторы представляют собой НР, сопротивление которых сильно зависит от температуры $T$ тела терморезистора. Так как эта температура зависит не только от тока, проходящего по терморезистору, но и от температуры окружающей среды θ, то они представляют собой температурно управляемые НР. Другими словами, один и тот же терморезистор обладает различными ВАХ при различных θ. Ток, нагревающий терморезистор, может проходить по самому терморезистору либо по нагревательной обмотке, электрически изолированной от него.

Терморезисторы подразделяют на два класса: термисторы (с отрицательным температурным коэффициентом) и позисторы (с положительным температурным коэффициентом). Термисторы изготовляют из оксидов меди и марганца, позисторы — из титаната бария, легированного редкоземельными металлами. Постоянная времени нагрева терморезисторов составляет обычно несколько десятков секунд. Обозначают терморезисторы в соответствии с рис. 13.26, *а*, ставя соответственно букву *Т* или *П*.

На рис. 13.26, *б* изображены ВАХ термистора типа ММТ-4, а на рис. 13.26, *в* — позистора СТ5-1.

**§ 13.17. Фоторезистор и фотодиод.** *Фоторезистор* — это резистор, управляемый световым потоком Ф. Действие его основано на внутреннем фотоэффекте. ВАХ при неизменном потоке показана на рис. 13.27, *а*, люкс-амперная характеристика при неизменном напряжении — на рис. 13.27, *б*, спектральная характеристика $I = f(\lambda)$ (ток — в относительных единицах, λ — длина волны) при неизменном $U$ и Ф — на рис. 13.27, *в*, частотная характеристика $I = \varphi(f)$ при неизменном Ф и $U$ — на рис. 13.27, *г*.



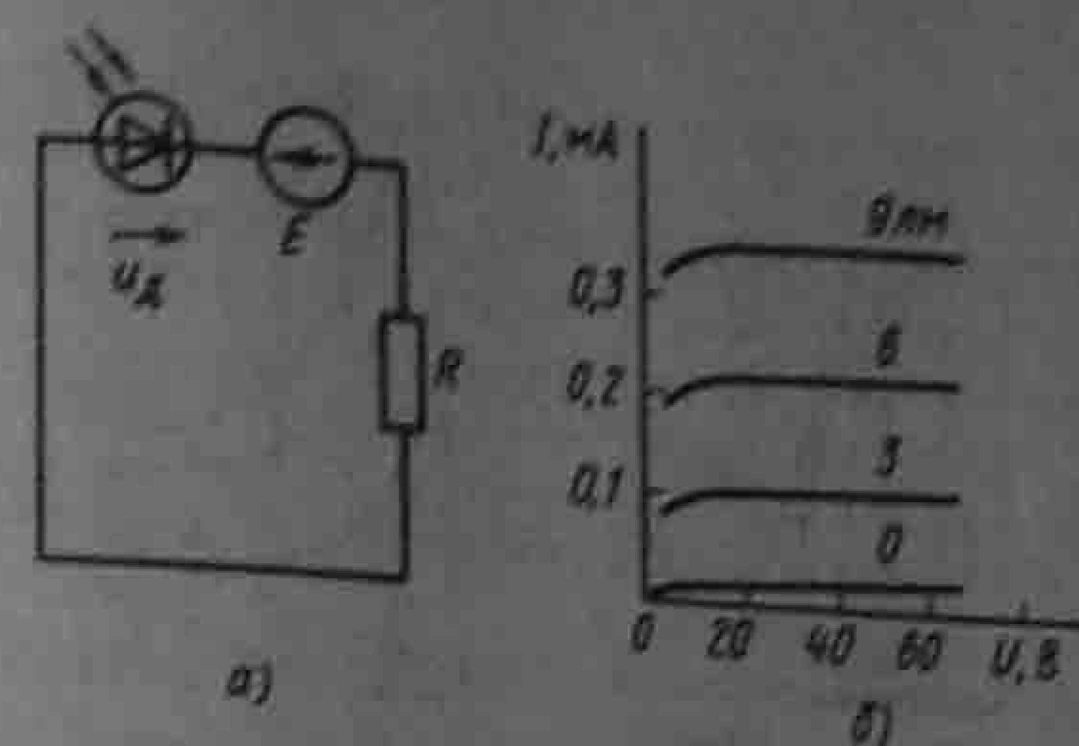



Рис. 13.28

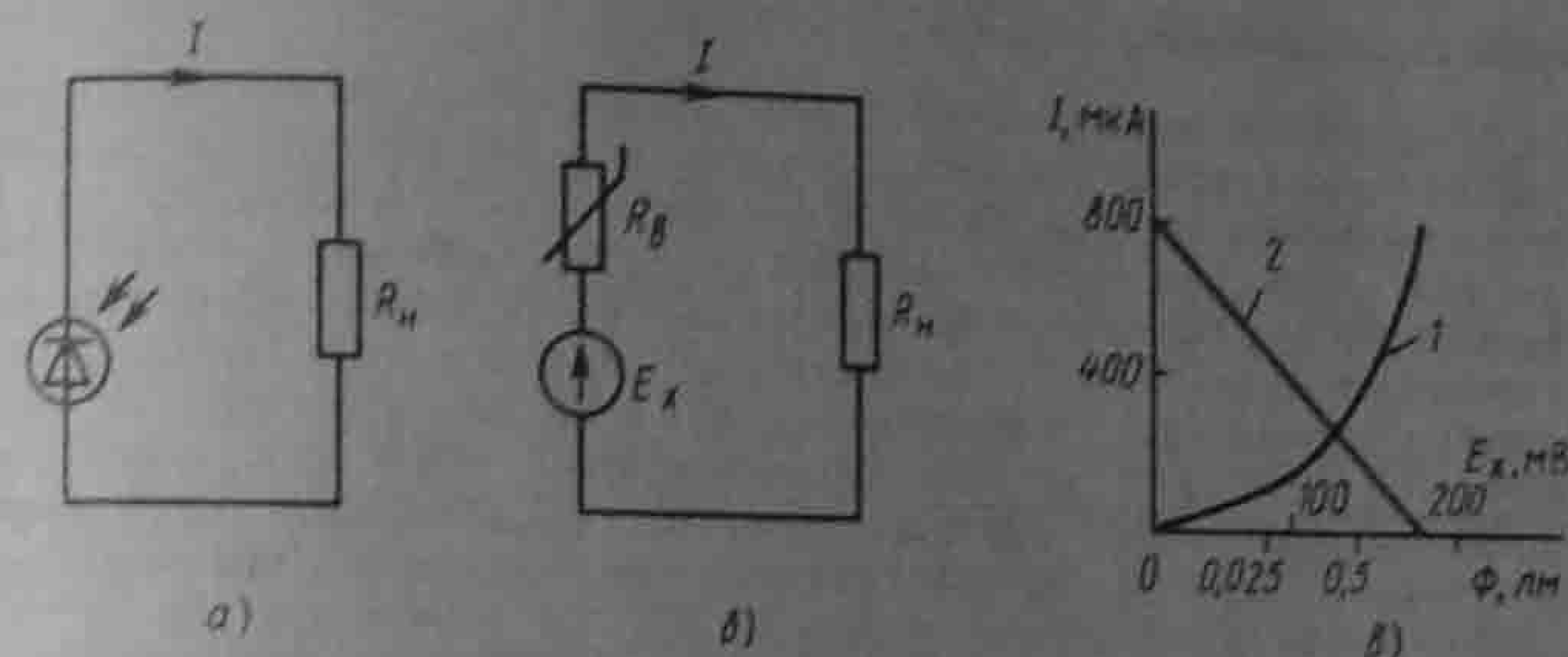



Рис. 13.29

*Фотодиод* (ФД) — это германиевый или кремниевый диод, обратный ток *p-n*-перехода которого зависит от освещенности перехода. Работа его основана на вентильном фотоэффекте.

ФД могут работать с внешним источником (схема на рис. 13.28, *а*) и без него (рис. 13.29, *а*). ВАХ одного из типов серно-таллиевого ФД при различных Ф изображена на рис. 13.28, *б*.

При работе без внешнего источника питания фотогальваническая ЭДС достигает 0,1 — 0,2 В и более. Схема замещения для рис. 13.29, *а* изображена на рис. 13.29, *б*. ФД на нем представлен источником ЭДС холостого хода $E_x$ и внутренним сопротивлением $R_в$. ЭДС $E_x$ — нелинейная функция светового потока Ф. ВАХ $R_в$ — кривая 1 на рис. 13.29, *в*, а прямая 2 — ВАХ $R_н$ при $E_x = 0{,}2$ В и $R_н = 250$ Ом. Пересечение кривой 1 с прямой 2 определяет рабочий режим.

**§ 13.18. Передача максимальной мощности линейной нагрузке от источника с нелинейным внутренним сопротивлением.** В схеме на рис. 13.29, *б* линейной нагрузке сопротивлением $R_н$ передается мощность от источника ЭДС через резистор $R_в$, имеющий нелинейную ВАХ (кривая 1 на рис. 13.29, *в*). Обозначим через $U_{Rв}$ — напряжение на нелинейном резисторе. Мощность, выделяющаяся в нагрузке, $P_н = IR_нI = (E_x - U_{Rв})I$. Возьмем производную $\frac{dP_н}{dI}$ и приравняем ее нулю: $\frac{dP_н}{dI} = E_x - U_{Rв} - I\frac{dU_{Rв}}{dI} = 0$. Учтем, что $E_x - U_{Rв} = IR_н$, а $\frac{dU_{Rв}}{dI} = R_{диф}$ представляет собой дифференциальное сопротивление нелинейного резистора. Следовательно, максимальная мощность передается нагрузке, когда в рабочей точке $R_н = R_{диф}$.

Если в схеме рис. 13.29, *б* нелинейным будет не только внутреннее сопротивление источника питания, но и сопротивление нагрузки, то нагрузке будет передаваться максимальная мощность (энергия), когда в рабочей точке статическое сопротивление нагрузки равно дифференциальному сопротивлению источника питания (доказывается аналогично).

**§ 13.19. Магниторезисторы и магнитодиоды.** *Магниторезисторы* — это резисторы, сопротивлением которых управляют внешним магнитным полем индукции $\vec{B}$, направленным перпендикулярно направлению протекания тока через резистор. Электроны в теле магниторезистора находятся в перекрестных магнитном поле индукции $\vec{B}$ и электрическом поле напряженностью $\vec{E}$ и движутся не по напряженности поля $\vec{E}$, а по кривой, напоминающей циклоиду (см. § 26.7), за счет чего путь их, а следовательно, и сопротивление увеличиваются. Выполняют их в виде дисков или пленок. На рис. 13.30, *а* изображена ВАХ магниторезистора из антимонида индия, а на рис. 13.30, *б* — из арсенида индия.

*Магнитодиоды* — это диоды, в которых магнитное поле изменяет подвижность и направление движения электронов и дырок. На рис. 13.30, *в* изображена ВАХ магнитодиода КД301Ж при $B = 0$ (кривая *1*) и при $B = 0{,}3$ Тл (кривая *2*).

### Вопросы для самопроверки

1. Дайте определения следующим понятиям: нелинейный резистор, нелинейная электрическая цепь, статическое и дифференциальное сопротивления. **2.** Дайте определение неуправляемых НР. 3. Качественно изобразите ВАХ известных вам типов неуправляемых и управляемых НР. 4. Для каких известных вам типов НР дифференциальное сопротивление может быть отрицательным? **5.** Может ли для реальных НР статическое сопротивление быть отрицательным? **6.** В чем заключается препятствие, затрудняющее применять метод контурных токов или метод узловых потенциалов для расчета сложных разветвленных нелинейных цепей? **7.** Как заменить несколько параллельных ветвей с НР и источниками ЭДС на одну эквивалентную? Определите характеристики элементов эквивалентной ветви. **8.** Перечислите этапы расчета нелинейных цепей (НЦ) методом двух узлов и методом эквивалентного генератора. **9.** В чем ограниченность метода замены НР эквивалентным линейным сопротивлением и источником ЭДС? 10. Перечислите свойства, которыми при определенных условиях могут обладать НЦ и не обладают линейные цепи. **11.** Охарактеризуйте свойства термисторов и позисторов, фото- и магниторезисторов. **12.** Поясните идею расчета схем с применением диакоптики. **13.** В чем отличие условий передачи активной мощности нагрузке от источника с нелинейным внутренним сопротивлением и от источника с линейным сопротивлением? **14.** Решите задачи 2.4, 2.8, 2.13, 2.14, 2.15, 2.20, 2.22.

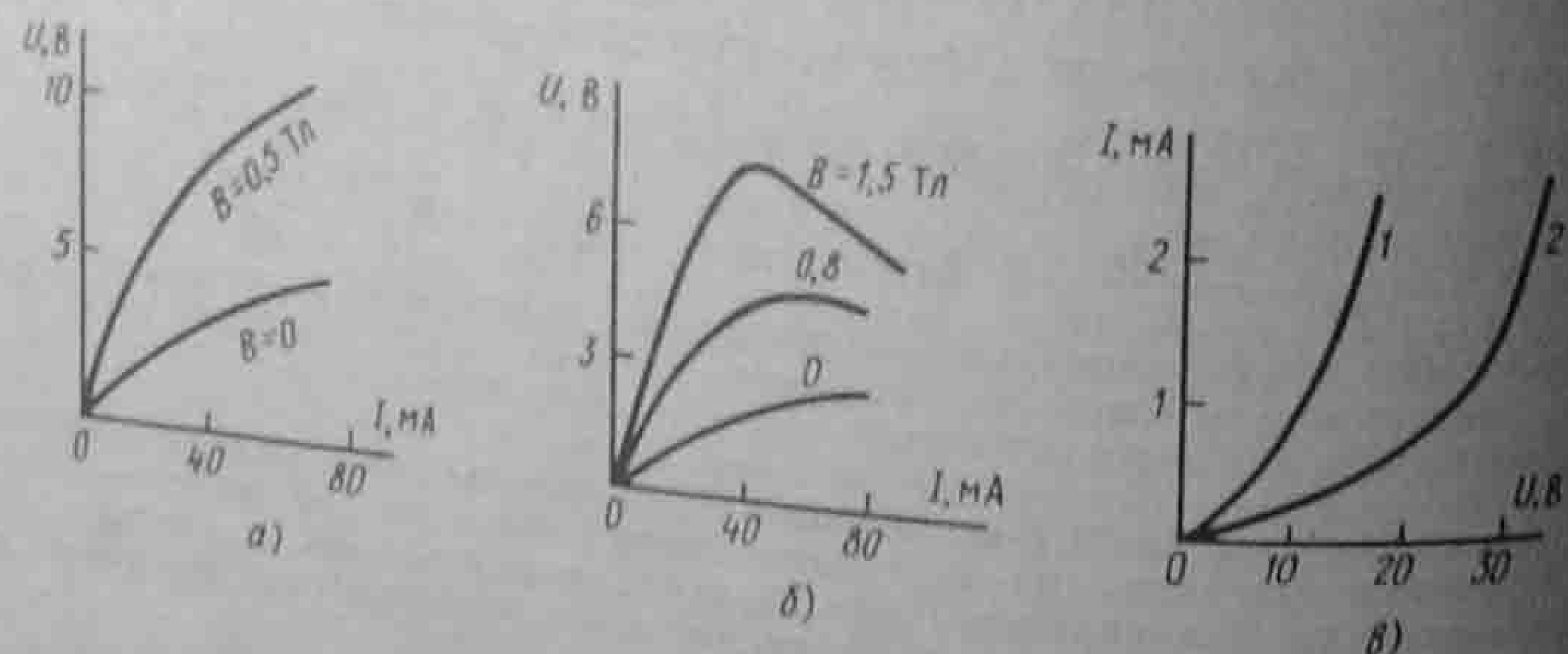



Рис. 13.30



## Глава четырнадцатая

# МАГНИТНЫЕ ЦЕПИ

**§ 14.1. Подразделение веществ на сильномагнитные и слабомагнитные.** Из курса физики известно, что все вещества по их магнитным свойствам подразделяют на диамагнитные, парамагнитные, ферромагнитные, ферримагнитные и антиферромагнитные. У диамагнитных веществ относительная магнитная проницаемость $\mu_r < 1$, например для висмута $\mu_r = 0{,}99983$, у парамагнитных веществ $\mu_r > 1$, например для платины $\mu_r = 1{,}00036$. У ферромагнитных веществ (железо, кобальт и их сплавы) $\mu_r$ много больше единицы (например, $10^4$, а у некоторых материалов даже до $10^6$). У ферримагнитных веществ $\mu_r$ того же порядка, что и у ферромагнитных, а у антиферромагнитных веществ $\mu_r$ того же порядка, что и у парамагнитных.

При решении большинства электротехнических задач достаточно подразделять все вещества не на перечисленные группы, а на сильномагнитные, у которых $\mu_r \gg 1$, и на слабомагнитные (практически немагнитные), у которых $\mu_r \approx 1$.

**§ 14.2. Основные величины, характеризующие магнитное поле.** Основными векторными величинами, характеризующими магнитное поле, являются магнитная индукция $\vec{B}$ и намагниченность $\vec{J}$[1].

*Магнитная индукция* $\vec{B}$ — это векторная величина, определяемая по силовому воздействию магнитного поля на ток (см. гл. 21).

*Намагниченность* $\vec{J}$ — магнитный момент единицы объема вещества.

Кроме этих двух величин магнитное поле характеризуется *напряженностью магнитного поля* $\vec{H}$.

Три величины — $\vec{B}, \vec{J}, \vec{H}$ — связаны друг с другом следующей зависимостью[2]:

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{J}). \tag{14.1}$$

В СИ единица индукции $B$ — тесла (Тл): 1 Тл = 1 В·с/м$^2$ = 1 Вб/м$^2$ или в кратных единицах Вб/см$^2$, а в системе СГСМ — гаусс (1 Гс = $10^{-8}$ Вб/см$^2$).

Единица намагниченности $J$ и напряженности поля $H$ — ампер на метр (А/м), а в системе СГСМ — эрстед (Э).

---

[1] Стрелка над буквой характеризует вектор в пространстве.
[2] Пояснения к формуле (14.1) см. в § 14.24.

Намагниченность $\vec{J}$ представляет собой вектор, направление которого полагают совпадающим с направлением $\vec{H}$ в данной точке:

$$\vec{J} = \varkappa \vec{H}. \tag{14.2}$$

Коэффициент $\varkappa$ для ферромагнитных веществ является функцией $H$. Подставив (14.2) в (14.1) и обозначив $1 + \varkappa = \mu_r$, получим

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu_a \vec{H}, \tag{14.3}$$

где $\mu_0$ — постоянная, характеризующая магнитные свойства вакуума; $\mu_a$ — абсолютная магнитная проницаемость.

В СИ $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м $= 1{,}257 \cdot 10^{-6}$ Гн/м; в СГСМ $\mu_0 = 1$. Для ферромагнитных веществ $\mu_r$ является функцией $H$.

Магнитный поток Ф через некоторую поверхность $S$ — это поток вектора магнитной индукции через эту поверхность:

$$\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S}, \tag{14.4}$$

где $d\vec{S}$ — элемент поверхности $S$.

В СИ единица магнитного потока — вебер (Вб); в СГСМ — максвелл (Мкс); 1 Мкс $= 10^{-8}$ Вб; 1 кМкс $= 10^3$ Мкс.

При расчетах магнитных цепей обычно применяют две величины: магнитную индукцию $B$ и напряженность магнитного поля $H$.

Намагниченность $J$ в расчетах, как правило, не используют [при необходимости значение $J$, отвечающее соответствующим значениям $B$ и $H$, всегда можно найти по формуле (14.1)].

Известно, что ферро- и ферримагнитные тела состоят из областей самопроизвольного (спонтанного) намагничивания. Магнитное состояние каждой области характеризуется вектором намагниченности. Направление вектора намагниченности зависит от внутренних упругих напряжений и кристаллической структуры ферромагнитного тела.

Векторы намагниченности отдельных областей ферро(ферри)магнитного тела, на которые не воздействовало внешнее магнитное поле, равновероятно направлены в различные стороны. Поэтому во внешнем относительно этого тела пространстве намагниченность тела не проявляется. Если же его поместить во внешнее поле $\vec{H}$, то под его воздействием векторы намагниченности отдельных областей повернутся в соответствии с полем. При этом индукция результирующего поля в теле может оказаться во много раз больше, чем магнитная индукция внешнего поля до помещения в него ферромагнитного тела.



### § 14.3. Основные характеристики ферромагнитных материалов.

Свойства ферромагнитных материалов принято характеризовать зависимостью магнитной индукции $B$ от напряженности магнитного поля $H$. Различают два основных типа этих зависимостей: кривые намагничивания и гистерезисные петли.

Под кривыми намагничивания понимают однозначную зависимость между $B$ и $H$. Кривые намагничивания подразделяют на начальную, основную и безгистерезисную (что будет пояснено далее).

Из курса физики известно, что ферромагнитным материалам присуще *явление гистерезиса* — отставание изменения магнитной индукции $B$ от изменения напряженности магнитного поля $H$. Он обусловлен необратимыми изменениями энергетического состояния под действием внешнего поля $\vec{H}$. При периодическом изменении напряженности поля зависимость между $B$ и $H$ приобретает петлевой характер.

Различают несколько типов гистерезисных петель — симметричную, предельную и несимметричную (частный цикл).

На рис. 14.1 изображено семейство симметричных гистерезисных петель. Для каждой симметричной петли максимальное положительное значение $B$ равно максимальному отрицательному значению $B$ и соответственно $H_{max} = |-H_{max}|$.

Геометрическое место вершин симметричных гистерезисных петель называют *основной кривой намагничивания*. При очень больших $H$ вблизи $\pm H_{max}$ восходящая и нисходящая ветви гистерезисной петли практически сливаются.

Предельной гистерезисной петлей или *предельным циклом* называют симметричную гистерезисную петлю, снятую при очень больших $H_{max}$. Индукцию при $H = 0$ называют *остаточной индукцией* и обозначают $B_r$.

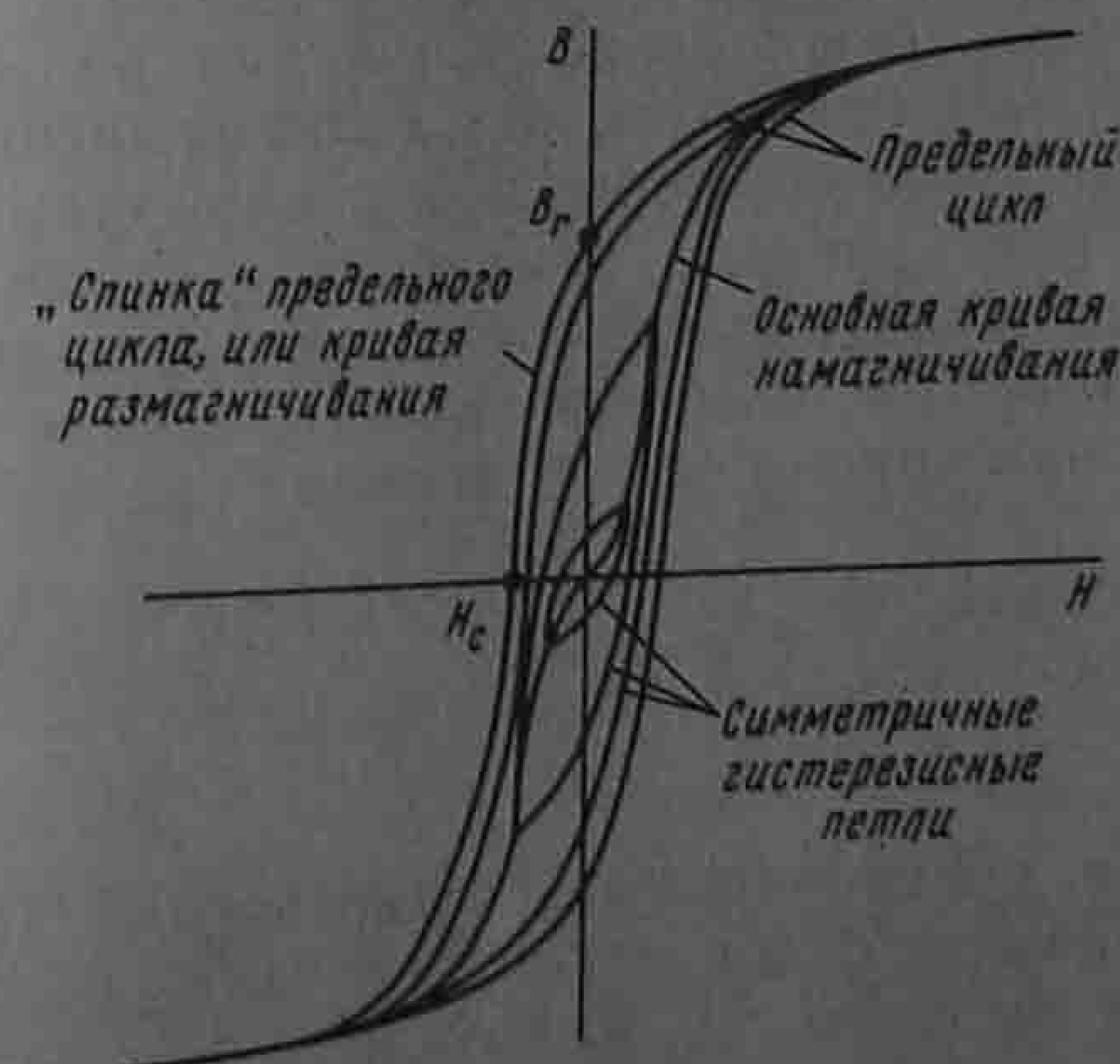



Рис. 14.1

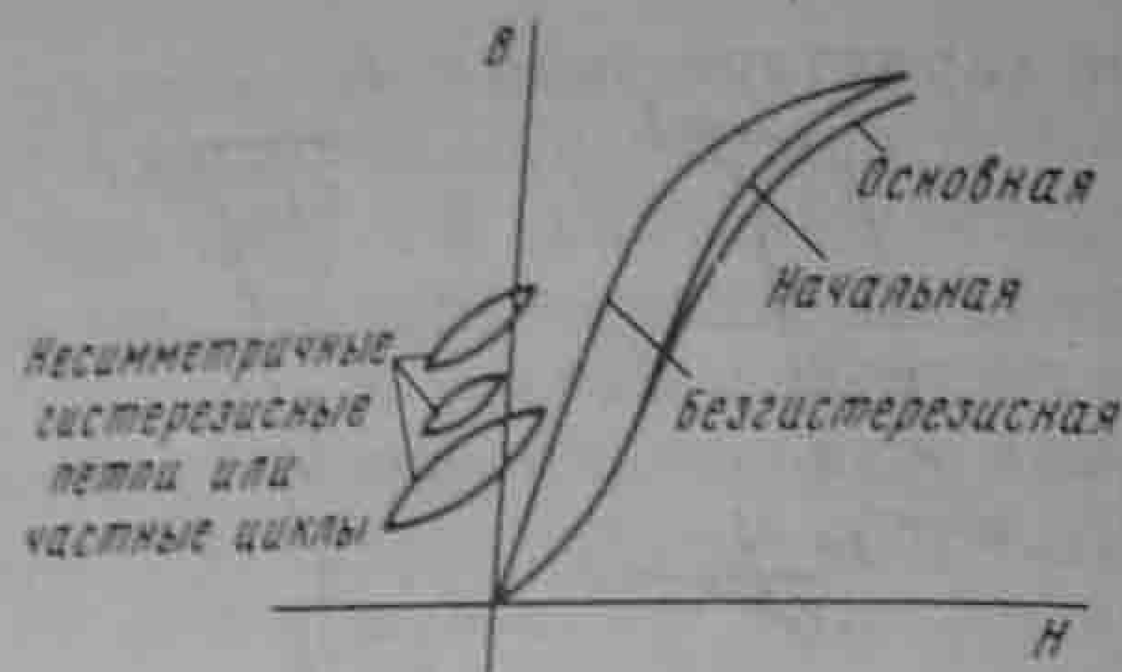



Рис. 14.2

Напряженность поля при $B = 0$ называют *задерживающей* или *коэрцитивной силой* и обозначают $H_c$.

Участок предельного цикла $B_r H_c$ (рис. 14.1) принято называть *кривой размагничивания* или *«спинкой» гистерезисной петли.*

Этот участок используют при расчетах магнитных цепей с постоянными магнитами и магнитных элементов запоминающих устройств вычислительной техники.

Если изменять $H$ периодически и так, что $+H_{max} \neq |-H_{max}|$, то зависимость между $B$ и $H$ будет иметь вид петли, но центр петли не совпадает с началом координат (рис. 14.2). Такие гистерезисные петли называют *частными петлями гистерезиса* или *частными циклами.*

Когда предварительно размагниченный ферромагнитный материал ($B = 0$, $H = 0$) намагничивают, монотонно увеличивая $H$, получаемую зависимость между $B$ и $H$ называют *начальной кривой намагничивания.*

Начальная и основная кривые намагничивания настолько близко расположены друг к другу, что практически во многих случаях их можно считать совпадающими (рис. 14.2).

*Безгистерезисной кривой намагничивания* называют зависимость между $B$ и $H$, возникающую, когда при намагничивании ферромагнитного материала его периодически постукивают или воздействуют на него полем, имеющим кроме постоянной составляющей еще и затухающую по амплитуде синусоидальную составляющую. При этом гистерезис как бы снимается.

Безгистерезисная кривая намагничивания резко отличается от основной кривой.

В различных справочниках, а также в ГОСТе в качестве однозначной зависимости между $B$ и $H$ дается основная кривая намагничивания.

**§ 14.4. Потери, обусловленные гистерезисом.** При периодическом перемагничивании ферромагнитного материала в нем совершаются необратимые процессы, на которые расходуется энергия от намагничивающего источника. В общем случае потери в ферромаг-



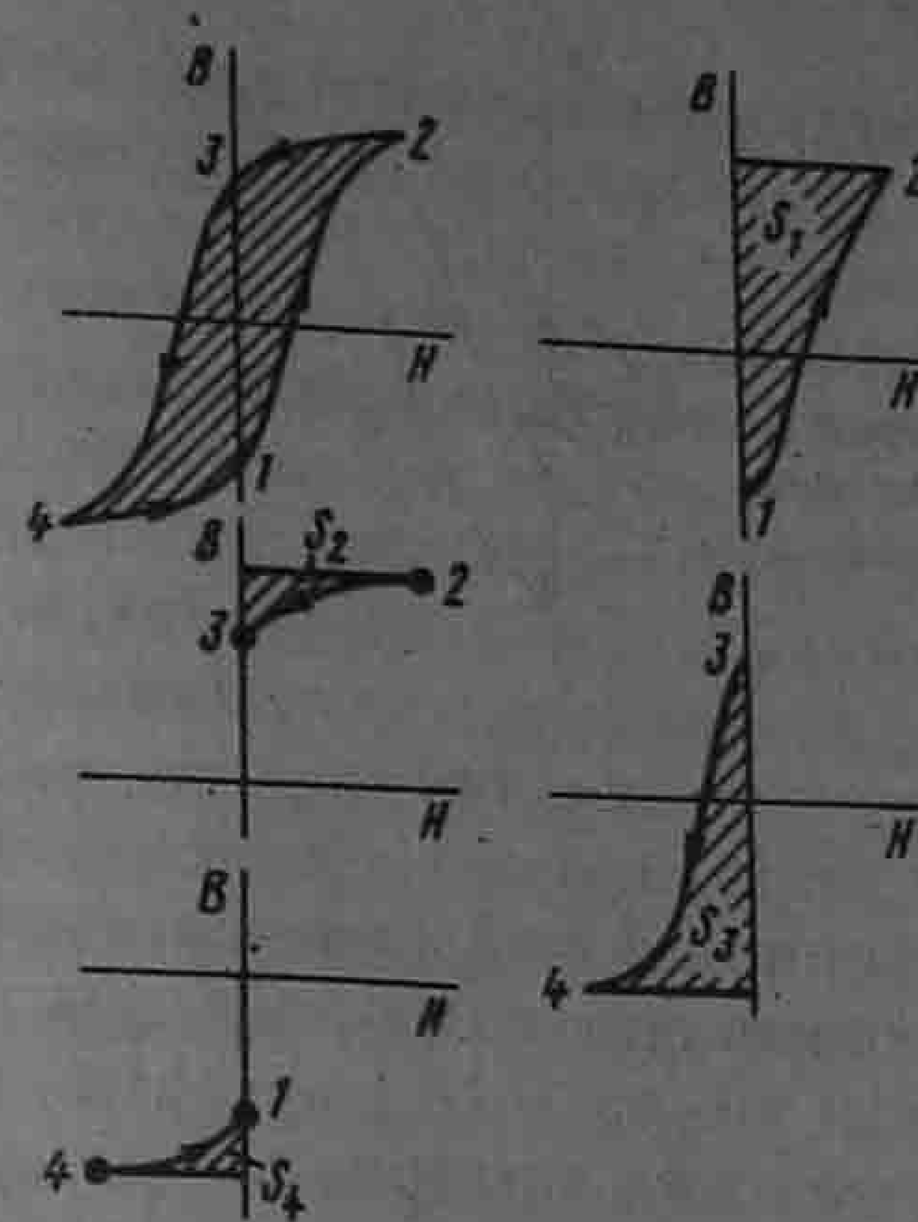



Рис. 14.3

нитном сердечнике обусловлены гистерезисом, макроскопическими вихревыми токами и магнитной вязкостью. Степень проявления различных видов потерь зависит от скорости перемагничивания ферромагнитного материала. Если сердечник перемагничивается во времени замедленно, то потери в сердечнике обусловлены практически только гистерезисом (потери от макроскопических вихревых токов и магнитной вязкости при этом стремятся к нулю).

Физически потери, обусловленные гистерезисом, вызваны инерционностью процессов роста зародышей перемагничивания, инерционностью процессов смещения доменных границ и необратимыми процессами вращения векторов намагниченности.

Площадь гистерезисной петли $\oint H dB$ характеризует энергию, выделяющуюся в единице объема ферромагнитного вещества за один цикл перемагничивания.

Представим площадь гистерезисной петли (рис. 14.3) в виде суммы четырех площадей: $\oint H dB = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$.

Площадь $S_1$ соответствует движению от точки *1* до точки *2*; так как на этом участке $H > 0$ и $dB > 0$, то произведение $HdB > 0$ и $S_1 > 0$. Площадь $S_2$ характеризует движение от точки *2* до точки *3*, так как в этом интервале $H > 0$ и $dB < 0$, то $S_2 < 0$. Площадь $S_3$ — движение от точки *3* до точки *4*; так как $H < 0$ и $dB < 0$, то $S_3 > 0$. Площадь $S_4$ — движение от точки *4* до точки *1*; так как $H < 0$ и $dB > 0$, то $S_4 < 0$.

Если ферромагнитный сердечник подвергается периодическому намагничиванию (например, в цепях переменного тока), то для уменьшения потерь на гистерезис в нем он должен быть выполнен из магнитомягкого материала (см. § 14.5).

**§ 14.5. Магнитомягкие и магнитотвердые материалы.** Ферромагнитные материалы подразделяют на магнитомягкие и магнитотвердые.

*Магнитомягкие материалы* обладают круто поднимающейся основной кривой намагничивания и относительно малыми площадями гистерезисных петель. Их применяют во всех устройствах, которые работают или могут работать при периодически изменяющемся магнитном потоке (трансформаторах, электрических двигателях и генераторах, индуктивных катушках и т. п.).

Некоторые магнитомягкие материалы, например перминвар, сплавы 68НМП и др., обладают петлей гистерезиса по форме, близкой к прямоугольной (рис. 14.4,*а*). Такие материалы получили распространение в вычислительных устройствах и устройствах автоматики.

В группу магнитомягких материалов входят электротехнические стали, железоникелевые сплавы типа пермаллоя и др.

*Магнитотвердые материалы* обладают полого поднимающейся основной кривой намагничивания и большой площадью гистерезисной петли. В группу магнитотвердых материалов входят углеродистые стали, сплавы магнико, вольфрамовые, платинокобальтовые сплавы и сплавы на основе редкоземельных элементов, например самарийкобальтовые. У последних $B_r \approx 0{,}9$ Тл и $H_c = 660$ кА/м.

На рис. 14.4, *б* качественно сопоставлены гистерезисные петли для магнитомягкого материала типа пермаллоя (кривая *1*) и для магнитотвердого материала (кривая *2*).

**§ 14.6. Магнитодиэлектрики и ферриты.** В радиотехнике, где используют колебания высокой частоты, сердечники индуктивных катушек изготовляют из магнитодиэлектриков или ферритов.

*Магнитодиэлектрики* — материалы, полученные путем смешения мелкоизмельченного порошка магнетита, железа или пермаллоя с диэлектриком. Эту смесь формуют и запекают. Каждую ферромагнитную крупинку обволакивает пленка из диэлектрика. Благодаря наличию таких пленок сердечники из магнитодиэлектриков не насыщаются; $\mu_r$ их находится в интервале от нескольких единиц до нескольких десятков.

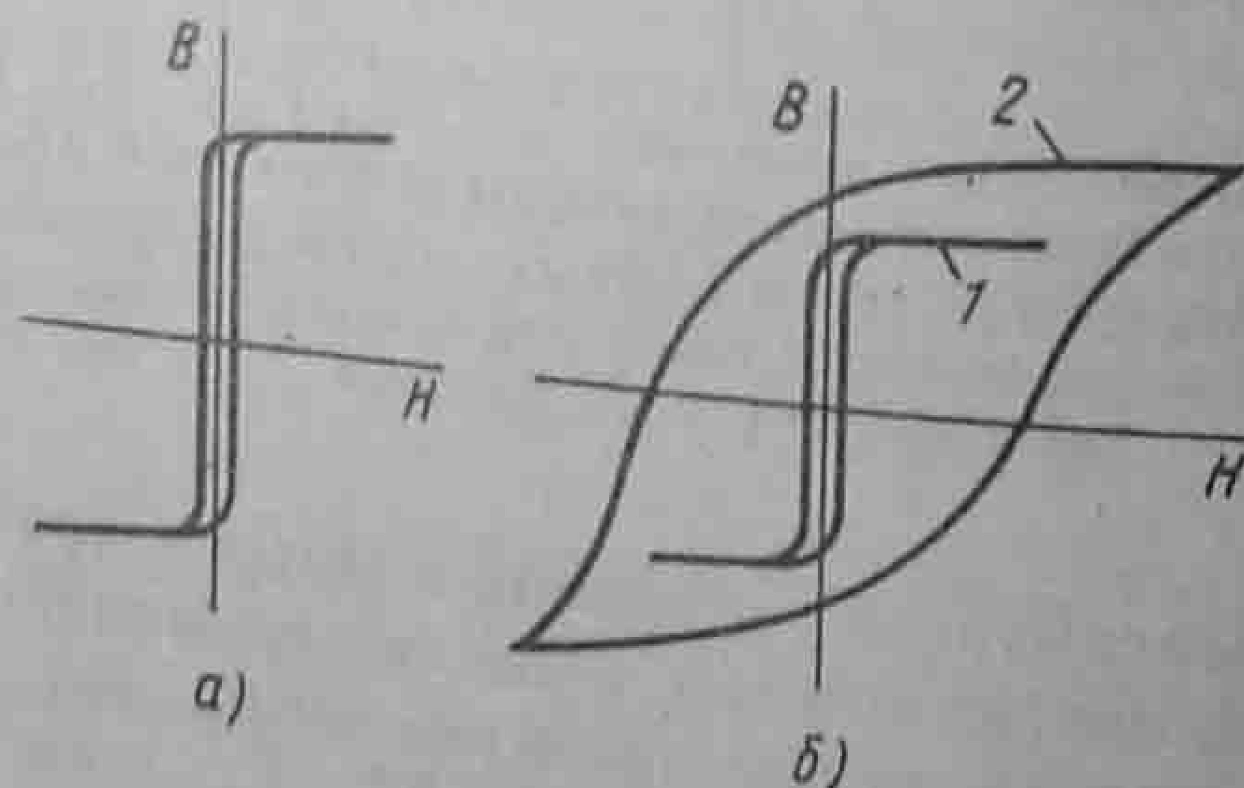


Рис. 14.4

*Ферриты* — ферримагнитные материалы. Магнитомягкие ферриты изготовляют из оксидов железа, марганца и цинка или из оксидов железа, никеля и цинка. Смесь формуют и обжигают, в результате получают твердый раствор. По своим электрическим свойствам ферриты являются полупроводниками. Их объемное сопротивление $\varrho = 1 \div 10^7$ Ом · м, тогда как для железа $\varrho \approx 10^{-6}$ Ом · м.

Можно получить ферриты с различными магнитными свойствами. В отличие от магнитодиэлектриков ферриты могут насыщаться. Коэрцитивная сила магнитомягких ферритов составляет примерно 10 А/м. Маркируют их буквами и цифрой. Например, феррит 6000 НМ означает никель-марганцевый феррит, у которого на начальном участке кривой намагничивания $\mu_r = 6000$. Магнитотвердые ферриты выполняют на основе феррита бария. Например, у феррита 3БА $B_r = 0{,}38$ Тл; $H_c = 145$ А/м.

**§ 14.7. Закон полного тока.** Магнитное поле создается электрическими токами. Количественная связь между линейным интегралом от вектора напряженности магнитного поля $\vec{H}$ вдоль любого произвольного контура и алгебраической суммой токов $\sum I$, охваченных этим контуром, определяется законом полного тока

$$\oint \vec{H}\,\vec{dl} = \sum I. \tag{14.5}$$

Положительное направление интегрирования $\vec{dl}$ связано с положительным направлением тока $I$ правилом правого винта. Если контур интегрирования будет пронизывать катушку с числом витков $w$, по которой проходит ток $I$, то $\sum I = Iw$ и $\oint \vec{H}\,\vec{dl} = Iw$.

Закон полного тока является опытным законом. Его можно экспериментально проверить путем измерения $\oint \vec{H}\,dl$ с помощью специального устройства (известного из курса физики), называемого *магнитным поясом*.

**§ 14.8. Магнитодвижущая (намагничивающая) сила.** *Магнитодвижущей силой* (МДС) или *намагничивающей силой* (НС) катушки или обмотки с током называют произведение числа витков катушки $w$ на протекающий по ней ток $I$.

МДС $Iw$ вызывает магнитный поток в магнитной цепи подобно тому, как ЭДС вызывает электрический ток в электрической цепи. Как и ЭДС, МДС — величина направленная (положительное направление на схеме обозначают стрелкой).

Положительное направление МДС совпадает с движением ост-

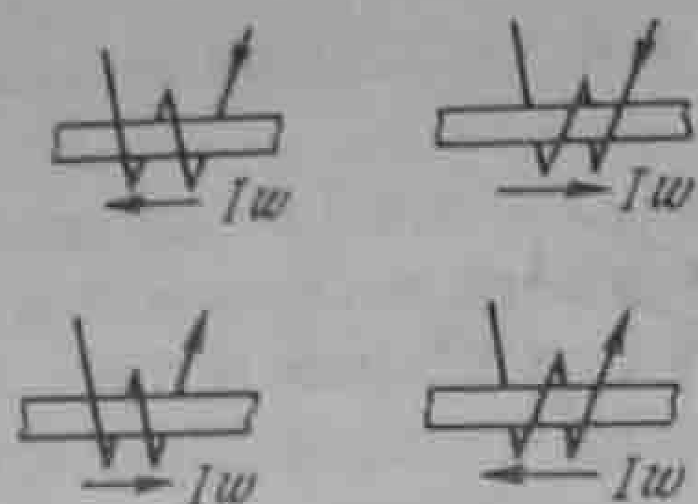



Рис. 14.5

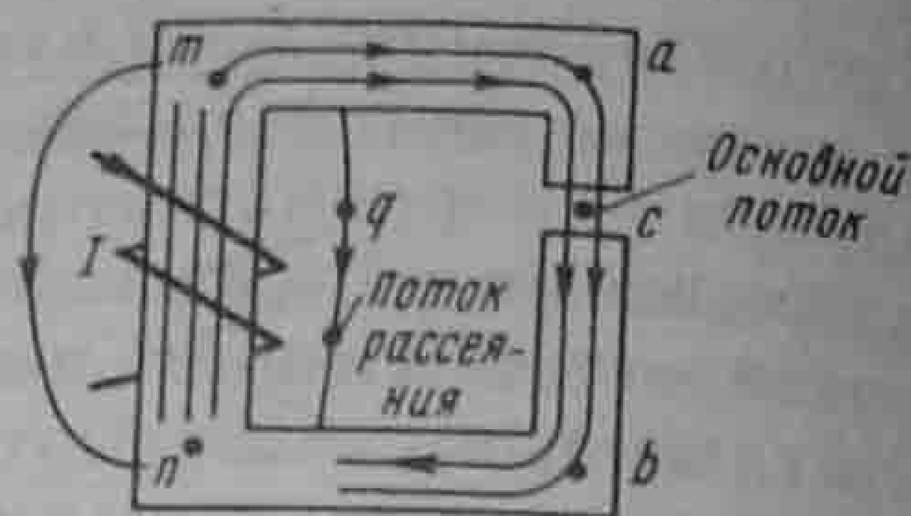



Рис. 14.6

рия правого винта, если винт вращать по направлению тока в обмотке.

Для определения положительного направления МДС пользуются *мнемоническим правилом*: если сердечник мысленно охватить правой рукой, расположив ее пальцы по току в обмотке, а затем отогнуть большой палец, то последний укажет направление МДС.

На рис. 14.5 дано несколько эскизов с различным направлением намотки катушек на сердечник и различным направлением МДС.

**§ 14.9. Разновидности магнитных цепей**. Магнитной цепью в общем случае называют совокупность катушек с током, ферромагнитных тел или каких-либо иных тел (сред), по которым замыкается магнитный поток.

Магнитные цепи могут быть подразделены на неразветвленные и разветвленные. Примером неразветвленной цепи может служить цепь, показанная на рис. 14.6. Разветвленные цепи делятся на симметричные и несимметричные. Магнитная цепь на рис. 14.7 симметрична: в ней $\Phi_1 = \Phi_2$, если обе части ее, расположенные слева и справа от вертикальной пунктирной линии, одинаковы в геометрическом отношении, изготовлены из одного и того же материала и если $I_1 w_1 = I_2 w_2$.

Достаточно сделать $I_1 w_1 \neq I_2 w_2$, изменить направление тока в одной из обмоток или сделать воздушный зазор в одном из крайних стержней магнитопровода, чтобы магнитная цепь (рис. 14.7) стала несимметричной. Если цепь (рис. 14.7) окажется несимметричной, то $\Phi_1 \neq \Phi_2$.

**§ 14.10. Роль ферромагнитных материалов в магнитной цепи**. Электрические машины, трансформаторы и другие аппараты конструируют так, чтобы магнитный поток в них был по возможности наибольшим. Если в магнитную цепь входит ферромагнитный материал, то поток в ее ветвях при одной и той же МДС и одинаковой геометрии цепи оказывается во много раз больше, чем в случае отсутствия ферромагнитного материала.

**Пример 139.** Даны два одинаковых в геометрическом отношении кольцевых сердечника (рис. 14.8). Радиус их средней магнитной линии $R = 10$ см, поперечное сечение $S = 2$ см². Один сердечник неферромагнитный, например деревянный, а



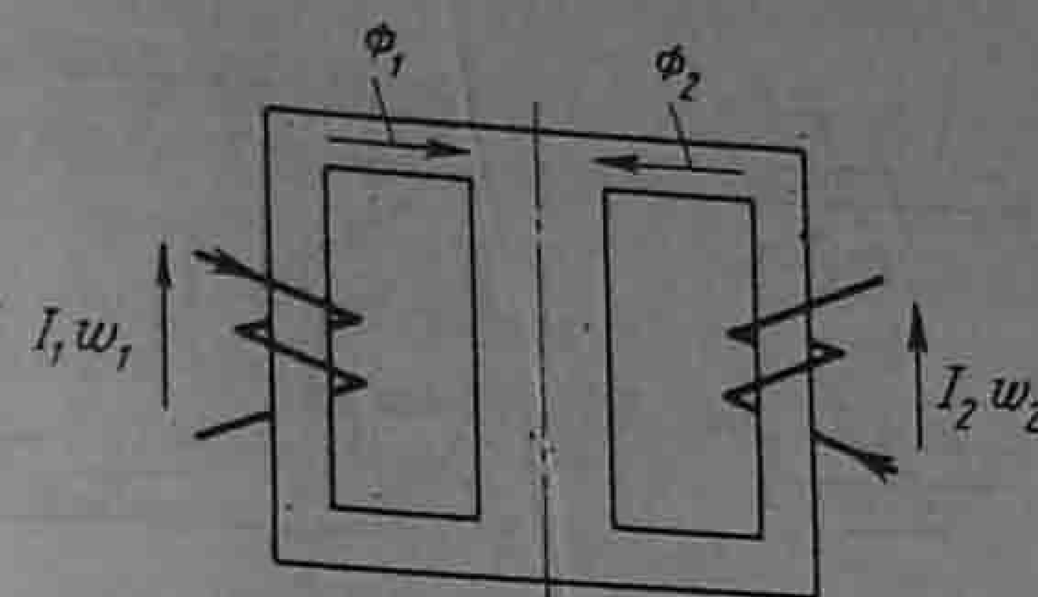



Рис. 14.7

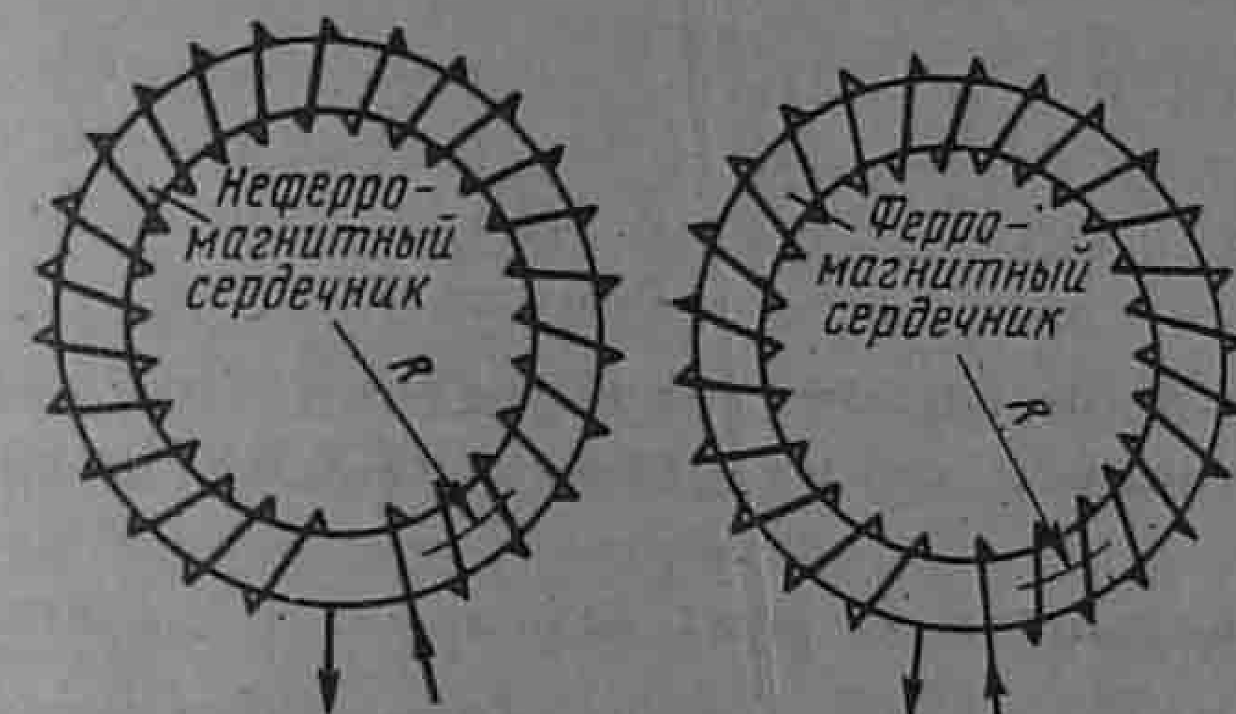



Рис. 14.8

другой — ферромагнитный (кривая намагничивания представлена на рис. 14.9). На каждый кольцевой сердечник намотана обмотка с числом витков $w = 200$ и через них пропущен одинаковый ток $I = 1$ А. Определить потоки в сердечниках.

Р е ш е н и е. По закону полного тока, напряженность поля одинакова в обоих сердечниках и не зависит от материала: $H = Iw/(2\pi R) = 1 \cdot 200/(2\pi \cdot 0{,}1) = 318$ А/м.

Магнитный поток в неферромагнитном сердечнике

$$\Phi_{нф} = BS = \mu_0 \mu HS = 1{,}257 \cdot 10^{-6} \cdot 318 \cdot 2 \cdot 10^{-4} = 8 \cdot 10^{-8}\ \text{Вб}.$$

По кривой намагничивания (рис. 14.9) находим, что при $H = 318$ А/м $B \approx 1{,}02$ Тл. Магнитный поток в ферромагнитном сердечнике

$$\Phi_{фм} = BS = 1{,}02 \cdot 10^{-4} \cdot 2 = 20{,}4 \cdot 10^{-5}\ \text{Вб}.$$

Таким образом, поток в ферромагнитном сердечнике в 2550 раз больше, чем в неферромагнитном.

Ферромагнитные материалы вводят в магнитную цепь также с целью сосредоточения магнитного поля в заданной области пространства и придания ему определенной конфигурации.

**§ 14.11. Падение магнитного напряжения**. *Падением магнитного напряжения* между точками $a$ и $b$ магнитной цепи называют линейный интеграл от напряженности магнитного поля между этими точками:

$$U_{mab} = \int_a^b \vec{H}\,d\vec{l}. \tag{14.6}$$

Если на этом участке $\vec{H}$ постоянна и совпадает по направлению с элементом пути $dl$, то $\vec{H}\,d\vec{l} = H dl \cos 0°$ и $H$ можно вынести из-под знака интеграла. Тогда

$$U_{мab} = H\int_a^b dl = Hl_{ab}, \qquad (14.6а)$$

где $l_{ab}$ — длина пути между точками $a$ и $b$.

Единица падения магнитного напряжения — ампер (А).

В том случае, когда участок магнитной цепи между точками $a$ и $b$ может быть подразделен на $n$ отдельных частей так, что для каждой части $H = H_k = \text{const}$, то

$$U_{мab} = \sum_{k=1}^{n} H_k l_k. \qquad (14.7)$$

**§ 14.12. Вебер-амперные характеристики.** Под *вебер-амперной* (максвелл-амперной) *характеристикой* (ВАХ)[1] понимают зависимость потока Ф по какому-либо участку магнитной цепи от падения магнитного напряжения на этом участке: $Ф = f(U_м)$. Она также важна при расчетах и исследовании магнитных цепей, как и ВАХ нелинейных сопротивлений при расчетах и исследовании электрических цепей с нелинейными резисторами (см. гл. 13).

ВАХ при расчетах магнитных цепей в готовом виде не задаются. Перед расчетом их нужно построить с помощью кривых намагничивания ферромагнитных материалов, входящих в магнитную цепь.

**§ 14.13. Построение вебер-амперных характеристик.** На рис. 14.10 изображен участок магнитной цепи, по которому проходит поток Ф. Пусть участки $l_1$ и $l_2$ сечением $S$ выполнены из ферромагнитного материала, кривая $B = f(H)$ для которого дана на рис. 14.9.

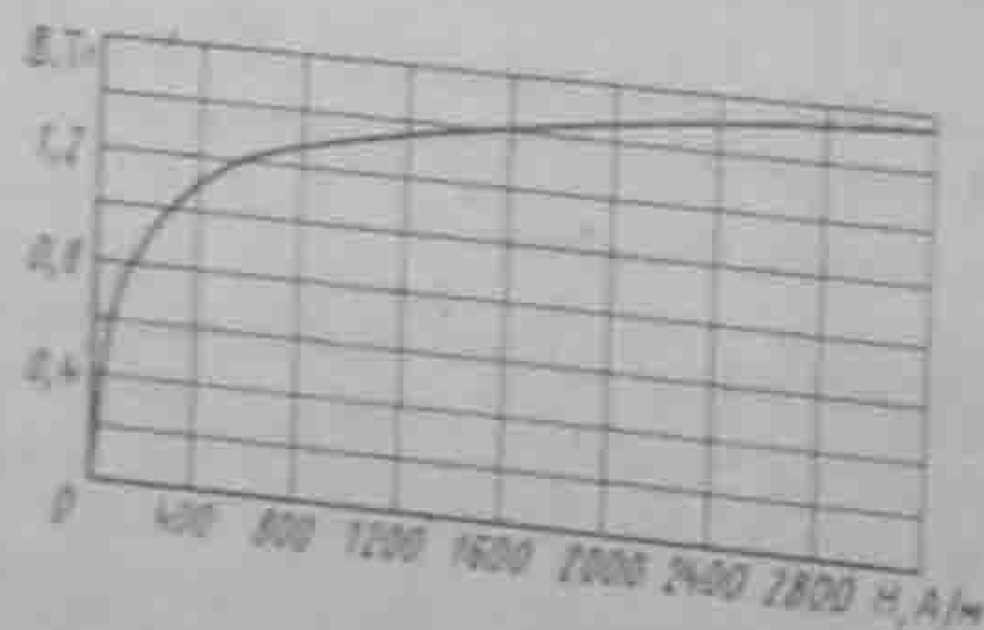


Рис. 14.9

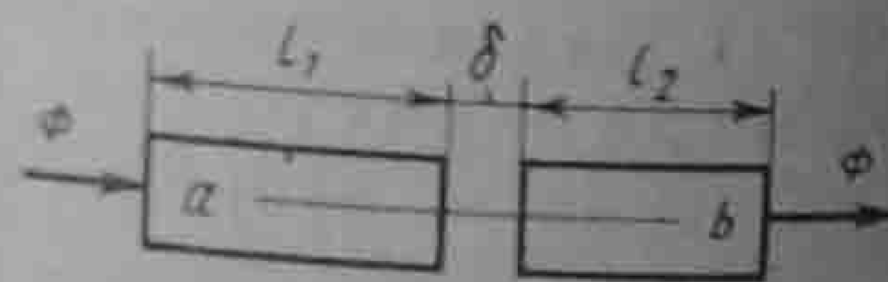


Рис. 14.10

[1] В гл. 14 (в отличие от гл. 13) под ВАХ понимается вебер-амперная характеристика.



На участке длиной δ магнитный поток проходит по воздуху. Требуется построить ВАХ участка цепи между точками $a$ и $b$.

При построении допустим, что: 1) магнитный поток вдоль всего участка от $a$ до $b$ постоянен (отсутствует рассеяние); 2) сечение магнитного потока в воздушном зазоре такое же, как и на участках $l_1$ и $l_2$ (отсутствует боковой распор силовых линий в зазоре). В действительности оба допущения справедливы лишь в известной мере и чем больше воздушный зазор, тем менее они выполняются.

Построение ВАХ производим следующим образом. Задаемся рядом значений индукции $B$, например для электротехнических сталей 0; 0,5; 0,8; 1,0; 1,1; 1,2; 1,3; 1,4; 1,5 Тл, и для каждого значения $B$ находим напряженности поля на всех участках $l_1$, $l_2$ и δ.

На участках из ферромагнитного материала ($l_1$ и $l_2$) напряженность $H_1 = H_2$ (так как $B_1 = B_2$) определяем по кривой намагничивания.

Для неферромагнитных участков (участок δ)

$$H = \frac{B}{\mu_0} = \frac{B}{1{,}256 \cdot 10^{-6}} \approx 0{,}8 \cdot 10^6 B,$$

где $H$ — в А/м; $B$ — в Тл; $\mu_0$ — в Гн/м.

Таким образом, для определения $H$ в воздухе следует умножить индукцию, выраженную в теслах, на коэффициент $0{,}8 \cdot 10^6$.

Для каждого значения $B$ вычисляем поток $Ф = BS$ и находим $U_{мab} = H_1 l_1 + H_2 l_2 + H_\delta \delta$.

По результатам подсчетов строим кривую $Ф = f(U_м)$.

**Пример 140.** Построить ВАХ для участка цепи (рис. 14.10) при δ = 0; 0,005; 0,05 см; $l_1 = 10$ см; $l_2 = 5$ см; $S = 5$ см².

Р е ш е н и е. Определим падение магнитного напряжения между точками $a$ и $b$ участка магнитной цепи (рис. 14.10) при δ = 0,005 см и $B = 0{,}5$ Тл.

Из кривой (рис. 14.9) находим, что индукции $B = 0{,}5$ Тл соответствует напряженность поля $H = 40$ А/м. Таким образом, при $B = 0{,}5$ Тл $H_1 = H_2 = 40$ А/м.

Падение напряжения между точками $a$ и $b$ $U_{мab} = H_1 l_1 + H_2 l_2 + H_\delta \delta = 40 \cdot 0{,}1 + 40 \cdot 0{,}05 + 0{,}8 \cdot 0{,}5 \cdot 10^6 \cdot 5 \cdot 10^{-5} = 26$ А.

Значения $U_{мab}$ при иных зазорах и индукциях рассчитываем аналогичным образом (табл. 14.1).

Т а б л и ц а 14.1

| B, Тл | Ф, Вб · $10^{-5}$ | $H_1 = H_2$, А/м | $H_\delta$, А/м · $10^5$ | $U_{мab}$, А, при δ, см | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | 0 | 0,005 | 0,05 |
| 0,5 | 25 | 40 | 4 | 6 | 26 | 206 |
| 0,8 | 40 | 130 | 6,4 | 19,5 | 51,5 | 339,5 |
| 1,0 | 50 | 300 | 8 | 45 | 85 | 445 |
| 1,1 | 55 | 440 | 8,8 | 66 | 110 | 506 |
| 1,2 | 60 | 700 | 9,6 | 105 | 153 | 585 |
| 1,3 | 65 | 1080 | 10,4 | 162 | 214 | 682 |
| 1,4 | 70 | 1800 | 11,2 | 270 | 326 | 830 |

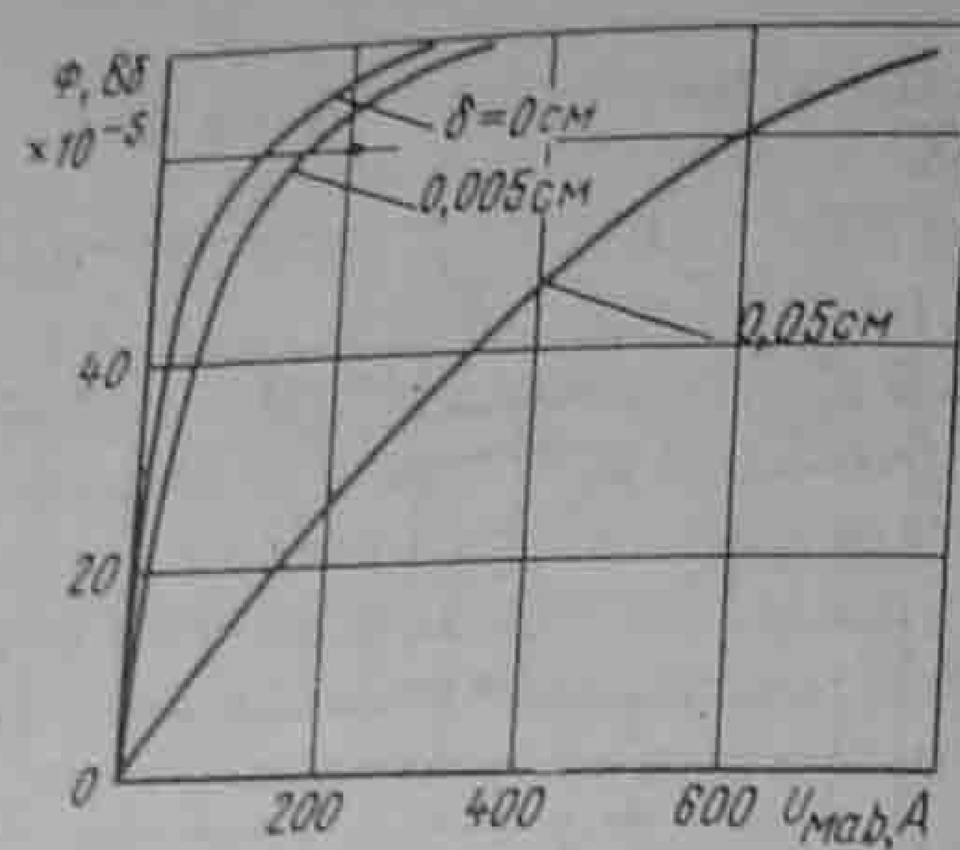



Рис. 14.11

По данным таблицы на рис. 14.11 построены ВАХ при трех значениях $\delta$. Из построений видно, что если участок, для которого строят ВАХ, не имеет "воздушного" включения, то ВАХ круто поднимается вверх. При наличии воздушного включения ВАХ спрямляется и идет более полого.

**§ 14.14. Законы Кирхгофа для магнитных цепей.** При расчетах магнитных цепей, как и электрических, используют первый и второй законы (правила) Кирхгофа.

Первый закон Кирхгофа: *алгебраическая сумма магнитных потоков в любом узле магнитной цепи равна нулю:*

$$\sum \Phi_{\text{к}} = 0. \tag{14.8}$$

Первый закон Кирхгофа для магнитных цепей следует из принципа непрерывности магнитного потока, известного из курса физики (см. также § 21.8).

Второй закон Кирхгофа: *алгебраическая сумма падений магнитного напряжения вдоль любого замкнутого контура равна алгебраической сумме МДС вдоль того же контура:*

$$\sum U_{\text{м}} = \sum I w. \tag{14.9}$$

Второй закон Кирхгофа для магнитных цепей, по сути дела, есть иная форма записи закона полного тока.

Перед тем как записать уравнения по законам Кирхгофа, следует произвольно выбрать положительные направления потоков в ветвях и положительные направления обхода контуров.

Если направление магнитного потока на некотором участке совпадает с направлением обхода, то падение магнитного напряжения этого участка входит в сумму $\sum U_{\text{м}}$ со знаком плюс, если встречно ему, то со знаком минус.

Аналогично, если МДС совпадает с направлением обхода, она



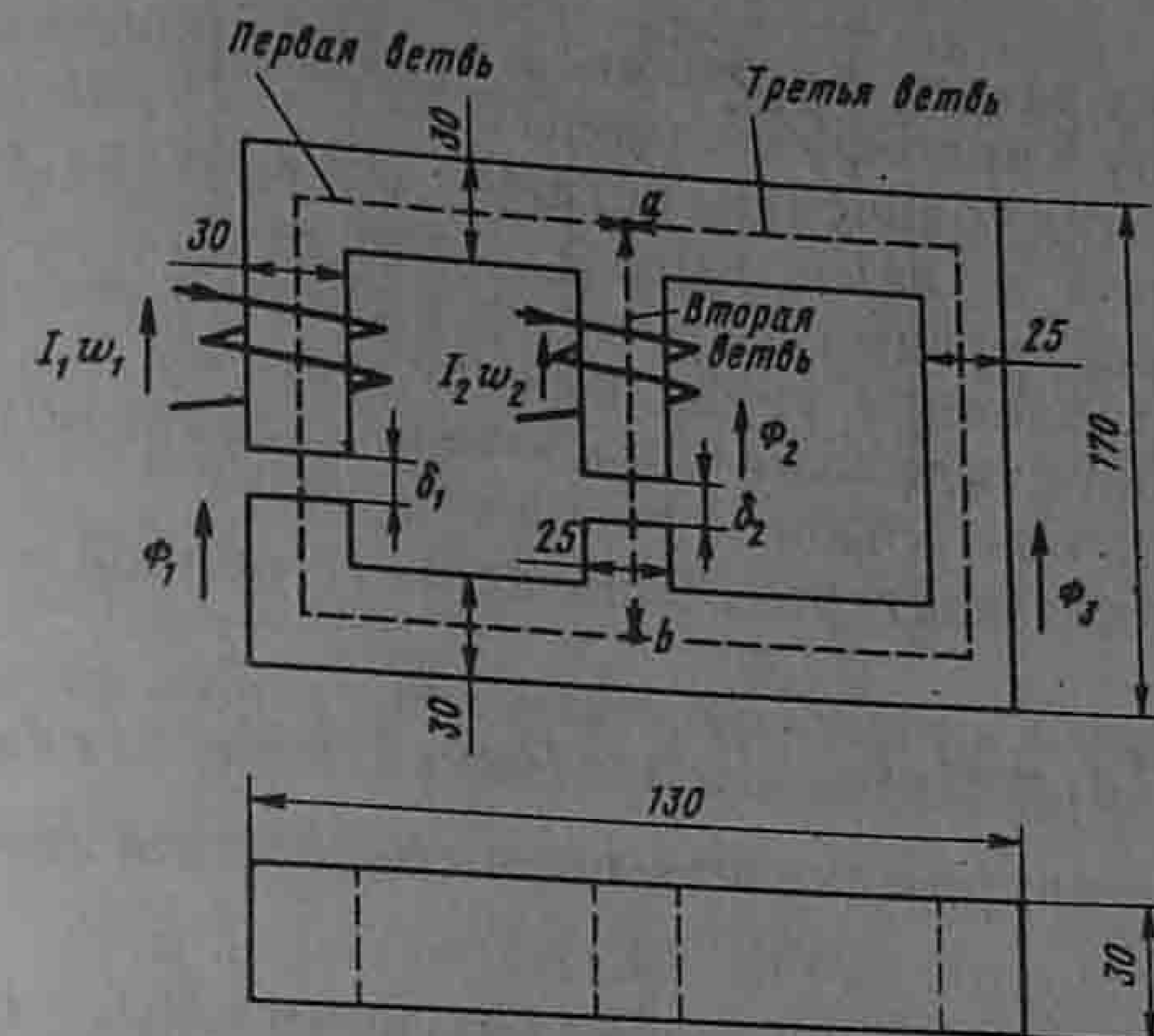



Рис. 14.12

входит в $\sum Iw$ со знаком плюс, в противном случае — со знаком минус.

В качестве примера составим уравнения по законам Кирхгофа для разветвленной магнитной цепи, изображенной на рис. 14.12.

Левую ветвь назовем первой, и все относящиеся к ней величины запишем с индексом *1* (поток $\Phi_1$, напряженность поля $H_1$, длина пути в стали $l_1$, длина воздушного зазора $\delta_1$, МДС $I_1\omega_1$).

Среднюю ветвь назовем второй, и все относящиеся к ней величины будут соответственно с индексом *2* (поток $\Phi_2$, напряженность поля $H_2$, длина пути в стали $l_2$, длина воздушного зазора $\delta_2$, МДС $I_2w_2$).

Все величины, относящиеся к правой ветви, имеют индекс 3 (поток $\Phi_3$, длина пути на вертикальном участке $l'_3$, суммарная длина пути на двух горизонтальных участках $l''_3$).

Произвольно выберем направление потоков в ветвях. Положим, что все потоки ($\Phi_1$, $\Phi_2$, $\Phi_3$) направлены вверх (к узлу *a*). Число уравнений, которые следует составить по законам Кирхгофа, должно быть равно числу ветвей цепи (в рассматриваемом случае нужно составить три уравнения).

По первому закону Кирхгофа необходимо составить столько уравнений, сколько в цепи узлов без единицы (см. § 2.8).

В цепи (рис. 14.12) два узла; следовательно, по первому закону Кирхгофа составим одно уравнение:

$$\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = 0. \tag{a}$$

По второму закону Кирхгофа следует составить число уравнений, равное числу ветвей, за вычетом числа уравнений, составлен-

ных по первому закону Кирхгофа. В рассматриваемом примере по второму закону Кирхгофа составим 3 — 1 = 2 уравнения.

Первое из этих уравнений составим для контура, образованного первой и второй ветвями, второе — для контура, образованного первой и третьей ветвями (для периферийного контура).

Перед составлением уравнений по второму закону Кирхгофа необходимо выбрать положительное направление обхода контуров. Будем обходить контуры по часовой стрелке.

Уравнение для контура, образованного первой и второй ветвями, имеет вид

$$H_1 l_1 + H_{\delta 1}\delta_1 - H_2 l_2 - H_{\delta 2}\delta_2 = I_1 w_1 - I_2 w_2, \qquad (б)$$

где $H_{\delta 1}$ и $H_{\delta 2}$ — напряженности поля соответственно в воздушных зазорах $\delta_1$ и $\delta_2$.

В левую часть уравнения вошли слагаемые $H_1 l_1$ и $H_{\delta 1}\delta_1$ со знаком плюс, так как на первом участке поток $\Phi_1$ направлен согласно с обходом контура, слагаемые $H_2 l_2$ и $H_{\delta 2}\delta_2$ — со знаком минус, так как поток $\Phi_2$ направлен встречно обходу контура.

В правую часть уравнения МДС $I_1 w_1$ вошла со знаком плюс, так как она направлена согласно с обходом контура, а МДС $I_2 w_2$ — со знаком минус, так как она направлена встречно обходу контура.

Составим уравнение для периферийного контура, образованного первой и третьей ветвями:

$$H_1 l_1 + H_{\delta 1}\delta_1 - H''_3 l''_3 - H'_3 l'_3 = I_1 w_1. \qquad (в)$$

Совместно решать уравнения (а) — (в) с тремя неизвестными ($\Phi_1$, $\Phi_2$, $\Phi_3$) не будем, так как в § 14.8 дается решение рассматриваемой задачи более совершенным методом, чем метод на основе законов Кирхгофа — методом двух узлов.

**§ 14.15. Применение к магнитным цепям всех методов, используемых для расчета электрических цепей с нелинейными резисторами.** В гл. 13 подробно рассматривались различные методы расчета электрических цепей с НР. Эти методы полностью применимы и к расчету магнитных цепей, так как и магнитные и электрические цепи подчиняются одним и тем же законам — законам Кирхгофа.

Аналогом тока в электрической цепи является поток в магнитной цепи, аналогом ЭДС — МДС, аналогом вольт-амперной характеристики нелинейного резистора — вебер-амперная характеристика участка магнитной цепи.

**§ 14.16. Определение МДС неразветвленной магнитной цепи по заданному потоку.** Заданы конфигурация и геометрические размеры магнитной цепи, кривая (кривые) намагничивания ферромагнитного материала и магнитный поток или индукция в каком-либо



сечении. Требуется найти МДС, ток или число витков намагничивающей обмотки.

Расчет проводим в такой последовательности:

1) разбиваем магнитную цепь на участки постоянного сечения и определяем длины $l_k$ (м) и площади поперечного сечения $S_k$ (м²) участков (длины участков берем по средней силовой линии);

2) исходя из постоянства потока вдоль всей цепи, по заданному потоку и сечениям $S_k$ находим магнитные индукции на каждом участке: $B_k = \Phi / S_k$;

3) по кривой намагничивания определяем напряженности поля $H_k$ для ферромагнитных участков магнитной цепи; напряженность поля в воздушном зазоре

$$H = 0{,}8 \cdot 10^6 B, \qquad (14.10)$$

где $H$ — в А/м; $B$ — в Тл;

4) подсчитываем сумму падений магнитного напряжения вдоль всей магнитной цепи $\sum H_k l_k$ и на основании закона полного тока приравниваем эту сумму полному току $Iw$: $\sum H_k l_k = Iw$.

Основным допущением при расчете является то, что магнитный поток вдоль всей магнитной цепи полагаем неизменным. В действительности небольшая часть потока всегда замыкается минуя основной путь. Например, для магнитной цепи (см. рис. 14.6) поток, выйдя из левого сердечника, в основном направляется по пути *macbn*, но небольшая часть потока идет по воздуху по пути *mqn*.

Поток, который замыкается минуя основной путь, называют *потоком рассеяния*. При малом воздушном зазоре поток рассеяния относительно мал; с увеличением воздушного зазора поток рассеяния может стать соизмеримым с основным потоком.

**Пример 141.** Геометрические размеры магнитной цепи даны на рис. 14.13 в миллиметрах; кривая намагничивания показана на рис. 14.9. Какой ток должен протекать по обмотке с числом витков $w = 500$, чтобы магнитная индукция в воздушном зазоре была $B = 1$ Тл?

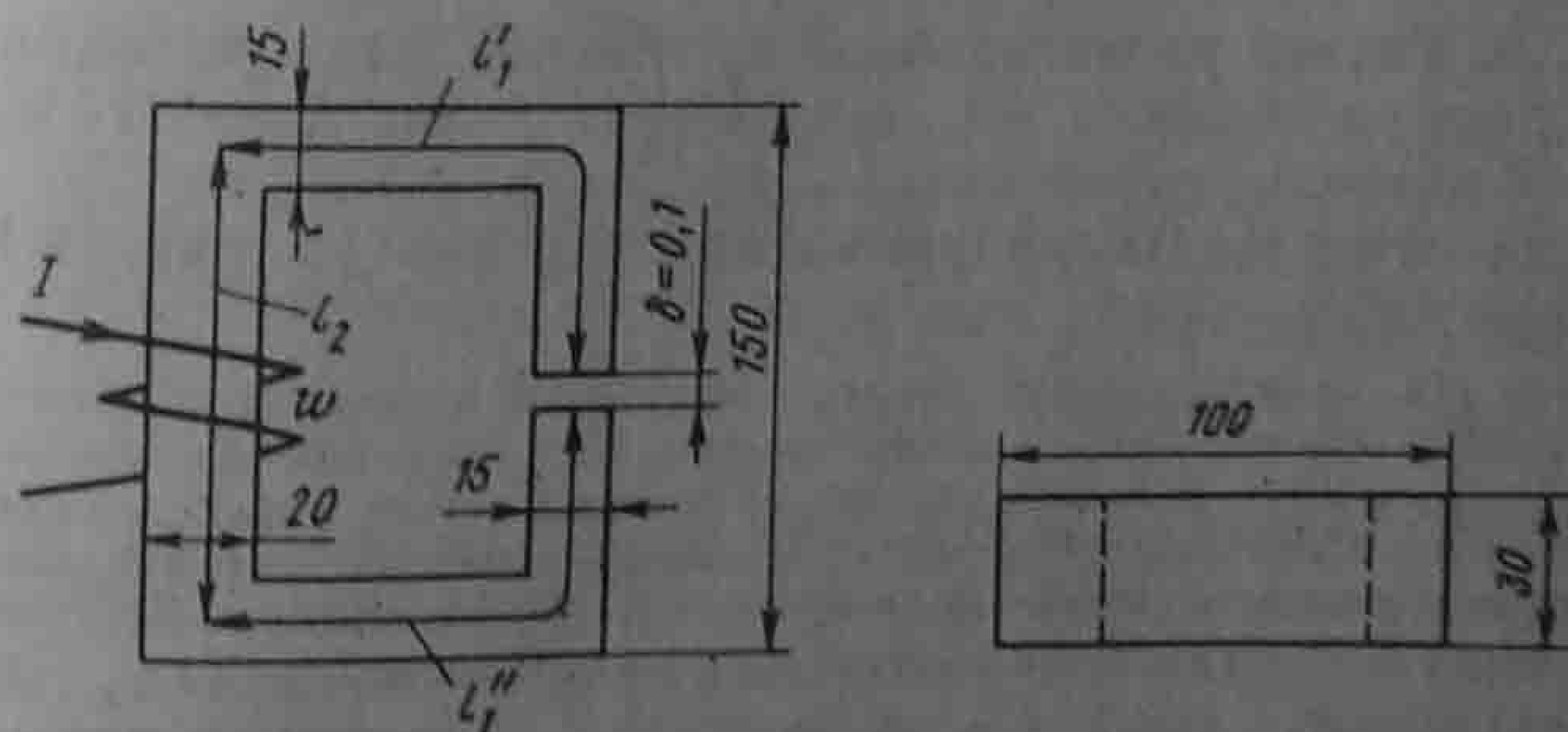



Рис. 14.13

Р е ш е н и е. Магнитную цепь разбиваем на три участка: $l_1 \approx l'_1 + l''_1 = 30$ см; $S_1 = 4{,}5$ см$^2$; $l_2 = 13{,}5$ см; $S_2 = 6$ см$^2$.

Воздушный зазор $\delta = 0{,}01$ см; $S_\delta = S_1 = 4{,}5$ см$^2$. Индукция $B_1 = B_\delta = 1$ Тл.

Индукция на участке $l_2 B_2 = \Phi/S_2 = B_\delta S_\delta / S_2 = 1 \cdot 4{,}5/6 = 0{,}75$ Тл.

Напряженности поля на участках $l_1$ и $l_2$ определяем согласно кривой намагничивания (см. рис. 14.9) по известным значениям $B_1$ и $B_2$: $H_1 = 300$ А/м; $H_2 = 115$ А/м.

Напряженность поля в воздушном зазоре $H_\delta = 0{,}8 \cdot 10^6 \cdot B_\delta = 0{,}8 \cdot 10^6 \cdot 1 = 8 \cdot 10^5$ А/м.

Падение магнитного напряжения вдоль всей магнитной цепи $\sum H_k l_k = H_1 l_1 + H_2 l_2 + H_\delta \delta = 300 \cdot 0{,}3 + 115 \cdot 0{,}135 + 8 \cdot 10^5 \cdot 10^4 = 185{,}6$ А.

Ток в обмотке $I = \sum H_k l_k / w = 185{,}6/500 = 0{,}371$ А.

**§ 14.17. Определение потока в неразветвленной магнитной цепи по заданной МДС.** Заданы геометрические размеры магнитной цепи, кривая намагничивания и полный ток. Определить поток.

Для решения задачи необходимо построить зависимость потока в функции от $\sum H_k l_k$ и на ней найти рабочую точку.

**Пример 142.** Найти магнитную индукцию в воздушном зазоре магнитной цепи примера 141, если $Iw = 350$ А.

Р е ш е н и е. Задаемся значениями $B = 0{,}5$; 1,1; 1,2; 1,3 Тл — и для каждого из них подсчитываем $\sum H_k l_k$ так же, как в предыдущей задаче. В результате получим

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $B_\delta$, Тл | ... | 0,5 | 1,1 | 1,2 | 1,3 |
| $B_1$, Тл | ... | 0,5 | 1,1 | 1,2 | 1,3 |
| $B_2$, Тл | ... | 0,375 | 0,825 | 0,9 | 0,975 |
| $H_\delta \cdot 10^5$, А/м | ... | 4 | 8,8 | 9,6 | 10,4 |
| $H_1$, А/м | ... | 50 | 460 | 700 | 1020 |
| $H_2$, А/м | ... | 25 | 150 | 200 | 300 |
| $\sum H_k l_k$, А | ... | 58,3 | 246,3 | 333 | 450,5 |
| $\Phi \cdot 10^{-5}$, Вб | ... | 22,5 | 49,5 | 54 | 58,5 |

По полученным данным строим зависимость $\Phi = f(\sum H_k l_k)$, изображенную на рис. 14.14, и по ней находим, что при $Iw = 350$ А $\Phi = 55 \cdot 10^{-5}$ Вб. Следовательно, $B_\delta = \Phi/S_\delta = 55 \cdot 10^{-5}/(4{,}5 \cdot 10^{-4}) = 1{,}21$ Тл.

**§ 14.18. Расчет разветвленной магнитной цепи методом двух узлов.** Ранее отмечалось, что для расчета разветвленных магнитных цепей применимы все методы, рассмотренные в гл. 13.

Рассчитаем разветвленную магнитную цепь (см. рис. 14.12) методом двух узлов.

**Пример 143.** Геометрические размеры магнитной цепи даны в миллиметрах; кривая намагничивания представлена на рис. 14.9; $\delta_1 = 0{,}05$ мм; $\delta_2 = 0{,}22$ мм; $I_1 w_1 = 80$ А; $I_2 w_2 = 300$ А. Найти магнитные потоки в ветвях магнитной цепи.

Р е ш е н и е. Как и в схеме на рис. 13.7, узловые точки обозначим буквами $a$ и $b$. Выберем положительные направления потоков $\Phi_1$, $\Phi_2$, $\Phi_3$ к узлу $a$. Построим зависимость потока $\Phi_1$ от падения магнитного напряжения первой ветви $U_{м1}$. Для этого произвольно задаемся рядом числовых значений $B_1$. Для каждого значения $B_1$ по кривой намагничивания находим напряженность на пути в стали по первой ветви.



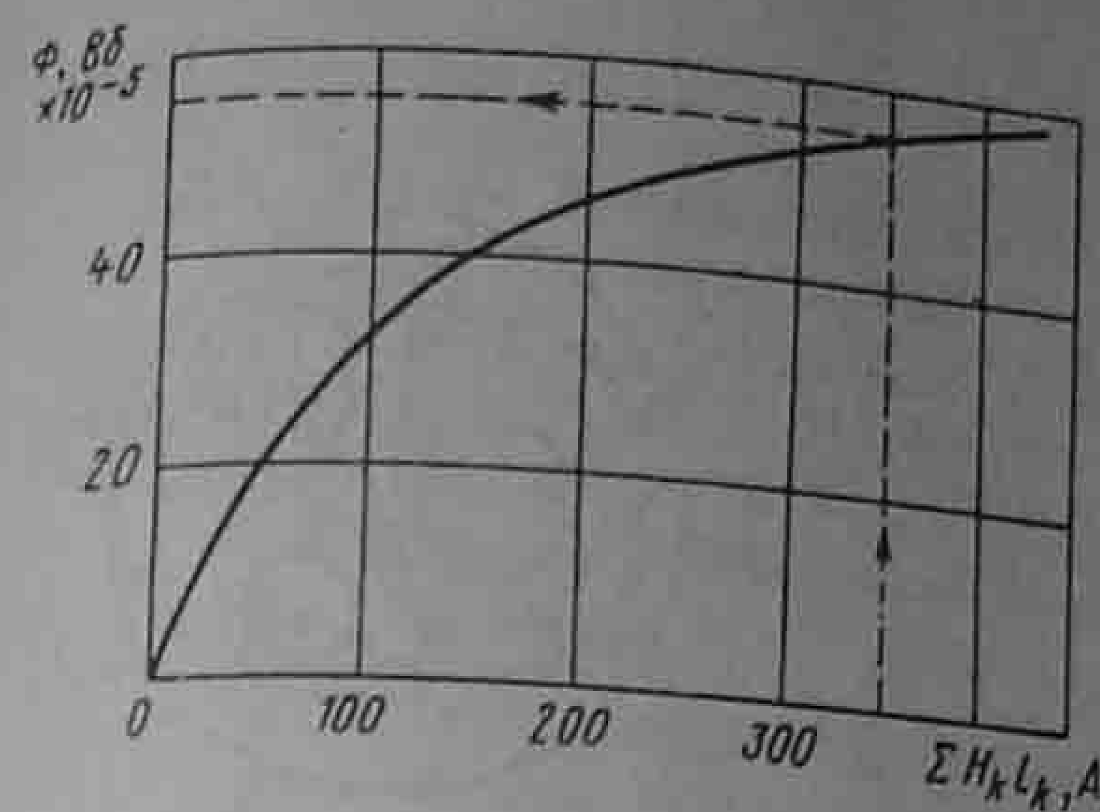



Рис. 14.14

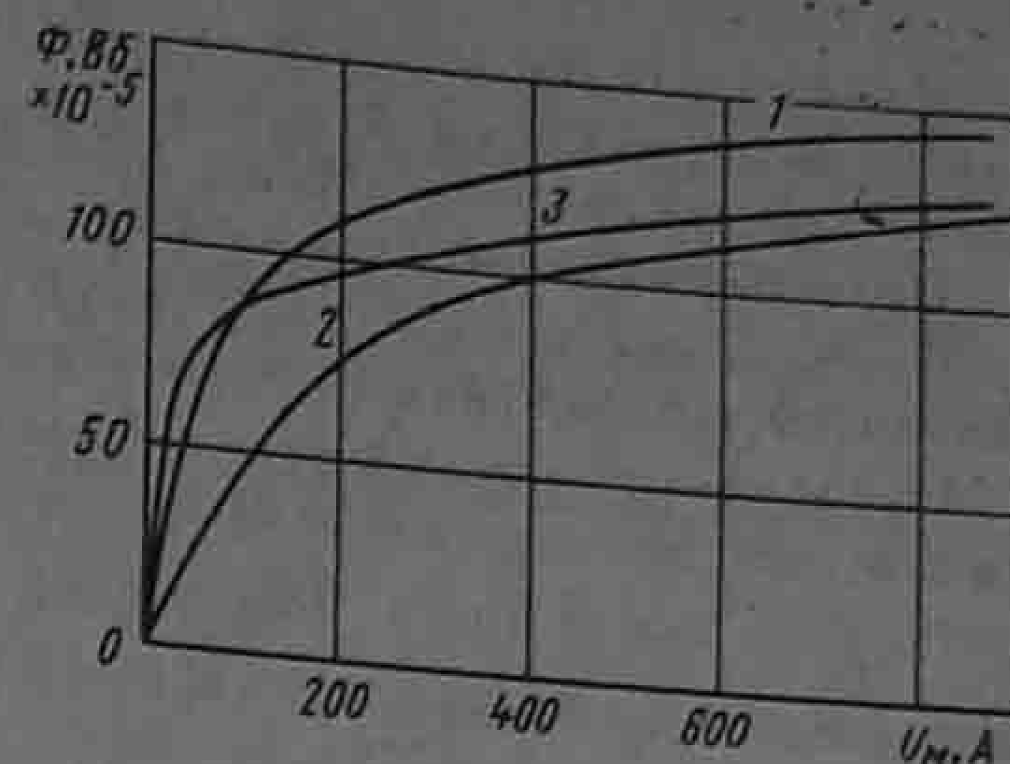



Рис. 14.15

Падение магнитного напряжения на первом участке $U_{м1} = H_1 l_1 + 0{,}8 \cdot 10^6 \cdot B_1 \delta_1$, где $l_1 = 0{,}24$ м — длина пути в стали по первой ветви. Выбранному значению $B_1$ соответствует $\Phi_1 = B_1 S_1$.

Таким образом, для каждого значения потока $\Phi_1$ подсчитываем $U_{м1}$ и по точкам строим зависимость $\Phi_1 = f(U_{м1})$ — кривая *1* на рис. 14.15.

Аналогично строим зависимость $\Phi_2 = f(U_{м2})$ — кривая *2* на рис. 14.15; $U_{м2} = H_2 l_2 + 0{,}8 \cdot 10^6 \cdot B_2 \delta_2$, где $l_2 = 0{,}138$ м — длина пути в стали во второй ветви.

Кривая *3* есть зависимость $\Phi_3 = f(U_{м3})$; $U_{м3} = H'_3 l'_3 + H''_3 l''_3$, где $l'_3 \approx 0{,}1$ и $l''_3 \approx 0{,}14$ м. Им соответствуют участки третьей ветви, имеющие сечения 9 и 7,5 см$^2$.

Магнитная цепь (см. рис. 14.12) формально аналогична нелинейной электрической цепи (см. рис. 13.7). Аналогами $I_1$ и $I_2$ электрической цепи (см. рис. 13.7) являются магнитные потоки $\Phi_1$ и $\Phi_2$ магнитной цепи (см. рис. 14.12), аналогом ЭДС $E_1$ — МДС $I_1 w_1$, аналогом зависимости тока в первой ветви от падения напряжения на сопротивлении первой ветви $[I_1 = f(U_1)]$ — зависимость магнитного потока $\Phi_1$ в первой ветви магнитной цепи от падения магнитного напряжения $U_{м1}$ вдоль первой ветви $[\Phi_1 = f(U_{м1})]$ и т. д.

Воспользуемся аналогией с нелинейной электрической цепью для определения потоков $\Phi_1$, $\Phi_2$, $\Phi_3$. С этой целью выполним графические построения, подобные построениям на рис. 13.10.

Вспомним, что кривые (см. рис. 13.10) представляют собой зависимости токов в ветвях схемы не от падений напряжений ($U_1$, $U_2$, $U_3$) вдоль этих ветвей, а от напряжения $U_{ab}$ между узлами $a$ и $b$ схемы (см. рис. 13.7).

В соответствии с этим введем в расчет магнитное напряжение — разность магнитных потенциалов — между узлами $a$ и $b$: $U_{мab} = \varphi_{мa} - \varphi_{мb}$.

Выразим магнитный потенциал точки $a$ ($\varphi_{мa}$) через магнитный потенциал точки $b$ ($\varphi_{мb}$), следуя от точки $b$ к точке $a$ сначала по первой ветви, затем по второй и, наконец, по третьей. Для первой ветви

$$\varphi_{мa} = \varphi_{мb} - (H_1 l_1 + H_{\delta 1} \delta_1) + I_1 w_1,$$

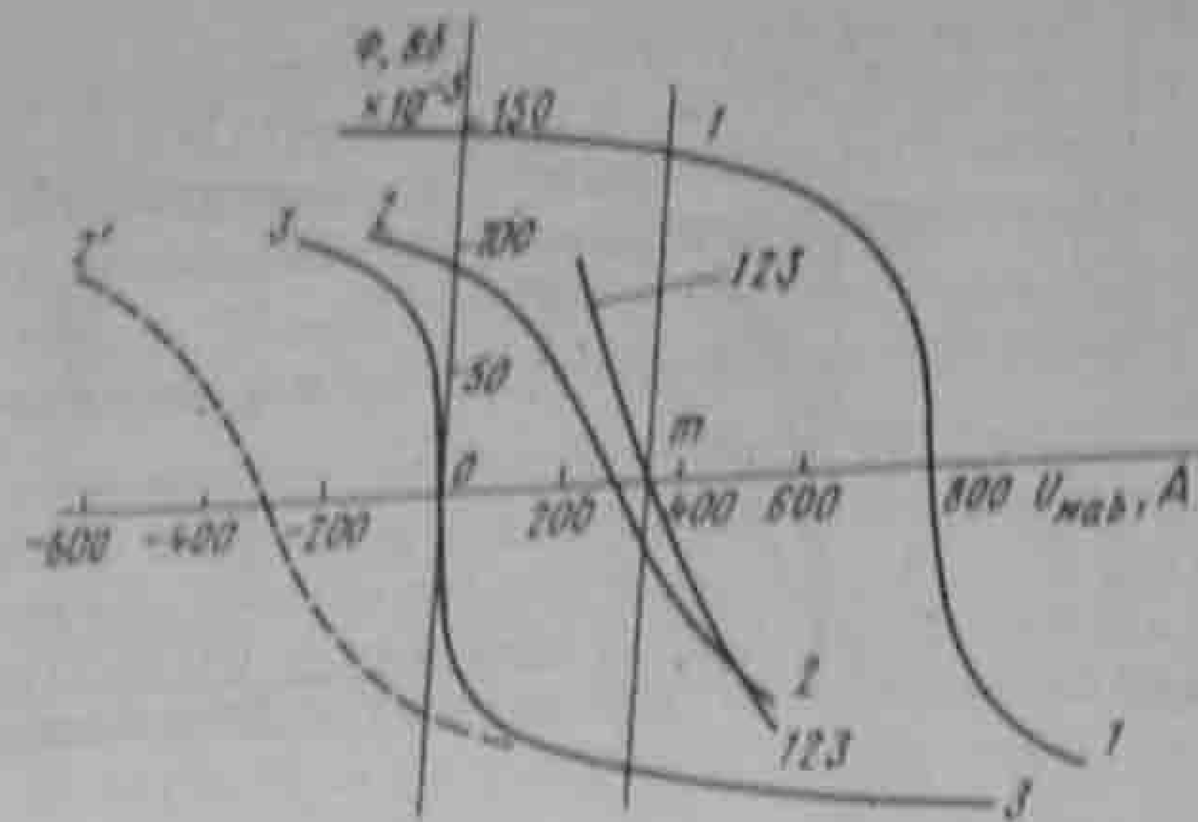



Рис. 14.16

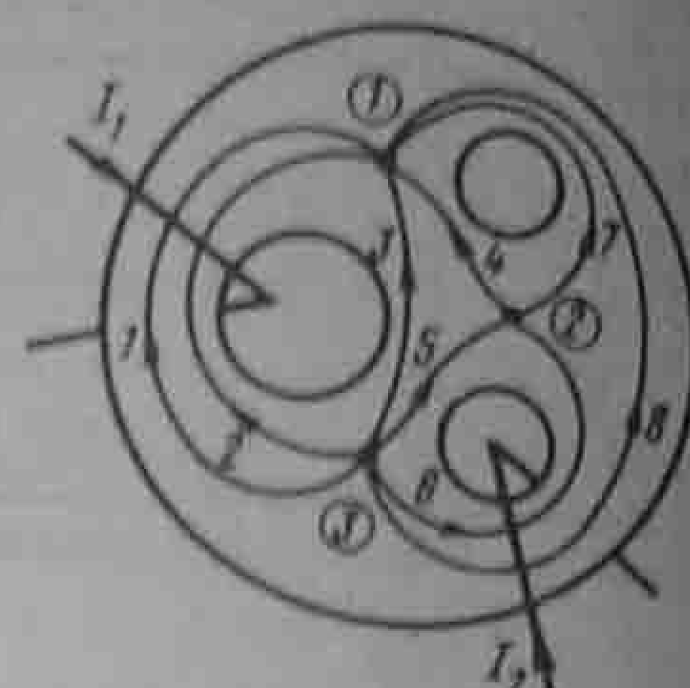



Рис. 14.17

где $H_1l_1 + H_{\delta 1}\delta_1 = U_{м1}$ — падение магнитного напряжения по первой ветви. Знак минус перед скобкой обусловлен тем, что при перемещении согласно с направлением потока магнитный потенциал (как и электрический при перемещении по току) снижается (если бы двигались против потока, то магнитный потенциал возрастал и нужно было ставить плюс). Плюс перед $I_1w_1$ свидетельствует о том, что при перемещении от точки $b$ к точке $a$ идем согласно с направлением МДС $I_1w_1$. Таким образом, для первой ветви

$$U_{мab} = \varphi_{мa} - \varphi_{мb} = -U_{м1} + I_1w_1; \qquad (а)$$

для второй ветви (перемещаясь от $b$ к $a$ по потоку $\Phi_2$ и согласно с направлением МДС $I_2w_2$)

$$U_{мab} = -U_{м2} + I_2w_2; \qquad (б)$$

для третьей ветви (на ней МДС отсутствует)

$$U_{мab} = -U_{м3}. \qquad (в)$$

Графическое решение задачи приведено на рис. 14.16. На нем зависимость $\Phi_1 = f(U_{мab})$ представлена кривой *1*; $\Phi_2 = f(U_{мab})$ — кривой *2*; $\Phi_3 = f(U_{мab})$ — кривой *3*. Построение их производилось так же, как и построение соответствующих кривых на рис. 13.10. Начало кривой *1* смещено в точку $U_{мab} = I_1w_1 = 800$ А; начало кривой *2* — в точку $U_{мab} = I_2w_2 = 300$ А. Кривая *123* представляет собой $\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = f(U_{мab})$. Она пересекает ось абсцисс в точке $m$. Проведем через точку $m$ вертикаль и найдем потоки в ветвях:

$$\Phi_1 = 126{,}2 \cdot 10^{-5}\ Вб;\ \Phi_2 = -25 \cdot 10^{-5}\ Вб;\ \Phi_3 = -101{,}2 \cdot 10^{-5}\ Вб.$$

В результате расчета потоки $\Phi_2$ и $\Phi_3$ оказались отрицательными. Это означает, что в действительности они направлены противоположно положительным для них направлениям, показанным стрелками на рис. 14.12.

Рассмотрим, какие изменения произошли бы в построениях на рис. 14.16, если бы какая-либо из МДС изменила направление на противоположное, например в



результате изменения направления протекания тока в этой обмотке. Допустим, что изменилось на противоположное направление МДС $I_2w_2$. В уравнение (б) МДС $I_2w_2$ вошла бы теперь с отрицательным знаком. При построениях это нашло бы свое отражение в том, что кривая *2* переместилась влево параллельно самой себе так, что пересекла бы ось абсцисс не в точке $U_{мab} = 300$ А, а в точке $U_{мab} = -300$ А (пунктирная кривая *2*). Кривые *1* и *3* останутся без изменений, но суммарная кривая $\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = f(U_{мab})$ будет иная.

**§ 14.19. Дополнительные замечания к расчету магнитных цепей.** 1. При построении ВАХ участков магнитной цепи в § 14.12 и далее явление гистерезиса не учитывалось. Поэтому ВАХ выходили из начала координат, не зависели от предыдущих процессов намагничивания и размагничивания и удовлетворяли соотношению $\Phi(-U_м) = -\Phi(U_м)$. Если учитывать гистерезис, то у ВАХ каждой ветви будут неодинаковые восходящий и нисходящий участки, которые, в свою очередь, зависят от магнитного состояния, предшествующего рассматриваемому (от магнитной предыстории). В этом случае $\Phi(-U_м) \neq -\Phi(U_м)$. Для получения более правильных результатов при построении ВАХ следует учитывать гистерезис, что практически возможно, если известны гистерезисные зависимости используемого материала.

2. В логических устройствах и устройствах, применяемых в вычислительной технике, используют элементы, имеющие разветвленные магнитные цепи, выполненные из феррита с почти прямоугольной петлей гистерезиса (трансфлюксоры, биаксы, леддики и др.).

Изложенную в § 14.18 методику расчета, если ее несколько видоизменить, можно применить и при нахождении потокораспределения в упомянутых элементах в установившихся режимах работы. В этом случае расчет следует начинать с определения положения узлов магнитной цепи этого элемента (в таких элементах узлы, как правило, выражены в неявном виде). Каждую ветвь следует представить как две параллельные со своими длинами и рассматривать их как самостоятельные ветви со своими потоками. Это необходимо потому, что магнитные потоки в двух параллельных участках каждой ветви могут замыкаться по различным путям. Например, магнитные потоки двух параллельных участков при определенных условиях могут замыкаться *в пределах одной ветви*. Расчет выполняют так же, как и в § 14.18. Однако ВАХ каждого участка должны быть взяты в виде прямоугольной (ромбовидной) петли с исходящими из двух ее противоположных углов горизонтальными (почти горизонтальными) прямыми. Для каждого сочетания МДС (они могут и отсутствовать) будет по крайней мере по два решения, так как ВАХ имеют петлевую форму.

3. Если число узлов магнитной цепи больше двух, то потокораспределение в ней можно найти методом постепенного приведения ее к магнитной цепи с двумя узлами. Так, в трехотверстном трансфлюксоре (рис. 14.17) цифры в кружках *1, 2, 3* означают узлы. Восемь тонких линий — это средние магнитные линии ветвей. Стрелки на них указывают произвольно выбранные направления потоков. Провода с токами $I_1$ и $I_2$ проходят через отверстия трансфлюксора.

Сначала строим зависимость суммы потоков ветвей *5* и *6* от магнитного напряжения между узлами *3* и *2*, учитывая ток $I_2$. Затем строим зависимость $\Phi_{4,7} = f(U_{м2,1})$. Имея в виду, что $\Phi_{5,6} = \Phi_{4,7}$, суммируем абсциссы полученных кривых и находим $\Phi_{5,6} = f(U_{м3,1})$. После этого задача оказывается сведенной к задаче с двумя узлами *1* и *3*. В более сложных задачах можно воспользоваться методом, рассмотренным в [20].

4. Методика расчета разветвленных магнитных цепей в историческом плане развивалась постепенно и усовершенствовалась по мере возникновения новых практических задач. Сначала расчет проводили, используя магнитные сопротивления участков магнитной цепи $R_м$ (см. § 14.23). Однако ввиду того что $R_м$ является нелинейной функцией магнитного потока, который перед проведением расчета неизвестен, на второй стадии перешли к расчету магнитных цепей с использованием однозначных нелинейных ВАХ (см. § 14.13). Впоследствии появилась необходимость использовать петлевые зависимости потоков от магнитных напряжений. В настоящее время при расчете магнитных цепей, работающих при больших скоростях перемагничивания, оказывается необходимым принимать во внимание не только зависимость магнитного состояния от предшествующих процессов намагничивания, но учитывать и магнитную вязкость, и поверхностный эффект (см. § 16.10, 23.5).

**§ 14.20. Получение постоянного магнита.** Возьмем замкнутый кольцевой сердечник из магнитотвердого материала. Сделаем в нем два очень тонких (бесконечно тонких) радиальных пропила на расстоянии $\delta$ (рис. 14.18, *а*). Выпиленный кусок оставим пока на месте. Затем намотаем на сердечник обмотку и пропустим по ней такой ток, чтобы намагнитить сердечник до насыщения. После этого ток выключим и обмотку смотаем. Сердечник оказывается намагниченным. Намагниченность его есть следствие того, что магнитные моменты областей самопроизвольного намагничивания сохранили свою ориентацию, вызванную предшествующим воздействием внешнего поля.

Магнитный поток в теле сердечника определяется суммой магнитных моментов всего сердечника. Удалим выпиленный кусок (рис. 14.18, *б*). Объем намагниченного вещества уменьшится на объем вынутой части. Кроме того, магнитному потоку придется проходить через воздушный зазор. Все это приведет к уменьшению магнитного потока в теле сердечника.

В воздушном зазоре сердечника при отсутствии на нем обмотки с током проходит магнитный поток — устройство представляет собой постоянный магнит.

**§ 14.21. Расчет магнитной цепи постоянного магнита.** Магнитная индукция в зазоре магнита ($B_\delta$) зависит от соотношения между длиной воздушного зазора $\delta$ и длиной ферромагнитной части магнита $l_c$ (рис. 14.18, *б*). Обозначим: $H_\delta$ — напряженность поля в воздушном зазоре; $B_c$ — магнитная индукция в теле магнита; $H_c$ — напряженность магнитного поля в теле магнита.

Найдем две неизвестные величины $B_c$ и $H_c$, полагая известными кривую размагничивания ферромагнитного материала, зазор $\delta$ и длину $l_c$. Одна связь между ними (нелинейная) дается кривой размагничивания (рис. 14.18, *в*). Другая связь (линейная) следует из закона полного тока.

Действительно, если воспользоваться законом полного тока, то

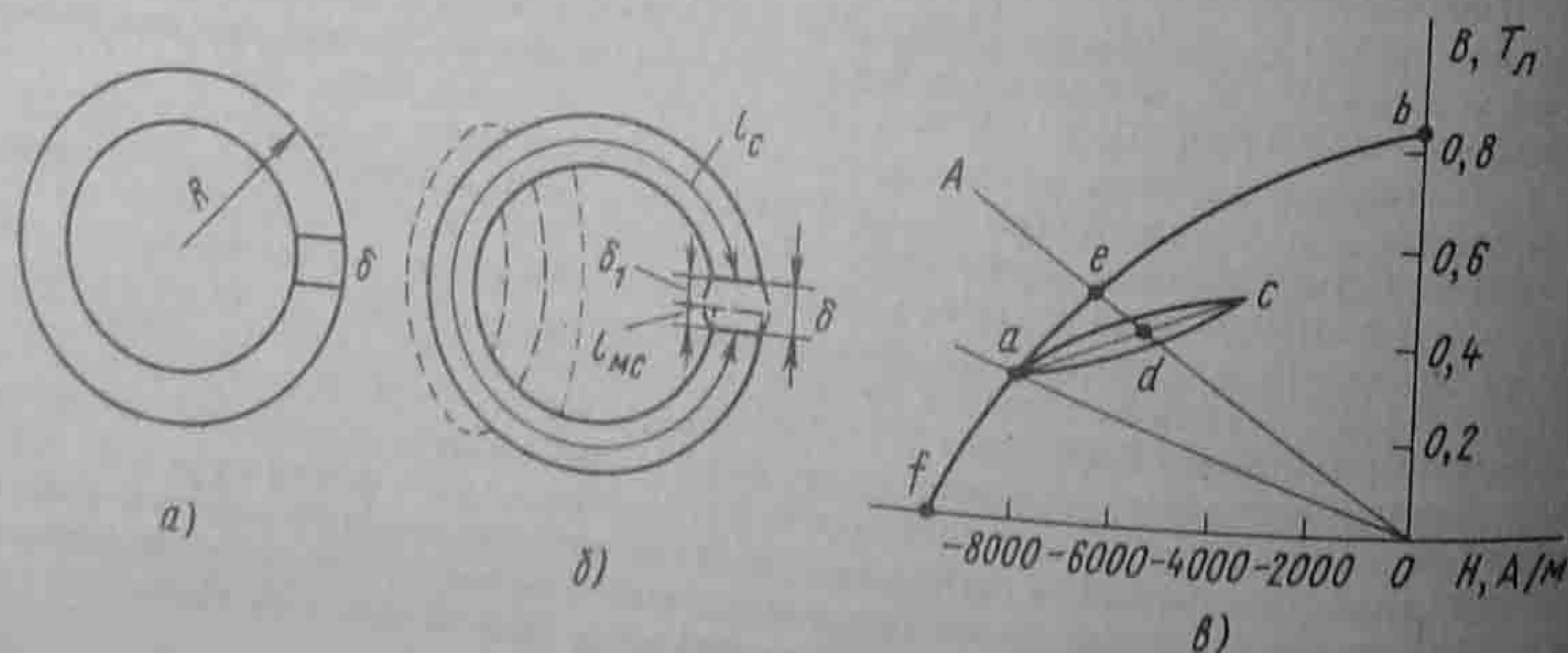



Рис. 14.18



можно записать

$$\oint \overline{H}\,d\overline{l} = H_c l_c + H_\delta \delta = 0. \qquad (14.11)$$

Нуль в правой части уравнения (14.11) объясняется тем, что на постоянном магните нет обмотки с током. Но $H_\delta = 0{,}8\cdot 10^6 B_\delta$, где $H_\delta$ — в А/м, $B_\delta$ — в Тл.

Если зазор достаточно мал, то можно в первом приближении принять, что рассеяние потока отсутствует и $B_c S_c = B_\delta S_\delta$, где $S_c$ — площадь поперечного сечения магнита; $S_\delta$ — площадь поперечного сечения воздушного зазора. Отсюда

$$B_\delta = B_c \frac{S_c}{S_\delta};\quad H_\delta = 0{,}8\cdot 10^6 B_\delta = 0{,}8\cdot 10^6 \frac{S_c}{S_\delta} B_c.$$

Подставив $H_\delta$ в уравнение (14.11), получим

$$H_c = -N B_c, \qquad (14.12)$$

где

$$N = 0{,}8\cdot 10^6 \frac{\delta S_c}{l_c S_\delta}. \qquad (14.13)$$

Коэффициент $N$, зависящий от геометрических размеров, называют *размагничивающим фактором*[1]: $[N] = \text{А}\cdot\text{м}/(\text{В}\cdot\text{с})$.

Для определения $H_c$ и $B_c$ на рис. 14.18, *в* следует нанести прямую, построенную по (14.12). В точке пересечения прямой с кривой размагничивания удовлетворяются обе связи между $B_c$ и $H_c$, которым должно быть подчинено решение.

Приведенный расчет дает достаточно точный результат, если зазор $\delta$ очень мал по сравнению с длиной $l$. Если это условие не выполнено, то значительная часть магнитных силовых линий замыкается, как показано пунктиром на рис. 14.18, *б*. В этом случае поток, индукция и напряженность вдоль сердечника изменяются. Это учитывают при расчете, вводя некоторые поправочные коэффициенты, определяемые из опыта.

**Пример 144.** Найти $B_c$, $B_\delta$, $H_c$ и $H_\delta$, если постоянный магнит (рис. 14.18, *б*) имеет $R = 5$ см, $\delta = 1$ см. Кривая размагничивания изображена на рис. 14.18, *в*.

Решение. Если пренебречь боковым распором магнитных силовых линий в зазоре, то $S_\delta = S_c$. При этом размагничивающий фактор $N = 0{,}8\dfrac{10^6}{2\pi\cdot 5 - 1} = 263\cdot 10^2$. На рис. 14.18, *в* проводим прямую $Oa$ по уравнению $H_c = -263\cdot 10^2 B_c$. Точка $a$ ее пересечения с кривой размагничивания дает $B_c = 0{,}3$ Тл и $H_c = -8000$ А/м. Такая же индукция будет в воздушном зазоре. $H_\delta = 0{,}8\cdot 10^6\cdot 0{,}3 = 24\cdot 10^4$ А/м.

---

[1] Название коэффициента $N$ показывает, что с его помощью можно определить то размагничивание (уменьшение магнитного потока в теле магнита), которое происходит при введении воздушного зазора в магнитную цепь постоянного магнита.

**§ 14.22. Прямая и коэффициент возврата.** Частично заполним зазор $\delta$ на длине $l_{мс}$ (рис. 14.18, *б*) куском магнитомягкого материала. Под действием поля постоянного магнита внесенный кусок намагнитится и поток в теле магнита возрастет.

Ввиду наличия гистерезиса магнитное состояние постоянного магнита будет изменяться не по участку *ab* (рис. 14.18, *в*) кривой размагничивания, а по нижней ветви *adc* частного цикла.

Для упрощения расчетов принято заменять частный цикл прямой линией, соединяющей его вершины. Эту прямую линию называют *прямой возврата*.

Тангенс угла наклона прямой возврата к оси абсцисс называют *коэффициентом возврата*. Его числовые значения для различных магнитотвердых материалов даются в руководствах по постоянным магнитам.

Обозначим длину оставшегося воздушного зазора (рис. 14.18, *б*) $\delta_1 = \delta - l_{мс}$ и на основании закона полного тока запишем

$$H_c l_c + H_{\delta 1}\delta_1 + l_{мс}H_{мс} = 0.$$

Напряженность поля в магнитомягком материале $H_{мс}$ много меньше напряженности поля в магнитотвердом материале и в воздушном зазоре при одном и том же значении магнитной индукции, поэтому слагаемым $H_{мс}l_{мс}$ пренебрегаем по сравнению с остальными. При этом

$$H_c = -0{,}8\cdot 10^6\,\frac{\delta_1}{l_c}\,\frac{S_c}{S_\delta}B_c. \qquad (14.12а)$$

Магнитное состояние постоянного магнита определяется пересечением прямой возврата с прямой, построенной по (14.12а).

**Пример 145.** Воздушный зазор магнита примера 155 уменьшен вдвое. Найти индукцию в нем.

Р е ш е н и е. Находим $N = 131{,}5\cdot 10^2$. Прямая *OA* (рис. 14.18, *в*) пересекается с прямой возврата в точке *d*. Поэтому $B_c = 0{,}42$ Тл. Такая же индукция будет и в воздушном зазоре, так как $S_\delta = S_c$.

Следовательно, уменьшение зазора со значения $\delta$ до $\delta_1$ привело к увеличению магнитной индукции в нем с 0,3 до 0,42 Тл.

Если же зазор $\delta_1$ получить не путем его уменьшения со значения $\delta$ до $\delta_1$, а путем выемки из намагниченного сердечника куска длиной $\delta_1$, то магнитное состояние магнита определится пересечением луча *AO* с кривой размагничивания *baf* в точке *e*. В этом случае $B_c = B_\delta = 0{,}48$Тл, т. е. возрастет на $[(0{,}48 - 0{,}4)/0{,}4]\cdot 100 = 20\%$.

Таким образом, магнитный поток в постоянном магните зависит не только от размера воздушного зазора, но и от предыстории установления этого зазора.

**§ 14.23. Магнитное сопротивление и магнитная проводимость участка магнитной цепи. Закон Ома для магнитной цепи.** По определению, падение магнитного напряжения $U_м = Hl$, но

$$H = B/(\mu_0\mu_r) = \Phi/(\mu_0\mu_r S),$$

где $S$ — площадь поперечного сечения участка.



Следовательно,

$$U_м = \Phi\,\frac{l}{\mu_0\mu_r S} = \Phi R_м, \qquad (14.14)$$

откуда

$$R_м = l/(\mu_0\mu_r S). \qquad (14.15)$$

Уравнение (14.14) называют *законом Ома для магнитной цепи*. Это уравнение устанавливает связь между падением магнитного напряжения $U_м$ и потоком $\Phi$; $R_м$ называют *магнитным сопротивлением* участка магнитной цепи. Величину, обратную магнитному сопротивлению, называют *магнитной проводимостью*:

$$G_м = 1/R_м = \mu_0\mu_r S/l. \qquad (14.16)$$

Из предыдущего известно, что вебер-амперная характеристика участка магнитной цепи в общем случае нелинейна. Следовательно, в общем случае $R_м$ и $G_м$ являются функциями магнитного потока (непостоянными величинами). Поэтому практически понятиями $R_м$ и $G_м$ при расчетах пользуются в тех случаях, когда магнитная цепь в целом или ее участок, для которых определяются $R_м$ и $G_м$, не насыщены. Чаще всего это бывает, когда в магнитной цепи имеется достаточно большой воздушный зазор, спрямляющий вебер-амперную характеристику магнитной цепи в целом или ее участка.

Магнитное сопротивление участка цепи $R_м$ можно сопоставить со статическим сопротивлением нелинейного резистора $R_{ст}$ (см. § 13.10) и так же, как последнее, $R_м$ можно использовать при качественном рассмотрении различных вопросов, например вопроса об изменении потоков двух параллельных ветвей при изменении потока в неразветвленной части магнитной цепи (как в § 13.2 относительно электрической цепи).

**Пример 146.** Найти $R_м$ воздушного зазора постоянного магнита и магнитный поток, если $\delta = 0{,}5$ см, площадь поперечного сечения воздушного зазора $S = 1{,}5$ см$^2$, $U_м = 1920$ А.

Р е ш е н и е:

$$R_м = \frac{l}{\mu_0\mu_r S} = \frac{5\cdot 10^{-3}}{1{,}257\cdot 10^{-6}\cdot 1\cdot 1{,}5\cdot 10^{-4}} = 0{,}256\cdot 10^8\ Гн^{-1};$$

$$\Phi = U_м/R_м = 1920/(0{,}256\cdot 10^8) = 7230\cdot 10^{-8}\ Вб,$$

где $l$ — в м; $S$ — в м$^2$.

В заключение отметим, что если воспользоваться понятием магнитного сопротивления, то второй закон Кирхгофа [см. формулу (14.9)] для любого контура магнитной цепи, содержащей *n* участков, может быть записан так:

$$\sum_{k=1}^{n}\Phi_k R_{мk} = \sum_{k=1}^{n} I_k w_k. \qquad (14.17)$$

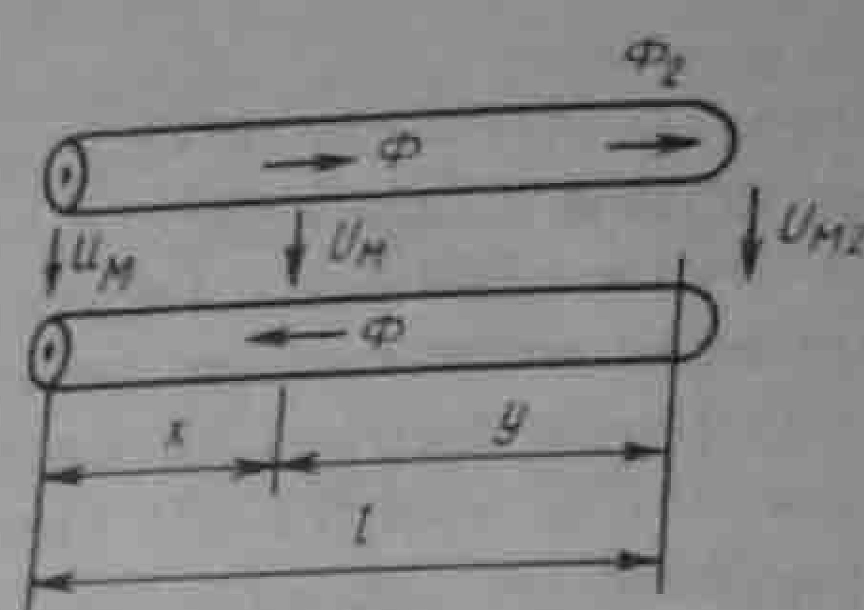



Рис. 14.19

Практически формулой (14.17) как расчетной удается воспользоваться, когда магнитная цепь не насыщена и $R_{мk}$ не является функцией $\Phi_k$. Если же имеет место насыщение, то $R_{мk}$ является функцией $\Phi_k$ (т. е. неизвестно $R_{мk}$ и $\Phi_k$) и при использовании формулы (14.17) возникают известные трудности.

**§ 14.24. Магнитная линия с распределенными параметрами.** На рис. 14.19 изображены два ферромагнитных стержня длины $l$, радиуса $r$, магнитной проницаемости $\mu_a$, расположенные в воздухе. Расстояние между осями стержней $d \ll l$ и соизмеримо с $r$. Вдоль стержней проходит постоянный во времени магнитный поток в противоположных направлениях.

Обозначим $R_{м0} = \dfrac{2}{\mu_a \pi r^2}$ ($Гн^{-1} \cdot м^{-1}$) — продольное магнитное сопротивление двух стержней на единицу длины линии; $G_{м0} = \dfrac{\pi\mu_0}{\ln\dfrac{d-a}{r}}$ ($Гн \cdot м^{-1}$) — поперечная магнитная проводимость на единицу длины линии. Если поток в конце линии $\Phi_2$ (нагрузка на рис. 14.19 не показана), а магнитное напряжение $U_{м2}$, то, используя аналогию с электрической линией с распределенными параметрами (гл. 11), запишем формулы:

$$U_м = U_{м2}\operatorname{ch}ay + \Phi_2 Z_{вм}\operatorname{sh}ay, \qquad (14.18)$$

$$\Phi = \frac{U_{м2}}{Z_{вм}}\operatorname{sh}ay + \Phi_2\operatorname{ch}ay. \qquad (14.19)$$

$U_м$, $\Phi$ — напряжение и поток на расстоянии $y$ от конца линии, $Z_{вм} = \sqrt{R_{м0}/G_{м0}}$ — волновое магнитное сопротивление [$Гн^{-1}$], $a = \sqrt{R_{м0}G_{м0}}$ — постоянная распространения [$м^{-1}$].

Если воспользоваться системой уравнений Максвелла в симметричной форме (см. III часть курса), то для *синусоидального режима работы* магнитной линии рис. 4.19 вместо уравнений (4.18) и (4.19) будут следующие [18 ч. II]:

$$\dot U_м = \dot U_{м2}\operatorname{ch}\nu y + \dot\Phi_2 Z_{вм}\operatorname{sh}\nu y, \qquad (14.20)$$

$$\dot\Phi\ \frac{\dot U_{м2}}{Z_{вм}}\operatorname{sh}\nu y + \dot\Phi_2\operatorname{ch}\nu y. \qquad (14.21)$$



Волновое магнитное сопротивление $Z_{вм} = \sqrt{Z_{0м}/Y_{0м}}$ [А/Вс]. Постоянная распространения $\nu = \sqrt{Z_{0м}Y_{0м}}$ [$М^{-1}$]. Продольное магнитное сопротивление единицы длины $Z_{0м} = R_{0м} + j\omega L_{0м}$ [А/мВс]. Поперечная магнитная проводимость единицы длины $Y_{0м} = G_{0м} + j\omega C_{0м}$ [Вс/Ам]. Стержни полагаем ферритовыми, для них абсолютная магнитная проницаемость $\mu_{ac} = \mu_0\mu_r e^{-j\varphi_r}$. Продольное резистивное сопротивление $R_{0м} = \dfrac{2\cos\varphi_r}{\pi a^2\mu_0\mu_r}$ [А/ВсМ]. Поперечная резистивная проводимость $G_{0м} = \dfrac{\pi\mu_0}{\ln\dfrac{d-a}{a}}$ [Вс/Ам]. Продольная магнитная индуктивность единицы длины линии для магнитного потока $L_{0м} = L'_{0м} + L''_{0м}$. $L'_{0м}$ — внутренняя магнитная индуктивность двух стержней, равная $\dfrac{2\sin\varphi_r}{\pi a^2\mu_0\mu_r\omega}$ [А/Вм]; $L''_{0м}$ — внешняя магнитная индуктивность единицы длины линии, равная отношению потока вектора электрического смещения $\vec D$ $\Phi_D$ в пространстве между стержнями (созданного магнитным током $i_м = \dfrac{\gamma_{мс}}{\mu_{ac}}\Phi$, проходящим по стержням) к магнитному потоку $\Phi$. $L''_{0м} = \dfrac{\varepsilon_0\gamma_{мс}\ln\dfrac{d-a}{a}}{\pi\mu_{ac}}$ [А/Вм]. Магнитная проводимость (непроницаемость) стержней $\gamma_{мс} = \gamma_{мо}\gamma_r$. $\gamma_{мо}$ — магнитная проводимость среды (воздуха), окружающей стержни [В/Ам] (точное числовое значение ее в настоящее время не определено, грубо приближенно без учета излучения $\gamma_{мо} = (2 \cdot 20)10^4$ $Вс^2/м$); $\gamma_r = \mu_r$. Поперечная магнитная емкость единицы длины линии, определяемая как отношение магнитного заряда единицы длины линии $\tau_м$ [Вс/м] к магнитному напряжению $U_м$ [А] между стержнями

$$C_{ом} = \frac{\pi\mu_0\mu_{ac}}{\gamma_{мс}\ln\dfrac{d-a}{a}}.\ [Вс/Ам].$$

$L''_{ом}$ и $C_{ом}$ проявляют себя при весьма высоких частотах, когда в открытой

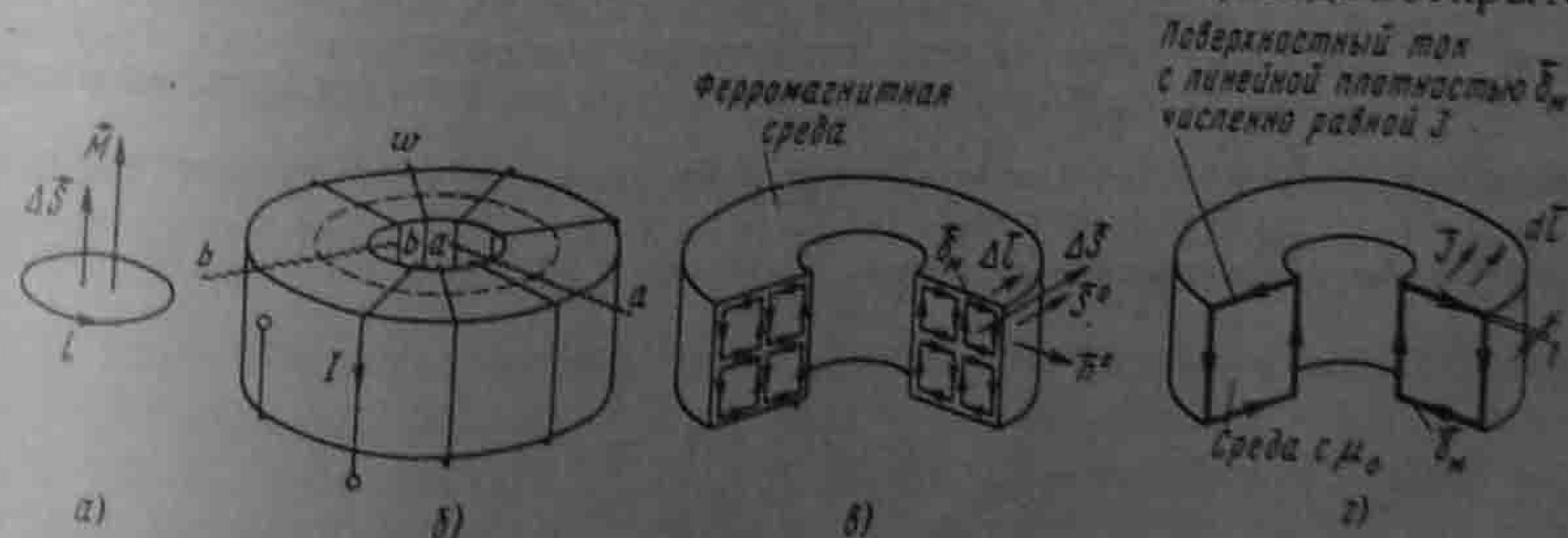



Рис. 14.20

системе рис. 4.19 возникает излучение в окружающее пространство. Как правило, можно считать, что $L_{0м}=L'_{0м}$, а $C_{ом}$ можно не учитывать.

**§ 14.25. Пояснения к формуле $\vec B=\mu_0(\vec H+\vec J)$.** Контур с током $i$, охватывающий площадку $\Delta S$, создает магнитный момент $\vec M = i\Delta\vec S$ (рис. 14.20, *а*). Вектор $\Delta\vec S$ численно равен площади $\Delta S$, а положительное направление $\Delta\vec S$ связано с положительным направлением тока $i$ правилом правого винта.

Ферромагнитный кольцевой сердечник (рис. 14.20, *б*) имеет обмотку с числом витков $w$, по которой проходит ток $I$. Каждая единица объема ферромагнитного материала обладает некоторым вектором намагниченности $\vec J$, что при расчете можно рассматривать как результат наличия в ферромагнитном материале контуров с молекулярными токами. Эти токи показаны в сечениях сердечника на рис. 14.20, *в* (намагничивающая обмотка с током не показана).

Среднюю линейную плотность молекулярного тока, приходящегося на единицу длины сердечника в направлении $\Delta l$, обозначим $\vec\delta_м$ (А/см). Единичный вектор, совпадающий по направлению с направлением $\vec\delta_м$, обозначим $\vec n^0$. Молекулярный ток $\vec\delta_м\Delta l\vec n^0$ охватывает площадку $\Delta S$. Положительное направление вектора $\Delta\vec S=\Delta S\vec S_0$ связано с положительным направлением этого тока правилом правого винта. Через $\vec S_0$ обозначен единичный вектор по направлению $\Delta\vec S$.

По определению, намагниченность $\vec J$ представляет собой магнитный момент единицы объема вещества. Среднюю по объему намагниченность вещества $\vec J$ можно найти путем деления магнитного момента контура с током $\vec\delta_м\Delta l\vec n^0$, охватывающим площадку $\Delta S$, на объем $\Delta V=\Delta l\Delta S$:

$$\vec J=\frac{\delta_м\Delta l\Delta S}{\Delta l\Delta S}\vec S^0=\delta_м\vec S_0.$$

Следовательно, средняя по объему намагниченность $J$ численно равна средней линейной плотности молекулярного тока и направлена по $\vec S^0$.

Как видно из рис. 14.20, *в*, на участках, являющихся смежными между соседними контурами, молекулярные токи направлены встречно и взаимно компенсируют друг друга. Нескомпенсированными остаются только токи по периферийному контуру (рис. 14.20, *г*).

Наличие областей самопроизвольной намагниченности в ферромагнитном теле при расчете можно эквивалентировать протеканием по поверхности этого тела, считая его неферромагнитным, поверхностного тока с линейной плотностью $\vec\delta_м$, причем по модулю $\delta_м=J$.

Запишем уравнение по закону полного тока для контура, показанного пунктиром на рис. 14.20, *б*. При этом учтем, что после введения поверхностного тока сердечник станет неферромагнитным и будет намагничиваться не только током $I$, протекающим по обмотке с числом витков $w$, но и поверхностным током с линейной плотностью $\vec\delta_м$.

На длине $dl$ поверхностный ток равен $\delta_м dl=\vec J d\vec l$. На длине всего сердечника он равен $\oint\vec J d\vec l$. Таким образом,

$$\oint\frac{\vec B}{\mu_0}d\vec l=Iw+\oint\vec J d\vec l.$$



Отсюда

$$\oint\left(\frac{\vec B}{\mu_0}-\vec J\right)d\vec l=Iw.$$

Величину $\dfrac{\vec B}{\mu_0}-\vec J$ обозначают $\vec H$ и называют *напряженностью магнитного поля*.

В отличие от магнитной индукции $\vec B$ и намагниченности $\vec J$ напряженность поля $\vec H$ не зависит от магнитных свойств намагничиваемого тела (см. пример 139). Это и явилось основанием для того, чтобы закон полного тока для любых сред записывать в виде $\oint\vec H d\vec l=Iw$.

Если ферромагнитное тело намагничено неравномерно по высоте и толщине, то плотность молекулярных токов смежных контуров на рис. 14.20, *в* неодинакова, а токи на смежных между соседними контурами участках компенсируются не полностью. Отсюда следует, что неравномерно намагниченное ферромагнитное тело при расчете можно заменить таким же в геометрическом смысле неферромагнитным телом, по поверхности которого течет поверхностный ток, плотность которого изменяется по высоте тела, а во внутренних точках тела течет объемный ток, плотность которого также изменяется от точки к точке.

### Вопросы для самопроверки

1. Дайте определения $\vec B$, $\vec J$, $\vec H$, Ф, $\mu_a$, $\mu_0$, $\mu_r$. Как они связаны между собой и в каких единицах выражаются? **2.** В чем отличие начальной, основной и безгистерезисной кривых намагничивания? **3.** Что понимают под частным и предельным циклами, прямой возврата, остаточной индукцией, коэрцитивной силой, магнитомягкими и магнитотвердыми материалами? **4.** Чем физически объясняются потери на гистерезис? Как их определить, располагая петлей гистерезиса? **5.** Сформулируйте закон полного тока. **6.** Дайте определение следующим понятиям: МДС, магнитная цепь, магнитопровод, ветвь магнитной цепи. **7.** Как определить направление МДС? **8.** С какой целью стремятся выполнить магнитную цепь с возможно меньшим воздушным зазором? **9.** Как выбирают направление магнитных потоков в ветвях? **10.** Сформулируйте первый и второй законы Кирхгофа для магнитных цепей. **11.** Поясните, как построить вебер-амперную характеристику участка цепи. **12.** Перечислите этапы расчета цепей методом двух узлов. **13.** В чем отличие магнитного напряжения от падения магнитного напряжения? **14.** Как экспериментально получить постоянный магнит? **15.** Как рассчитывают магнитную цепь с постоянным магнитом? **16.** Что понимают под магнитным сопротивлением $R_м$ участка цепи? магнитной проводимостью? От каких факторов они зависят? Зависят ли они от магнитного потока по участку цепи? Запишите второй закон Кирхгофа с использованием понятия $R_м$. **17.** Сформулируйте закон Ома для участка магнитной цепи. **18.** Могут ли $\vec B$ и $\vec H$ в ферромагнитном материале быть направлены встречно? **19.** Решите задачи 3.2; 3.10; 3.13; 3.15; 3.19.

## Глава пятнадцатая

# НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

**§ 15.1. Подразделение нелинейных элементов.** *Нелинейными электрическими цепями переменного тока* называют электрические цепи переменного тока, в состав которых входит один или несколько нелинейных элементов.

Как известно из ч. I учебника, прохождению переменного тока оказывают сопротивление не только резистивные, но и индуктивные и емкостные элементы. В соответствии с этим нелинейные элементы для переменного тока можно подразделить на три группы: 1) резистивные; 2) индуктивные; 3) емкостные. Каждую из этих групп можно подразделить на управляемые и неуправляемые.

Управляемые нелинейные элементы обычно имеют один или несколько управляющих электродов (зажимов) или управляющих обмоток, включаемых в управляющую цепь (цепи), воздействуя на ток или напряжение которых можно управлять сопротивлением в главной цепи. При отсутствии специальных управляющих электродов или обмоток управляющий ток или напряжение могут воздействовать на нелинейный элемент через электроды или обмотки главной цепи.

**§ 15.2. Общая характеристика нелинейных резисторов.** Широкое распространение в качестве управляемых нелинейных резистивных элементов получили трех (и более) электродные лампы, транзисторы и тиристоры. Свойства, принцип работы, характеристики и применение их рассмотрены в § 15.27 — 15.43.

Неуправляемыми нелинейными резистивными элементами в упомянутом смысле являются электрическая дуга, германиевые и кремниевые диоды, тиритовые сопротивления, терморезисторы, бареттеры, лампы накаливания и др. Их основные свойства и ВАХ рассматривались в гл. 13.

Нелинейные резистивные элементы можно классифицировать также по степени влияния температуры нагрева, обусловленной протекающими по ним токами, на форму ВАХ.

Так как тепловые процессы (процессы нагрева и остывания) являются процессами инерционными, то резисторы, нелинейность ВАХ которых в основном обусловлена изменением температуры в результате нагрева протекающим через них током, принято называть *инерционными*.

Резисторы, нелинейность ВАХ которых обусловлена иными (не тепловыми) процессами, принято называть *безынерционными* или почти безынерционными.

К группе инерционных резисторов относят электрические лампы накаливания, терморезисторы, бареттеры; к группе безынерционных или почти безынерционных — электронные лампы, полупроводниковые диоды, транзисторы и др.

Если постоянная времени нагрева инерционного резистора много больше периода переменного тока, то значение сопротивления его за период переменного тока практически не меняется, так как оно определяется не мгновенным, а действующим значением переменного тока. Если к такому резистору подвести синусоидальное напряжение (при условии, что постоянная времени нагрева его значительно больше периода синусоидального напряжения), то ток через него будет практически синусоидальным.

Можно сказать, что такие резисторы занимают промежуточное положение между линейными и нелинейными. К нелинейным они тяготеют вследствие того, что



сопротивление их является функцией действующего значения тока; к линейным — потому, что в установившемся режиме работы их сопротивления для различных моментов времени внутри периода воздействующей на схему ЭДС остаются практически неизменными.

**§ 15.3. Общая характеристика нелинейных индуктивных элементов.** *Под нелинейными индуктивными элементами* понимают индуктивные катушки с обмотками, намотанными на замкнутые сердечники из ферромагнитного материала, для которых зависимость магнитного потока в сердечнике от протекающего по обмотке тока нелинейна. Индуктивное сопротивление таких катушек, оказываемое прохождению переменного тока, не постоянно; оно зависит от значения переменного тока. Условимся называть их нелинейными индуктивными катушками.

Нелинейные индуктивные катушки подразделяют на управляемые и неуправляемые, но деление на безынерционные и инерционные на них не распространяется, так как их нелинейность обусловлена свойствами ферромагнитного материала, а не тепловым эффектом.

На электрических схемах нелинейную индуктивную катушку изображают в виде замкнутого сердечника с обмоткой (рис. 15.1, *а*) или как показано на рис. 15.1, *б*.

Сердечники нелинейных индуктивных катушек при относительно низких частотах делают обычно двух типов: пакетные и спиральные.

Пакетные сердечники состоят из тонких пластин ферромагнитного материала кольцевой, П- или Ш-образной формы.

Спиральные сердечники изготовляют из тонкой ферромагнитной ленты. По форме они напоминают туго навитую часовую пружину.

Пластины пакетного и отдельные витки спирального сердечников изолируют друг от друга эмалевым лаком, жидким стеклом или каким-либо иным изолирующим составом и запекают. Изоляция необходима для уменьшения потерь энергии в сердечнике от вихревых токов (см. § 15.4).

При высоких частотах резко возрастают потери в листовых сердечниках, поэтому сердечники, предназначенные для работы на высоких частотах, выполняют обычно из магнитомягкого феррита.

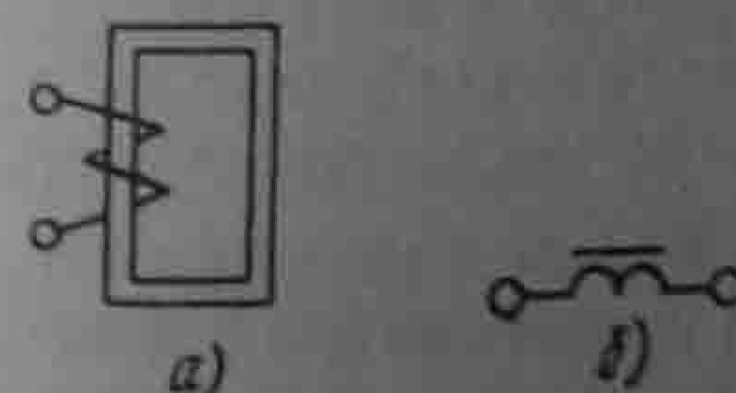



Рис. 15.1

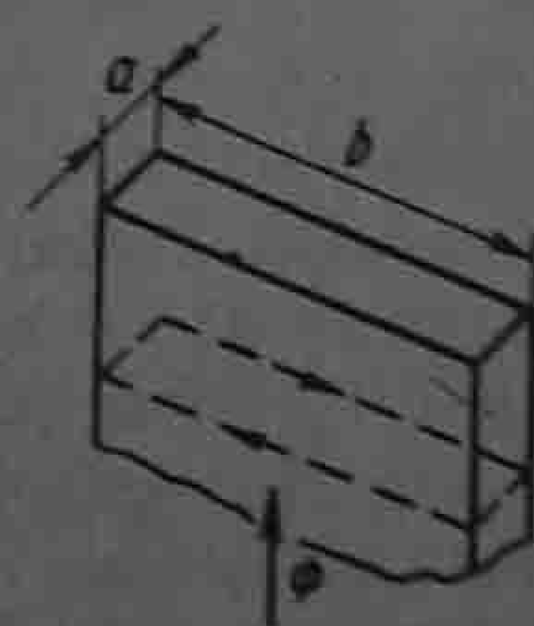



Рис. 15.2

**§ 15.4. Потери в сердечниках нелинейных индуктивных катушек, обусловленные вихревыми токами.** Если по индуктивной катушке со стальным сердечником проходит переменный ток, то в сердечнике возникает переменный магнитный поток, под действием которого в листах сердечника образуются вихревые токи. На рис. 15.2 изображен один лист сердечника. Пусть магнитный поток, увеличиваясь, направлен вверх (вдоль листа). В плоскости листа, перпендикулярной магнитному потоку, по закону электромагнитной индукции наводится ЭДС. Эта ЭДС вызывает в нем ток, который называют *вихревым*. Контур, по которому замыкается вихревой ток, изображен пунктиром на рис. 15.2. Вихревые токи по закону Ленца стремятся создать поток, встречный по отношению к вызвавшему их потоку.

Потери энергии в листе на вихревые токи пропорциональны квадрату наведенной в контурах листа ЭДС и обратно пропорциональны сопротивлению контуров. ЭДС, наводимые в контурах, по которым замыкаются вихревые токи, при заданной ширине листа $b$ пропорциональны толщине листа $a$, амплитудному значению индукции и частоте. В свою очередь, сопротивление контура пропорционально его периметру и удельному сопротивлению. При $b \gg a$ периметр контура почти не зависит от толщины листа. Поэтому потери энергии на вихревые токи пропорциональны квадрату амплитудного значения индукции, квадрату частоты и квадрату толщины листа.

Уменьшить потери в листовом сердечнике на вихревые токи можно двумя путями: 1) изготовлением сердечника из тонких изолированных друг от друга листов (см. § 15.3); 2) добавлением в ферромагнитный материал примесей, увеличивающих его удельное сопротивление.

При частоте 50 Гц толщина листов обычно 0,35—0,5 мм; при высоких частотах — до 0,005 мм.

Кроме потерь от вихревых токов в сердечнике есть еще потери, обусловленные гистерезисом и магнитной вязкостью.

**§ 15.5. Потери в ферромагнитном сердечнике, обусловленные гистерезисом.** Как известно (см. § 14.4), ферромагнитным материалам свойственно явление гистерезиса, которое вызвано отставанием изменения магнитной индукции от изменения напряженности магнитного поля. Площадь гистерезисной петли в координатах $B$, $H$ ($B$ — индукция, $H$ — напряженность поля), снятая при достаточно медленном изменении магнитного поля во времени (когда вихревые токи практически отсутствуют), характеризует энергию, выделяющуюся в единице объема ферромагнитного материала за один период переменного тока (за одно перемагничивание). Потери в сердечнике, обусловленные гистерезисом, пропорциональны объ-



ему сердечника, первой степени частоты и площади гистерезисной петли. От толщины листов потери на гистерезис не зависят[1].

Гистерезисные петли при достаточно быстром изменении магнитного поля во времени называют *динамическими*. Динамические петли шире соответствующих статических за счет вихревых токов и магнитной вязкости.

Степень отличия динамической петли от соответствующей статической зависит от скорости перемагничивания (от частоты), удельного электрического сопротивления материала, толщины листов, температуры и наличия в магнитном потоке высших гармоник.

**§ 15.6. Схема замещения нелинейной индуктивной катушки.** В расчетном отношении нелинейную индуктивную катушку (рис. 15.1, *а*) можно представить в виде схемы на рис. 15.3, *а*. В ней параллельно с идеализированной (без потерь) нелинейной индуктивностью включено сопротивление $R_{гв}$, потери в котором имитируют потери энергии в сердечнике на гистерезис и вихревые токи, а последовательно включено резистивное сопротивление самой обмотки $R_{об}$; $U$— напряжение на нелинейной индуктивности.

Как уже отмечалось, потери энергии на гистерезис и вихревые токи $R_{гв}$ зависят от качества ферромагнитного материала и толщины листов сердечника.

Если сердечник выполнен из низкокачественного магнитного материала, то потери в нем относительно велики, а сопротивление $R_{гв}$ достаточно мало и ток $\dot{I}_{гв} = \dot{U}/R_{гв}$ может оказаться соизмеримым с током $\dot{I}_{\mu}$, протекающим по идеализированной (без потерь) нелинейной индуктивности; в этом случае ветвь с сопротивлением $R_{гв}$ необходимо учитывать в расчете.

Если же сердечник изготовлен из тонких листов высококачественного магнитомягкого материала, то потери в сердечнике малы, а сопротивление $R_{гв} = U^2/P_{гв}$ очень велико и потому ветвь с сопротивлением $R_{гв}$ можно не учитывать.

Часто вводят еще одно упрощение: полагают резистивное сопротивление обмотки $R_{об}$ настолько малым, что с падением напряже-

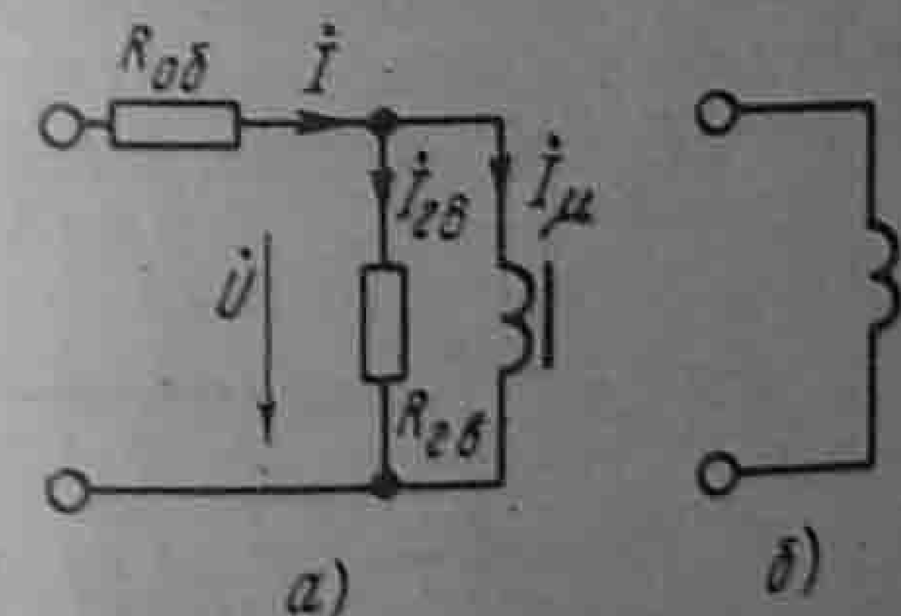



Рис. 15.3

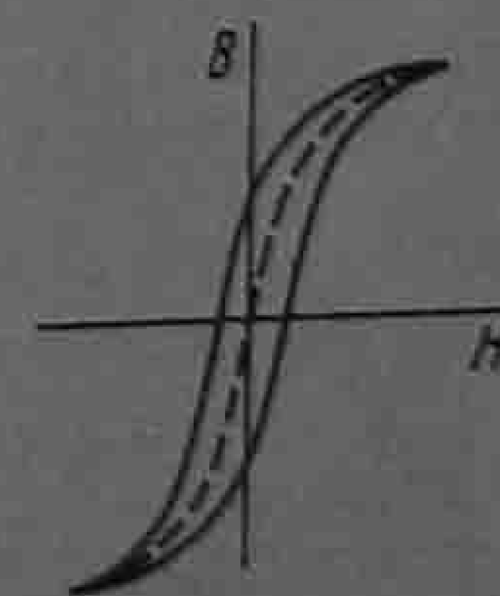



Рис. 15.4

[1] Явление поверхностного эффекта (см. ч. III учебника) здесь не учитываем.

ния в нем можно не считаться. Аналогичное упрощение часто делалось и при расчете цепей с линейными индуктивностями. В этом случае сопротивление катушки со стальным сердечником оказывается чисто индуктивным (соответствующая схема замещения представлена на рис. 15.3, *б*).

Переход от схемы замещения на рис. 15.3, *а* к схеме замещения на рис. 15.3, *б* вызван стремлением облегчить расчет цепей. При этом учитывают основной полезный нелинейный эффект (нелинейность между индукцией $B$ и напряженностью $H$) и пренебрегают побочным вредным эффектом (потерями, обусловленными гистерезисом и вихревыми токами в сердечнике).

При периодическом процессе нелинейность между $B$ и $H$ учитывают, ведя расчет по кривой, абсциссы которой равны полусумме абсцисс восходящей и нисходящей ветвей предельной гистерезисной петли (рис. 15.4).

**§ 15.7. Общая характеристика нелинейных емкостных элементов.** В обычных конденсаторах обкладки разделены веществом, диэлектрическая проницаемость которого не является функцией напряженности электрического поля. Для них зависимость мгновенного значения заряда $q$ на одной обкладке от мгновенного значения напряжения $u$ между обкладками (кулон-вольтная характеристика) представляет собой прямую линию (рис. 15.5), а их емкость не зависит от напряжения $u$. Для нелинейных конденсаторов зависимость $q$ от $u$ нелинейна (рис. 15.6).

Нелинейные конденсаторы называют еще *варикондами*. На электрических схемах вариконды изображают в соответствии с рис. 15.7, *а*. Пространство между обкладками вариконда заполняют сегнетодиэлектриком. *Сегнетодиэлектриками* называют вещества, диэлектрическая проницаемость которых является функцией напряженности электрического поля. Название «сегнетодиэлектрики» им присвоено потому, что впервые это свойство было обнаружено у кристаллов сегнетовой соли.

Сегнетодиэлектрики, подобно ферромагнитным веществам, обладают гистерезисом. *Электрическим гистерезисом* называют явление отставания изменения электрического смещения $D$ от изменения напряженности поля $E$. Как и в ферромагнитных веществах,

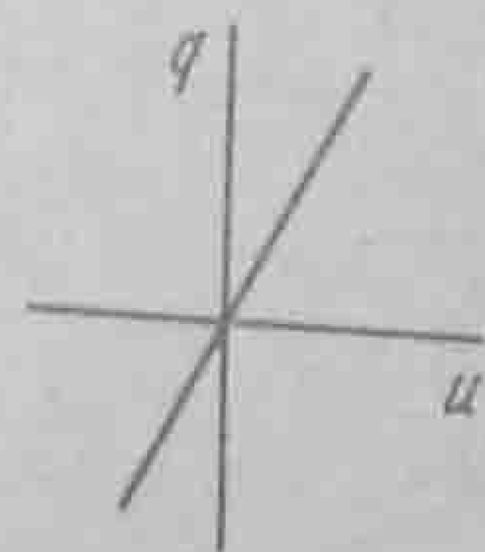


Рис. 15.5

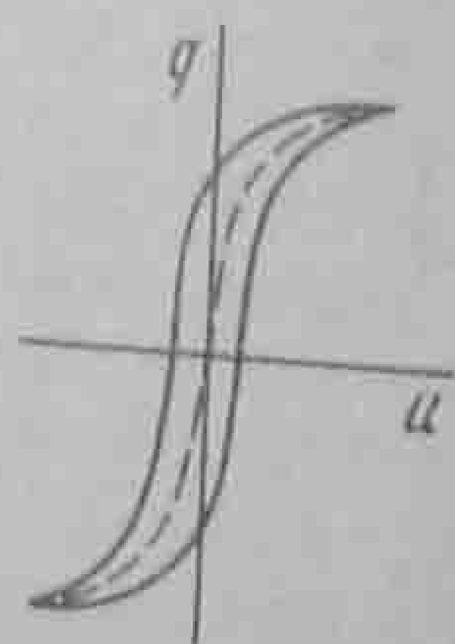


Рис. 15.6

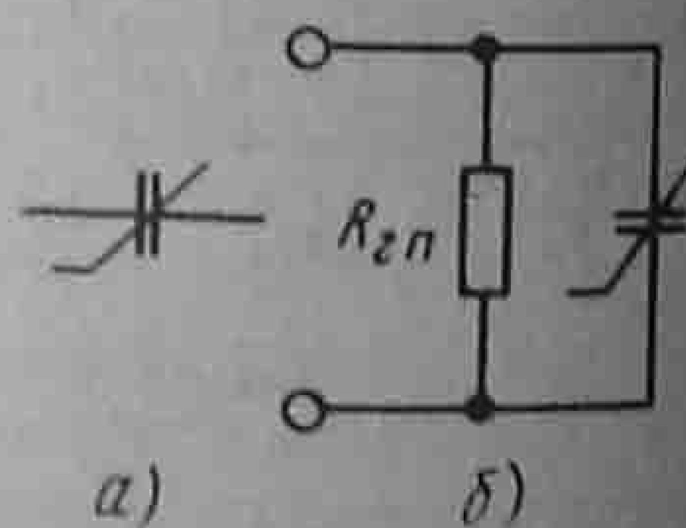


Рис. 15.7



площадь гистерезисной петли в координатах $D$, $E$ при медленном изменении поля характеризует потери на электрический гистерезис в единице объема сегнетодиэлектрика за один период изменения $E$.

Кроме потерь на гистерезис в варикондах есть еще потери, обусловленные тем, что проводимость сегнетодиэлектрика не равна нулю, а также вязкостью процессов поляризации.

На схеме замещения вариконд можно представить в виде параллельного соединения идеализированного (без потерь) вариконда и ветви с резистивным сопротивлением $R_{гп}$, потери в котором имитируют в расчетном отношении активные потери в вариконде (рис. 15.7, *б*).

Наличие потерь в варикондах является вредным побочным эффектом. Чем выше качество сегнетодиэлектрика, тем у́же петля гистереза и меньше потери в нем. Для облегчения исследования свойств электрических цепей, содержащих вариконды, гистерезисом и потерями обычно пренебрегают и зависимость $q = f(u)$ принимают в виде пунктирной кривой на рис. 15.6. Абсциссы ее равны полусумме абсцисс восходящей и нисходящей ветвей предельной гистерезисной петли. Однако при исследовании схем, в основе действия которых лежит явление гистерезиса, например при анализе работы некоторых запоминающих и счетных устройств, гистерезис необходимо учитывать.

**§ 15.8. Нелинейные элементы как генераторы высших гармоник тока и напряжения.** Если нелинейный элемент, например резистор, присоединить к генератору синусоидального напряжения, то проходящий через него ток будет иметь несинусоидальную форму и потому нелинейный резистор будет являться генератором высших гармоник тока. Для того чтобы убедиться в этом, рассмотрим рис. 15.8, где кривая *1* — ВАХ НР; кривая *2* — синусоидальное напряжение на нем; кривая *3* — ток через НР.

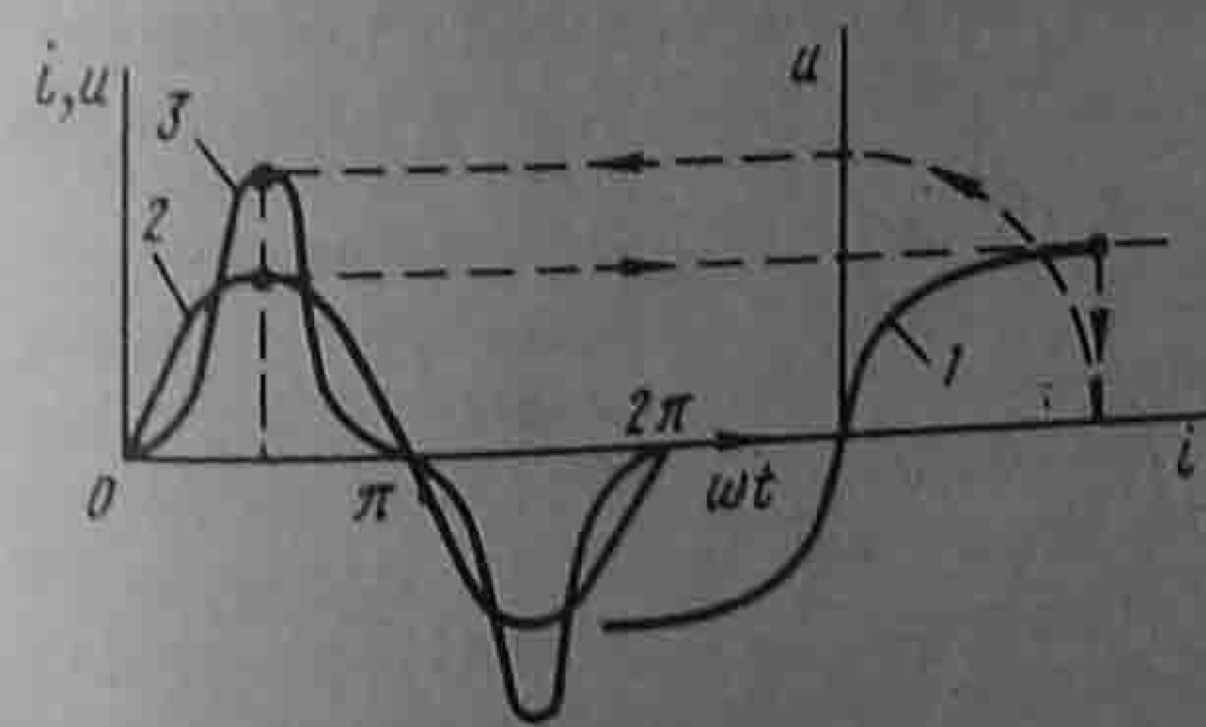


Рис. 15.8

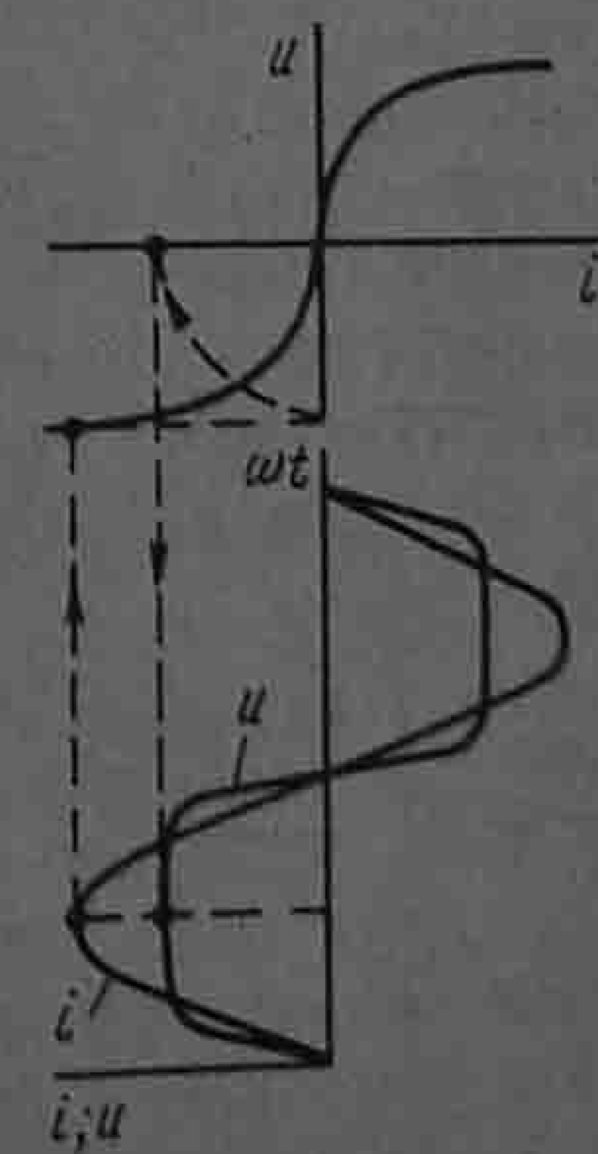


Рис. 15.9

Для построения кривой $i = f(\omega t)$ последовательно придаем $\omega t$ значения, равные, например, $0, \pi/6, \pi/4, \pi/3, \pi/2$ и т. д.; для каждого из них находим напряжение $u$, переносим соответствующее значение $u$ на кривую $u = f(i)$ и из нее определяем значение тока $i$ для взятого момента времени. Найденное значение тока $i$ откладываем на той ординате, которой соответствует выбранный момент времени.

Эти операции показаны на рис. 15.8 стрелками. Так, по точкам строим кривую *3*. Она имеет пикообразную форму и может быть разложена на гармоники.

Аналогично, если через нелинейный резистор пропустить синусоидальный ток, то напряжение на нем будет иметь несинусоидальную форму. Соответствующие построения приведены на рис. 15.9. Следовательно, нелинейный резистор является генератором высших гармоник напряжения.

Амплитуды первой и высших гармоник токов нелинейно зависят от амплитуд первой и высших гармоник напряжений на нелинейных элементах.

Это затрудняет анализ и расчет нелинейных цепей и в то же время позволяет осуществить с их помощью ряд важных в практическом отношении преобразований, принципиально невыполнимых с помощью линейных электрических цепей при неизменных во времени параметрах.

**§ 15.9. Основные преобразования, осуществляемые с помощью нелинейных электрических цепей.** На рис. 15.10, *а* схематически изображен четырехполюсник, в состав которого входят одно или несколько нелинейных элементов. Будем называть такой четырехполюсник *нелинейным* (НЧ).

На рис. 15.10, *б* представлен нелинейный шестиполюсник (НШ). В отличие от четырехполюсника он имеет еще два зажима («полюса»), к которым присоединяется источник управляющего напряжения или тока.

С помощью нелинейных четырех- и шестиполюсников можно осуществить ряд практически важных преобразований:

1) преобразовать переменный ток в постоянный. Устройства, предназначенные для этого, называют *выпрямителями* (см. § 15.54);

2) преобразовать постоянный ток в переменный с помощью устройств, которые называют *автогенераторами* (см. § 15.55) и *инверторами*;

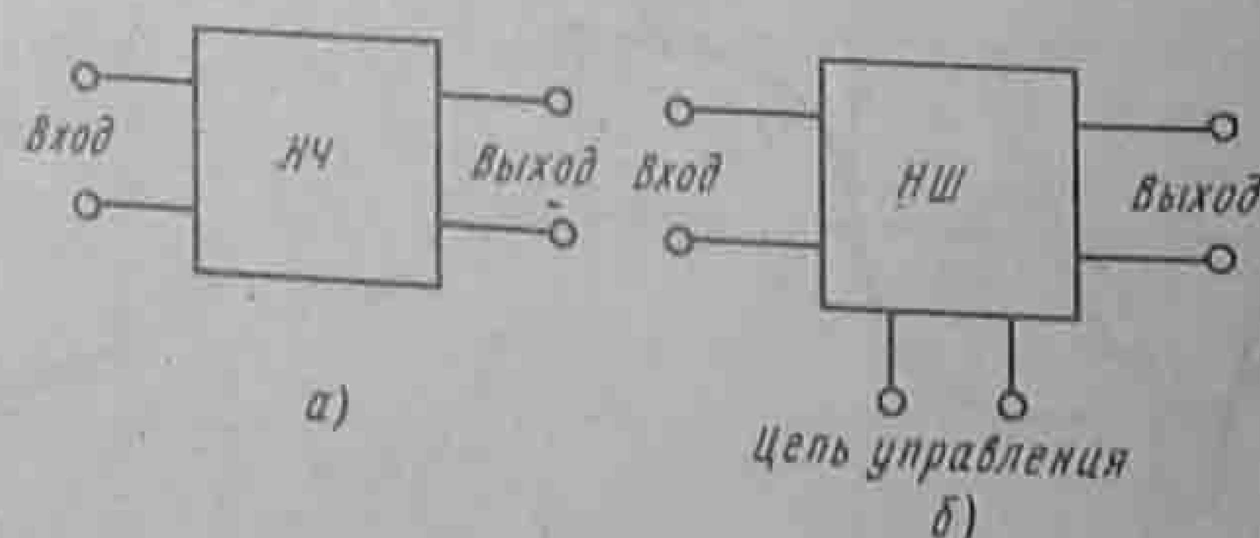



Рис. 15.10



3) осуществить умножение частоты, т. е. получить на выходе четырехполюсника напряжение, частота которого в несколько раз больше частоты входного напряжения. Четырехполюсники, с помощью которых производят умножение частоты, называют *умножителями частоты*; устройство, удваивающее частоту, — *удвоителем частоты*; устройство, утраивающее частоту, — *утроителем* и т. д.;

4) произвести деление частоты, т. е. выполнить операцию, обратную умножению частоты. Четырехполюсники, используемые для этого, называют *делителями частоты*;

5) стабилизировать напряжение (ток), т. е. получить на выходе четырехполюсника напряжение (ток), почти не изменяющееся по модулю при значительном изменении входного напряжения. Такие четырехполюсники называют *стабилизаторами напряжения* (тока). Устройства для стабилизации напряжения в цепях постоянного тока рассмотрены в гл. 13;

6) осуществить триггерный эффект, т. е. эффект резкого (скачкообразного) изменения выходной величины при незначительном изменении входной. Триггерный эффект рассмотрен в § 15.58 и 15.60;

7) произвести модуляцию. Как указывалось в § 7.15, модуляция есть процесс, при котором амплитуда (фаза или частота) высокочастотного колебания, поступающего на вход четырехполюсника, преобразуется таким образом, что характер изменения ее повторяет характер изменения управляющего низкочастотного сигнала. Устройства, предназначенные для этого, называют *модуляторами*;

8) осуществить демодуляцию, т. е. выделить из высокочастотного модулированного колебания запечатленный в нем низкочастотный управляющий сигнал. Устройства для демодуляции называют демодуляторами или детекторами;

9) преобразовать желаемым образом форму входного напряжения. Например, при подаче на вход нелинейного четырехполюсника напряжения синусоидальной формы на его выходе можно получить напряжение прямоугольной или пикообразной формы;

10) произвести усиление напряжения (тока), т. е. получить на выходе нелинейного устройства напряжение значительно большее, чем управляющее напряжение на его входе. Управляющее напряжение может быть постоянным или переменным.

С помощью трансформаторов также можно усиливать напряжение, однако в усилителях напряжения на нелинейных элементах энергия, потребляемая управляющей цепью, может быть в сотни, тысячи и даже сотни тысяч раз меньше энергии на выходе усилителя, тогда как в обычных трансформаторах эти энергии почти равны.

Усилители напряжения на нелинейных элементах позволяют усиливать не только переменное, но и постоянное напряжение и притом с плавным изменением коэффициента усиления;

11) осуществить усиление мощности, т. е. выделить на выходе

устройства (в нагрузке) мощность, значительно большую мощности, поступающей в управляющую цепь.

Когда говорят об усилении мощности, то имеют в виду, что приращение мощности, выделяющейся в нагрузке, оказывается больше приращения мощности, потребовавшейся для изменения режима работы нелинейного элемента;

12) произвести степенное и логарифмическое преобразование входного напряжения (тока).

С помощью нелинейных электрических цепей кроме перечисленных можно осуществить и другие нелинейные преобразования. К их числу относится, например, плавное преобразование частоты с помощью нелинейных четырех- и шестиполюсников, не содержащих подвижных частей. Рассмотрение этого преобразования выходит за рамки курса (см. [21]).

Нелинейные устройства широко применяют для умножения электрическим путем двух, трех функций и более, а также в электрических счетных и запоминающих устройствах, в качестве нелинейных фильтров, логических устройств и т. п. Несомненно, что по мере развития техники и изучения свойств нелинейных цепей последние будут находить применение для выполнения и других функций.

Если зависимость выходной величины от входной в относительно небольшом диапазоне может быть линейной или близкой к линейной, то в большинстве случаев стремятся выбрать режим работы преобразователя таким образом, чтобы работа его проходила именно на линейном участке (если это не противоречит назначению преобразователя).

**§ 15.10. Некоторые физические явления, наблюдаемые в нелинейных цепях.** В электрических цепях переменного тока, содержащих нелинейные индуктивности и линейные или нелинейные конденсаторы и линейные индуктивности, а также нелинейные индуктивности и нелинейные конденсаторы, при определенных условиях (далеко не всегда!) возникают физические явления, которые невозможны в линейных цепях[1]. Таких явлений довольно много. Ограничимся кратким рассмотрением только некоторых, наиболее важных из них.

1. Возникновение интенсивных колебаний в цепи на высшей гармонике при отсутствии этой гармоники во входном напряжении.

В линейных цепях возникновение интенсивных колебаний на высшей гармонике может быть только при наличии этой гармоники во входном напряжении.

2. Возникновение субгармонических колебаний.

Под *субгармоникой* понимают гармонику, частота которой в целое число раз меньше частоты источника ЭДС. Субгармонические колебания представляют собой колебания на какой-либо из субгармоник. Чаще всего они наблюдаются на частотах $\omega/3$; $\omega/2$; $\omega/5$ и т. д. ($\omega$ — частота источника ЭДС) (см. § 15.69).

3. Возникновение колебаний в цепи на гармонике с частотой $m\omega/n$, где $m$ и $n$ — целые числа.

4. Зависимость характера установившегося режима в нелинейной цепи переменного тока от предшествовавшего этому режиму состояния цепи и начальной фазы источника ЭДС.

Это явление может наблюдаться в нелинейных электрических цепях в зоне существования триггерного эффекта, о котором было упомянуто в § 15.9. Суть явления состоит в том, что при подключении нелинейной резонансной цепи к источнику ЭДС в ней может возникнуть один из двух возможных режимов. Какой из режимов возникнет, зависит от начальной фазы генератора и состояния цепи, предшествовавшего включению (см. § 15.58).

5. Возникновение автомодуляции.

*Автомодуляция* представляет собой процесс периодического или почти периодического изменения амплитуд токов и напряжений в нелинейных электрических цепях без воздействия на них внешнего модулирующего фактора, т. е. без воздействия на них низкочастотного сигнала (см. § 15.70).

6. Хаотические колебания, перемежающиеся резонансы и другие типы движений.

Перечисленные физические явления имеют место в резонансных цепях только в определенных для каждой цепи диапазонах параметров, которые, как правило, оказываются такими, что практически эти явления наблюдаются сравнительно редко. Кроме того, исследование условий возникновения этих явлений часто связано с громоздкими математическими выкладками. В настоящей книге они рассмотрены в § 15.58, 15.60, 15.69, 15.70. Подробно можно ознакомиться с этими явлениями также по [20] и [21].

**§ 15.11. Разделение нелинейных элементов по степени симметрии характеристик относительно осей координат.** Кроме деления на резистивные, индуктивные и емкостные, управляемые и неуправляемые (а резистивных — еще на безынерционные и инерционные) нелинейные элементы можно классифицировать еще по одному признаку — по степени симметрии характеристик для мгновенных значений относительно осей координат.

Пусть $x$ и $y$ — величины, характеризующие режим работы нелинейного элемента. Условимся $x$ обозначать величину, откладываемую по оси абсцисс, а $y$ — величину, откладываемую по оси ординат декартовой системы.

Характеристики, для которых выполняется условие $-y(-x) = y(x)$, называют *симметричными*; характеристики, не удовлетворяющие этому условию, — *несимметричными*.

[1]Имеются в виду обычные линейные цепи, параметры которых не являются функцией времени. О линейных цепях с непостоянными во времени параметрами см. гл. 18.

Симметричными характеристиками обладают нелинейные индуктивности и емкости, а из резистивных — тиритовые сопротивления, электрическая дуга с однородными электродами и некоторые другие.

Однако основные типы нелинейных резистивных элементов — электронная лампа, транзистор и тиристор — имеют несимметричные характеристики.

В ближайших 13 параграфах рассматриваются основные особенности работы нелинейных элементов с симметричными характеристиками.

Основные особенности работы нелинейных элементов с несимметричными характеристиками — электронной лампы и транзистора — излагаются в § 15.27—15.43.

**§ 15.12. Аппроксимация характеристик нелинейных элементов.** Для проведения математического анализа нелинейных цепей переменного тока и изучения их общих свойств целесообразно выразить аналитически зависимость между мгновенными значениями $u$ и $i$ для нелинейного резистора, зависимость между $B$ и $H$ для нелинейной индуктивной катушки, зависимость $q$ и $u$ для нелинейного конденсатора. Приближенное аналитическое описание характеристик нелинейных элементов называют *аппроксимацией* характеристик.

**§ 15.13. Аппроксимация симметричных характеристик для мгновенных значений гиперболическим синусом.** При исследовании свойств электрических цепей явлением гистерезиса, как правило, можно пренебречь. Лишь при исследовании цепей, в основе действия которых лежит это явление (например, работы запоминающих магнитных устройств с прямоугольной петлей гистерезиса), гистерезис необходимо учитывать.

На рис. 15.11, *а* изображена типичная симметричная характеристика $y = f(x)$.

Для нелинейной индуктивности роль $x$ играет мгновенное значение индукции $B$; роль $y$ — мгновенное значение напряженности поля $H$. Для нелинейного конденсатора $y$ — это напряжение $u$, $x$ — заряд $q$. Для нелинейных резисторов (например, тиритовых сопротивлений) роль $x$ играет напряжение, $y$ — ток.

Существует большое число различных аналитических выражений, в той или иной мере пригодных для аналитического описания характеристик нелинейных элементов [20]. При выборе наиболее подходящего аналитического выражения для функции $y = f(x)$ исходят не только из того, что кривая, описываемая аналитическим выражением, должна достаточно близко всеми своими точками расположиться к опытным путем полученной кривой в предполагаемом диапазоне перемещений рабочей точки на ней, но учитывают и те возможности, которые выбранное аналитическое выражение дает при анализе свойств электрических цепей. В дальнейшем для



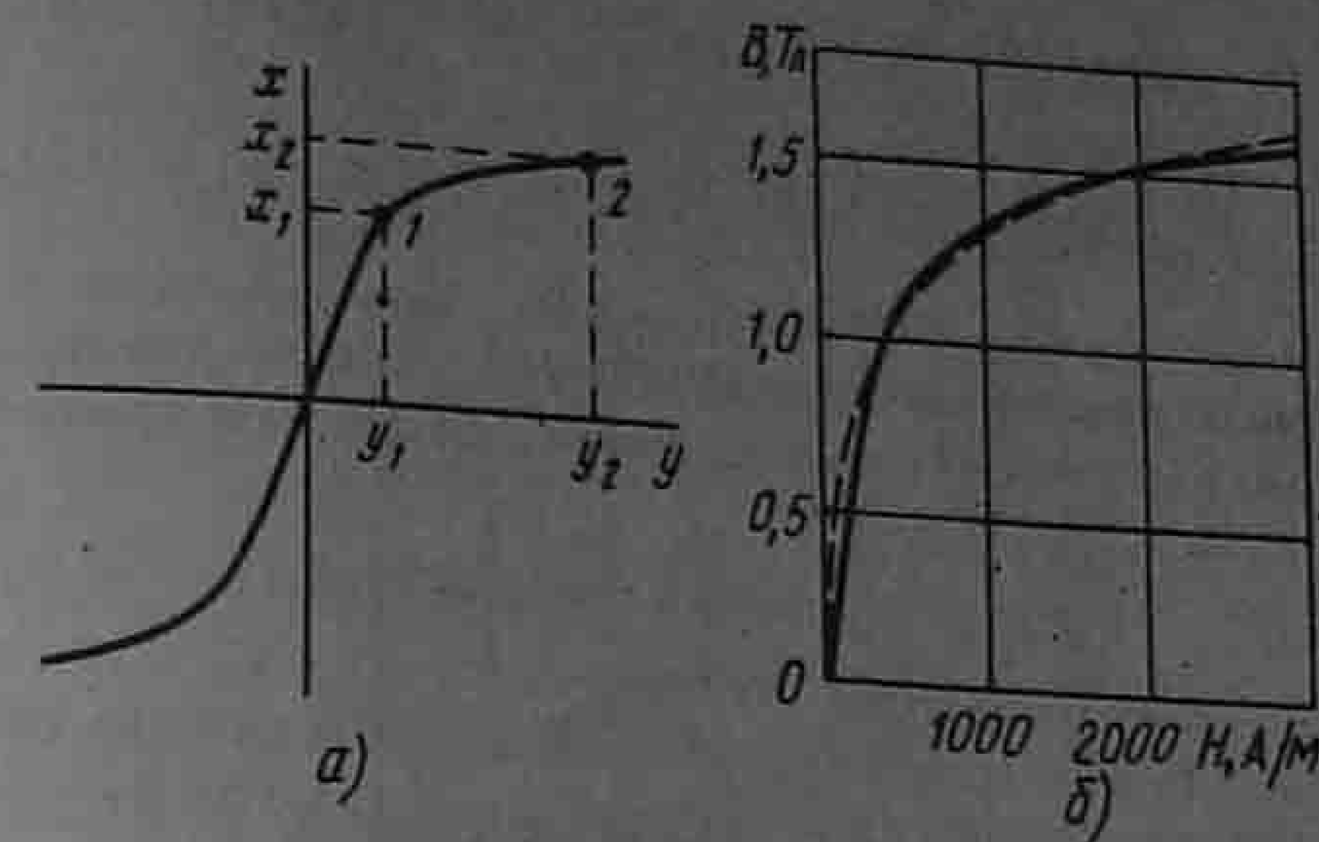



Рис. 15.11

аналитического описания симметричных характеристик по типу рис. 15.11, *а* будем пользоваться гиперболическим синусом:

$$y = \alpha \operatorname{sh} \beta x. \qquad (15.1)$$

В этом выражении $\alpha$ и $\beta$ — числовые коэффициенты; $\alpha$ выражается в тех единицах, что и $y$; $\beta$ — в единицах, обратных единицам $x$, так что произведение $\beta x$ есть величина безразмерная. Для определения неизвестных коэффициентов $\alpha$ и $\beta$ следует на полученной опытным путем зависимости $y = f(x)$ в предполагаемом рабочем диапазоне произвольно выбрать две наиболее характерные точки, через которые должна пройти аналитическая кривая, подставить координаты этих точек в уравнение (15.1) и затем решить систему из двух уравнений с двумя неизвестными.

Пусть координаты этих точек $y_1$, $x_1$ и $y_2$, $x_2$ (рис. 15.11, *а*). Тогда

$$y_1 = \alpha \operatorname{sh} \beta x_1; \; y_2 = \alpha \operatorname{sh} \beta x_2.$$

Отношение

$$y_2/y_1 = \operatorname{sh} \beta x_2 / \operatorname{sh} \beta x_1. \qquad (15.2)$$

Трансцендентное уравнение (15.2) служит для определения коэффициента $\beta$. Следовательно,

$$\alpha = y_2 / \operatorname{sh} \beta x_2. \qquad (15.3)$$

**Пример 147.** Кривая намагничивания трансформаторной стали Э41 изображена на рис. 15.11, *б*. Найти коэффициенты $\alpha$ и $\beta$.

Р е ш е н и е. Выбираем две точки на кривой: $H_1 = 200$ А/м; $B_1 = 1,1$ Тл; $H_2 = 2400$ А/м; $B_2 = 1,532$ Тл.

По уравнению (15.2) имеем $\operatorname{sh}(1,532\beta)/\operatorname{sh}(1,1\beta) = 12$. Задаемся произвольными значениями $\beta$ и производим подсчеты:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\beta$ | ... | 6 | 5,22 | 4,57 | 3,92 | 3,26 |
| $\beta B_2$ | ... | 9,2 | 8 | 7 | 6 | 5 |
| $\beta B_1$ | ... | 6,6 | 5,74 | 5,03 | 4,32 | 3,59 |
| $\operatorname{sh}\beta B_2/\operatorname{sh}\beta B_1$ | ... | 13,5 | 9,58 | 7,25 | 6,24 | 4,1 |

По результатам подсчетов строим кривую $\text{sh}\beta B_2/\text{sh}\beta B_1 = f(\beta)$ и по ней находим $\beta = 5{,}75\ \text{Тл}^{-1}$. Далее определяем

$$a = H_2/\text{sh}\beta B_2 = 2400/\text{sh}8{,}82 = 1200/1690 = 0{,}71.$$

Пунктирная кривая на рис. 15.11, *б* построена по уравнению $H = 0{,}71\text{sh}(5{,}75B)$.

**§ 15.14. Понятие о функциях Бесселя.** При анализе нелинейных цепей широко используют функции Бесселя, которые являются решением уравнения Бесселя

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{p^2}{x^2}\right)y = 0. \qquad (15.4)$$

Функции Бесселя выражают степенными рядами и для них составлены таблицы. Функцию Бесселя от аргумента $x$ обозначают $J_p(x)$, где $p$ — порядок функции Бесселя. Общее выражение для $J_p(x)$ в виде степенного ряда можно записать так:

$$J_p(x) = \frac{(x/2)^p}{0!p!} - \frac{(x/2)^{p+2}}{1!(p+1)!} + \frac{(x/2)^{p+4}}{2!(p+2)!} - \frac{(x/2)^{p+6}}{3!(p+3)!} + \ldots \qquad (15.5)$$

Таблица 15.1

| $x$ | $J_0(jx)$ | $-jJ_1(jx)$ | $-J_2(jx)$ | $jJ_3(jx)$ | $J_4(jx)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0,0 | 1,0 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 |
| 0,4 | 1,04 | 0,20 | 0,02 | $0{,}131\cdot10^{-2}$ | $0{,}671\cdot10^{-4}$ |
| 0,8 | 1,16 | 0,43 | 0,08 | 0,01 | $0{,}11\cdot10^{-2}$ |
| 1,2 | 1,39 | 0,72 | 0,20 | 0,04 | $0{,}58\cdot10^{-2}$ |
| 1,6 | 1,75 | 1,08 | 0,39 | 0,1 | 0,019 |
| 2,0 | 2,28 | 1,59 | 0,69 | 0,21 | 0,051 |
| 2,4 | 3,05 | 2,30 | 1,13 | 0,41 | 0,114 |
| 2,8 | 4,16 | 3,30 | 1,80 | 0,73 | 0,234 |
| 3,2 | 5,75 | 4,73 | 2,79 | 1,25 | 0,446 |
| 3,6 | 8,03 | 6,79 | 4,25 | 2,07 | 0,81 |
| 4,0 | 11,30 | 9,76 | 6,42 | 3,34 | 1,416 |
| 4,4 | 16,01 | 14,04 | 9,63 | 5,29 | 2,405 |
| 4,8 | 22,79 | 20,25 | 14,35 | 8,29 | 3,992 |
| 5,2 | 32,58 | 29,25 | 21,33 | 12,84 | 6,51 |
| 5,6 | 46,73 | 42,32 | 31,62 | 19,74 | 10,468 |
| 6,0 | 67,23 | 61,34 | 46,78 | 30,15 | 16,63 |
| 7 | 168,6 | 156 | 124 | 85,17 | 51,0 |
| 8 | 427,56 | 399,87 | 327,6 | 236,07 | 150,5 |
| 9 | 1093,59 | 1030,91 | 864,50 | 646,69 | 433,3 |
| 10 | 2815,7 | 2671 | 2281 | 1758 | 1226 |
| 11 | 7288 | 6948,9 | 6025 | 4758 | 3430 |
| 12 | 18948 | 18142 | 15924 | 12834 | 9507 |

Для гл. 15 наибольший интерес представляют функции Бесселя от чисто мнимого аргумента (табл. 15.1). Для их получения в общее выражение (15.5) вместо $x$ следует подставить $jx$, где $j = \sqrt{-1}$. Обратим внимание на то, что в табл. 15.1 даны функция $-jJ_1(jx)$ вместо $J_1(jx)$ и функция $jJ_3(jx)$ вместо $J_3(jx)$. Сделано это потому,



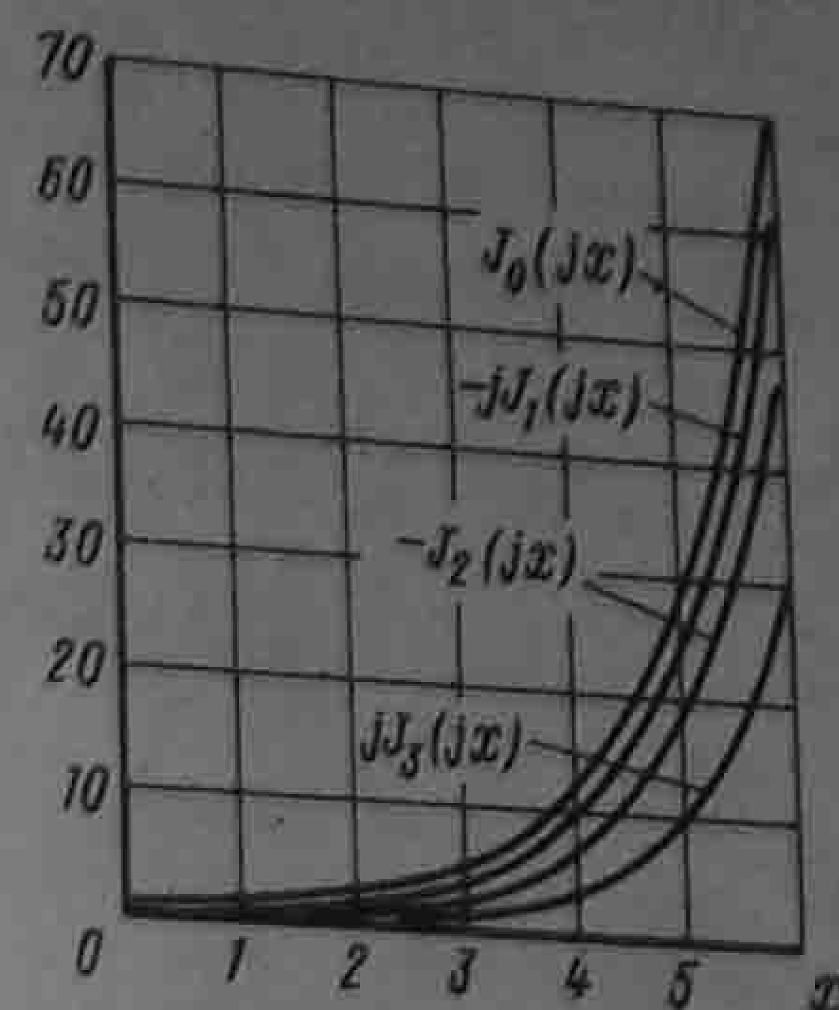



Рис. 15.12

что без дополнительного множителя $j$ или $-j$ эти функции, как правило, не используют.

При $x = 0$ не равна нулю только функция Бесселя нулевого порядка: $J_0(0) = 1$.

По данным табл. 15.1 на рис. 15.12 построены кривые функции Бесселя. Из таблицы и рис. 15.12 видно, что с ростом $x$ значения функций увеличиваются. Чем выше порядок функции Бесселя, тем меньше ее значение при одном и том же $x$.

**§ 15.15. Разложение гиперболических синуса и косинуса от периодического аргумента в ряды Фурье.** Если аргумент $x$ изменяется по периодическому закону, например по закону синуса $x = x_m\sin\omega t$, где $x_m$ — амплитуда колебаний, то по периодическому закону изменяются и функции $\text{sh}(x_m\sin\omega t)$ и $\text{ch}(x_m\sin\omega t)$. Так как периодические функции можно представить рядами Фурье, то разложим в ряд Фурье эти функции. С этой целью в (15.5) вместо $x$ подставим $x_m\sin\omega t$. Учтем известные из тригонометрии формулы

$$\sin^2\alpha = 0{,}5 - 0{,}5\cos2\alpha; \qquad (15.6)$$

$$\sin^3\alpha = -0{,}25\sin3\alpha + 0{,}75\sin\alpha; \qquad (15.7)$$

$$\sin^4\alpha = 0{,}375 - 0{,}5\cos2\alpha + 0{,}125\cos4\alpha, \qquad (15.8)$$

сгруппируем все слагаемые с $\sin\omega t$, $\cos2\omega t$, $\sin3\omega t$ и т. д., а также отдельно выделим постоянную составляющую. В результате оказывается, что коэффициентами при тригонометрических функциях являются ряды, которыми изображают функции Бесселя различных порядков от чисто мнимого аргумента $jx_m$. Окончательно получим

$$\text{sh}(x_m\sin\omega t) = 2[-jJ_1(jx_m)]\sin\omega t - 2jJ_3(jx_m)\sin3\omega t - 2jJ_5(jx_m)\sin5\omega t - \ldots, \qquad (15.9)$$

$$\text{ch}(x_m\sin\omega t) = J_0(jx_m) + 2J_2(jx_m)\cos2\omega t + 2J_4(jx_m)\cos4\omega t + \ldots. \qquad (15.10)$$

Ряд для $\text{sh}(x_m\sin\omega t)$ состоит только из нечетных гармоник и не имеет постоянной составляющей. Ряд для $\text{ch}(x_m\sin\omega t)$ имеет постоянную составляющую и четные гармоники.

**Пример 148.** Разложить в ряд Фурье $\text{sh}(4\sin\omega t)$ и $\text{ch}(4\sin\omega t)$.

Р е ш е н и е. Значения функций Бесселя берем из таблицы:

$$-jJ_1(j4) = 9{,}76;\ jJ_3(j4) = 3{,}34;\ J_4(j4) = 1{,}416;$$

$$-jJ_5(j4) = 0{,}505;\ J_0(j4) = 11{,}3;\ J_2(j4) = -6{,}42.$$

В соответствии с (15.9) и (15.10) получим

$$\mathrm{sh}(4\sin\omega t) = 2\cdot 9{,}76\sin\omega t - 2\cdot 3{,}34\sin 3\omega t + 2\cdot 0{,}505\sin 5\omega t - \ldots;$$

$$\mathrm{ch}(4\sin\omega t) = 11{,}3 - 2\cdot 6{,}42\cos 2\omega t + 2\cdot 1{,}416\cos 4\omega t + \ldots .$$

**§ 15.16. Разложение гиперболического синуса от постоянной и синусоидально меняющейся составляющих в ряд Фурье.** Из § 15.13 известно, что мгновенное значение функции $y$ связано с мгновенным значением $x$ формулой (15.1). В этой формуле аргументом гиперболического синуса является не $x$, как было в § 15.14, а произведение $\beta x$. В соответствии с этим для разложения $\mathrm{sh}(\beta x_m \sin\omega t)$ и $\mathrm{ch}(\beta x_m \sin\omega t)$ в (15.9) и (15.10) следует заменить $x$ на $\beta x_m$.

Если $x = x_0 + x_m \sin\omega t$, где $x_0$ — постоянная составляющая, $x_m$ — амплитуда синусоидальной составляющей, то $y = \alpha\,\mathrm{sh}(\beta x_0 + \beta x_m \sin\omega t) = \alpha\,\mathrm{sh}\beta x_0\,\mathrm{ch}(\beta x_m \sin\omega t) + \alpha\,\mathrm{ch}\beta x_0\,\mathrm{sh}(\beta x_m \sin\omega t)$.

Следовательно,

$$y = \alpha\,\mathrm{sh}\beta x_0 \{[J_0(j\beta x_m)] + 2J_2(j\beta x_m)\cos 2\omega t + 2J_4(j\beta x_m)\cos 4\omega t + \ldots\} +$$
$$+ 2\alpha\,\mathrm{ch}\beta x_0 \{[-jJ_1(j\beta x_m)]\sin\omega t - jJ_3(j\beta x_m)\sin 3\omega t - \ldots\}. \quad (15.11)$$

Из (15.11) следует, что постоянная составляющая функции $y$

$$y_0 = \alpha\,\mathrm{sh}\beta x_0 J_0(j\beta x_m). \quad (15.12)$$

Первая гармоника функции $y$

$$y_1 = 2\alpha\,\mathrm{ch}\beta x_0[-jJ_1(j\beta x_m)]\sin\omega t; \quad (15.13)$$

вторая гармоника

$$y_2 = 2\alpha\,\mathrm{sh}\beta x_0 J_2(j\beta x_m)\cos 2\omega t; \quad (15.14)$$

третья гармоника

$$y_3 = 2\alpha\,\mathrm{ch}\beta x_0[-jJ_3(j\beta x_m)]\sin 3\omega t \quad (15.15)$$

и т. д.

**Пример 149.** Разложить в ряд Фурье функцию $y/\alpha = \mathrm{sh}(2 + 4\sin\omega t)$.

Решение. По табл. 8.1 находим $\mathrm{sh}2 = 3{,}63$; $\mathrm{ch}2 = 3{,}7$. Значения функций Бесселя берем из табл. 15.1. В соответствии с (15.11)

$$y/\alpha = \mathrm{sh}(2 + 4\sin\omega t) = 3{,}63(11{,}3 - 12{,}844\cos 2\omega t + 2{,}832\cos 4\omega t - \ldots) +$$
$$+ 3{,}76(19{,}52\sin\omega t - 6{,}674\sin 3\omega t + 1{,}01\sin 5\omega t - \ldots).$$

Таким образом, $y_0/\alpha = 41{,}1$; $y_{1m}/\alpha = 73{,}4$; $y_{2m}/\alpha = 46{,}7$.

**§ 15.17. Некоторые общие свойства симметричных нелинейных элементов.** I. Если нелинейный элемент с симметричной характеристикой работает в условиях, когда одна из определяющих его состояние величин, например величина $x$, изменяется во времени по закону $x = x_0 + x_m \sin\omega t$, то в отношении другой определяющей его состояние величины (величины $y$) можно сделать следующие выводы:

1) постоянная составляющая функции $y_0$ зависит не только от $x_0$, но и от $x_m$, что следует из (15.12);

2) в кривой $y = f(\omega t)$ появляются четные гармоники, которые исчезают при $x_0 = 0$. Фаза четных гармоник зависит от знака постоянной составляющей (от знака $x_0$);

3) путем изменения $x_0$ или $y_0$ можно изменять амплитуды первой и высших гармоник функций.

Первое из этих свойств поясним графически. Пусть нелинейный элемент работает при отсутствии синусоидальной составляющей ($x_m = 0$). Тогда изображением



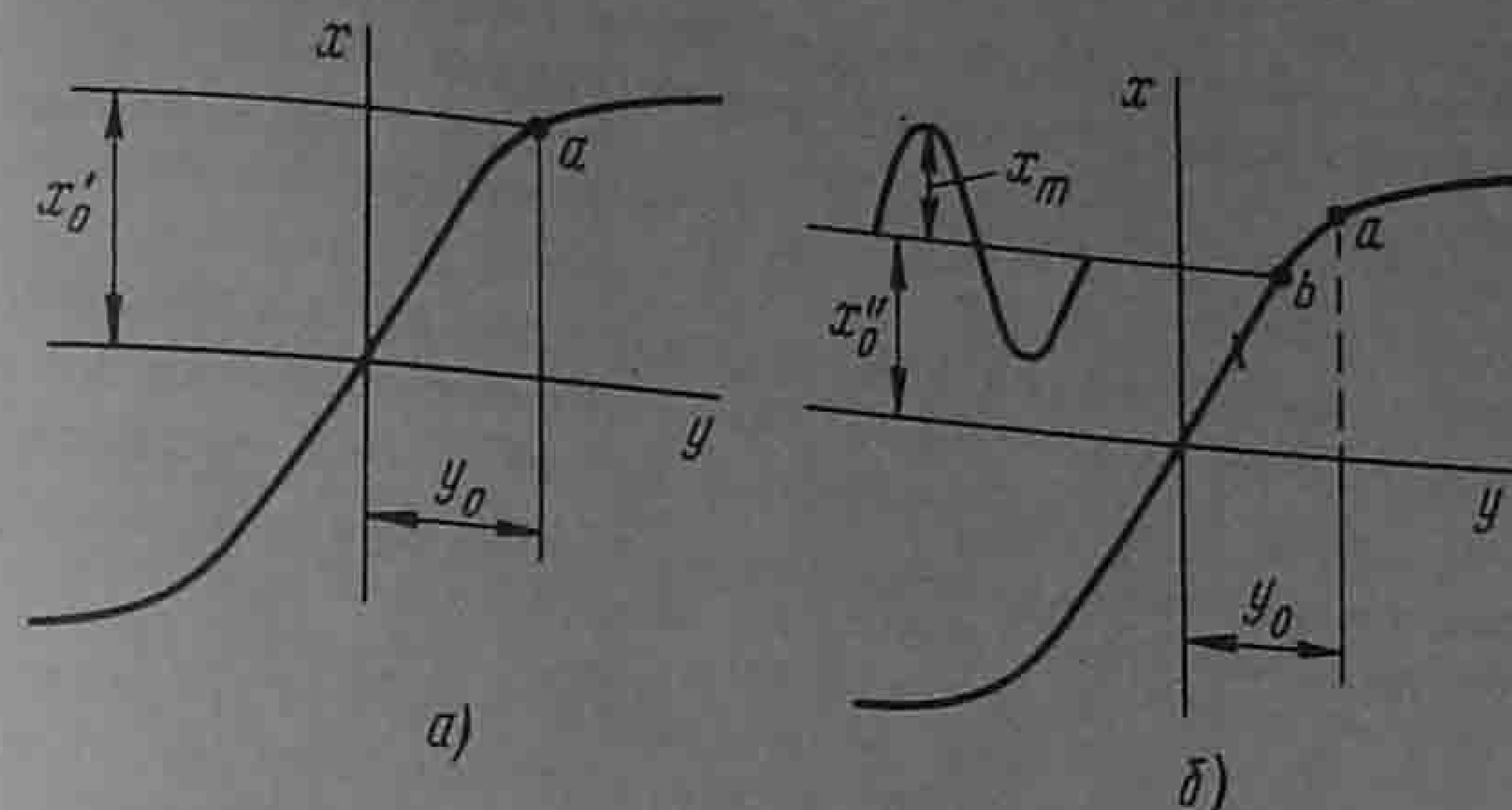



Рис. 15.13

этого процесса на характеристике нелинейного элемента будет точка $a$ (рис. 15.13, $a$). Для нее

$$y = y_0;\ \beta x = \beta x_0' = \mathrm{Ar\,sh}\, y_0/\alpha. \quad (15.16)$$

Этот результат следует из (15.12), если учесть, что $J_0(0) = 1$.

Если же нелинейный элемент работает при $x_m \neq 0$, то, для того чтобы постоянную составляющую функции $y_0$ сохранить прежней, постоянная составляющая $x_0$ должна быть снижена (или снизится сама) со значения $x_0'$ до $x_0''$.

Постоянная составляющая

$$\beta x_0'' = \mathrm{Ar\,sh}\,\frac{y_0/\alpha}{J_0(j\beta x_m)}, \quad (15.17)$$

где $x_0''$ определяется ординатой точки $b$, расположенной ниже точки $a$ (рис. 15.13, $б$).

Первое и третье из этих свойств широко используют в теории управляемых нелинейных элементов, второе свойство — в теории умножителей частоты.

**Пример 150.** Нелинейный элемент с характеристикой $y = \alpha\,\mathrm{sh}\beta x$ сначала работал при $y_0/\alpha = 41{,}1$ и отсутствии переменной составляющей ($\beta x_m = 0$). Затем режим работы его изменился: постоянная составляющая $y_0/\alpha$ осталась прежней, но появилась переменная составляющая $\beta x$, амплитуда которой $\beta x_m = 4$. Найти постоянные составляющие $\beta x_0$ в этих двух режимах.

Решение. В первом режиме $\beta x_0' = \mathrm{Ar\,sh}\,41{,}1 = 4{,}41$. Во втором режиме $\beta x_0'' = \mathrm{Ar\,sh}(41{,}1/J_0(j4)) = \mathrm{Ar\,sh}3{,}63 = 2$.

Таким образом, при переходе от первого режима ко второму постоянная составляющая $\beta x_0$ изменилась с 4,41 до 2, т. е. более чем в два раза.

II. В энергетическом отношении общие свойства нелинейной цепи, содержащей одну нелинейную катушку (конденсатор) с безгистерезисной симметричной характеристикой, в которой действуют генераторы синусоидальных колебаний с частотами $f_1$ и $f_2$ и возникают токи и напряжения частот $f_{m,n} = mf_1 + nf_2$ ($m$ и $n$ — простые числа, принимающие положительные, отрицательные и нулевые значения), для периодических процессов описываются *теоремой Мэнли и Роу*.

Если через $W_{m,n} = \dot U_{m,n}\overset{*}{I}_{m,n} + \overset{*}{U}_{m,n}\dot I_{m,n}$ обозначить среднюю за период мощность, поступающую в нелинейную индуктивную катушку (конденсатор) на частоте $f_{m,n} = mf_1 + nf_2$, то теорема устанавливает связь между мощностями, поступающими в нелинейный элемент на различных частотах. Эту теорему записывают в виде двух соотношений (доказательство см., например, в [20]):

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{mW_{m,n}}{mf_1 + nf_2} = 0;\quad \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{nW_{m,n}}{mf_1 + nf_2} = 0. \quad (15.18)$$

**§ 15.18. Появление постоянной составляющей тока (напряжения, потока, заряда) на нелинейном элементе с симметричной характеристикой.** Если к нелинейному резистору с симметричной ВАХ, например $i = au^3$, подвести напряжение в виде двух компонент $u = U_1\sin\omega t + U_2\sin(2\omega t + \varphi)$, частоты которых относятся как 1:2 [в более общем случае как $2k/(2p+1)$, где $k$ и $p$ — целые положительные числа], то в токе, проходящем через НР, несмотря на отсутствие выпрямителей, появится постоянная составляющая, равная $-0{,}75aU_1^2U_2\sin\varphi$. Ее значение зависит не только от $U_1$ и $U_2$, но и от угла $\varphi$. Сам факт возникновения постоянной составляющей в этих условиях называют *селективным выпрямлением*. Селективно оно потому, что возникает не при любом соотношении частот двух напряжений, а при вполне определенном. Сходное явление имеет место в нелинейных индуктивных катушках и конденсаторах. Так, если на нелинейную индуктивную катушку с ВАХ $i = \alpha\,\mathrm{sh}\beta\Phi$ воздействовать потоками частот $\omega$ и $2\omega$, то при отсутствии постоянной составляющей в МДС в потоке кроме указанных гармоник появится и постоянная составляющая. Для ее определения положим $\Phi = \Phi_0 + \Phi_1\sin(\omega t + \varphi) + \Phi_2\sin 2\omega t$, подставим в формулу для тока и, разложив ток в ряд Фурье, приравняем постоянную составляющую тока нулю. В результате получим формулу для определения $\Phi_0$:

$$\mathrm{th}\,b_0 = -\sin 2\varphi \frac{2[-jJ_1(jb_2)][-J_2(jb_1)]}{J_0(jb_1)\,J_0(jb_2)},$$

где $b_0 = \beta\Phi_0$; $b_1 = \beta\Phi_1$; $b_2 = \beta\Phi_2$.

Если через нелинейный конденсатор проходят первая и вторая гармоники тока, а угол $\varphi \neq 0$, то на нем будет постоянная составляющая заряда при отсутствии постоянной составляющей напряжения.

**§ 15.19. Типы характеристик нелинейных элементов.** При анализе и расчете электрических цепей с нелинейными элементами в зависимости от рассматриваемого вопроса используют различные типы характеристик одного и того же нелинейного элемента: а) характеристики для мгновенных значений; б) ВАХ по первым гармоникам тока и напряжения; в) ВАХ для действующих значений.

**§ 15.20. Характеристики для мгновенных значений.** Основным типом характеристик являются характеристики, связывающие мгновенные значения основных определяющих величин: тока и напряжения на нелинейном резисторе, индукции и напряженности в сердечнике нелинейной индуктивной катушки, заряда и напряжения на нелинейном конденсаторе. Будем называть их характеристиками для мгновенных значений. Иногда перед этим названием добавляют соответственно следующие слова: вольт-амперные, вебер-амперные или кулон-вольтные. В силу ряда причин, обусловленных различными физическими процессами в самих нелинейных элементах, форма характеристик меняется с увеличением скорости изменения определяющих величин во времени.

**§ 15.21. ВАХ по первым гармоникам.** Под ВАХ по первым гармоникам понимают графическую или аналитическую связь между амплитудой (действующим значением) первой гармоники тока и амплитудой (действующим значением) первой гармоники напряжения на нелинейном элементе.



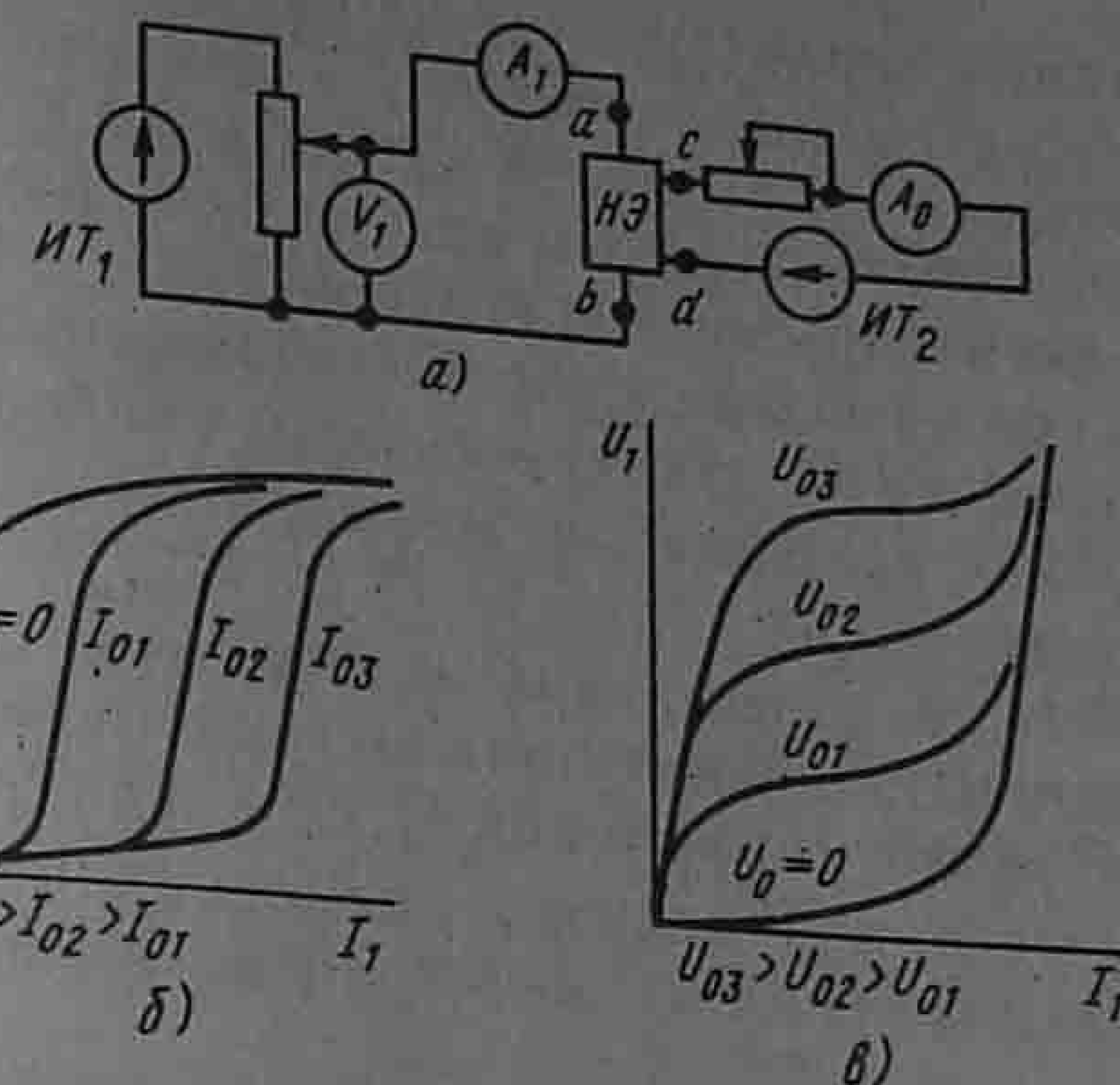



Рис. 15.14

Этот тип характеристик подразделяют на две подгруппы. В первой подгруппе нагряжение (поток или заряд) на нелинейном элементе изменяется по синусоидальному закону, а во второй по синусоидальному закону во времени меняется ток через нелинейный элемент (напряженность в сердечнике нелинейной индуктивной катушки или напряжение на нелинейном конденсаторе).

Если воздействующее на нелинейный элемент синусоидальное напряжение (синусоидальный ток) не содержит постоянной составляющей, то ВАХ для первых гармоник данного элемента изображают какой-то одной кривой. Если же воздействующее напряжение (ток) содержит постоянную составляющую, то вольт-амперные, вебер-амперные или кулон-вольтные характеристики изображают семействами кривых, на которых постоянная составляющая тока, напряжения, потока или заряда является параметром.

Этот тип характеристик получают расчетным аналитическим или графическим путем по соответствующим характеристикам для мгновенных значений или снимают экспериментально.

При графическом построении задаются различными значениями амплитуды воздействующего на нелинейный элемент напряжения (тока, индукции, заряда), по точкам строят кривую тока (напряженности, напряжения) в функции времени и путем разложения ее в ряд Фурье находят соответствующие амплитуды первой гармоники тока (напряженности, напряжения). (Пример графического построения кривой тока в функции времени для управляемой нелинейной индуктивной катушки см. рис. 15.17.)

Аналитически построение точек обсуждаемой характеристики производят, используя формулы (15.12) и (15.13) или иные, подобные им.

В § 15.23 рассмотрено применение формул (15.12) и (15.13) для

получения единых характеристик по первым гармоникам для управляемых симметричных нелинейных элементов.

Для нелинейной индуктивной катушки ВАХ по первым гармоникам можно получить опытным путем с помощью схемы рис. 15.14, *а*, где $ИТ_1$ — источник синусоидальной ЭДС; $ИТ_2$ — источник постоянной ЭДС; *ab* — зажимы управляемой цепи НЭ; *cd* — зажимы управляющей цепи НЭ. Измерительный прибор $V_1$ реагирует на первую гармонику напряжения, а измерительный прибор $A_1$ — на первую гармонику тока.

На рис. 15.14, *б* качественно изображены ВАХ управляемой нелинейной индуктивной катушки по первым гармоникам. Параметром является ток управления $I_0$. ВАХ по первым гармоникам для управляемого нелинейного конденсатора изображены на рис. 15.14, *в*. Параметром является управляющее постоянное напряжение $U_0$.

Снятие характеристик (рис. 15.14, *б*) производят следующим образом. Устанавливают некоторое произвольное значение тока $I_0$ в цепи управления, затем плавно повышают напряжение $U_1$ и для каждого его значения записывают значение тока $I_1$. Затем то же проделывают при новом значении $I_0$ и т. д. Результаты измерений наносят на график, и соответствующие точки соединяют плавной кривой.

ВАХ для первых гармоник используют при расчете установившихся режимов в нелинейных цепях, который называют расчетом по первой гармонике (см. § 15.47). При расчете применяют ВАХ той подгруппы, которая более подходит по условию работы данного нелинейного элемента.

**§ 15.22. ВАХ для действующих значений.** Под ВАХ для действующих значений понимают зависимость между действующим значением синусоидального (несинусоидального) напряжения на нелинейном элементе и действующим значением тока, протекающего через него. Если напряжение (ток) содержит постоянную составляющую, то ВАХ для действующих значений изображают семейством кривых, на которых постоянная составляющая тока (потока, напряжения или заряда) является параметром.

Эти характеристики получают графическим или аналитическим путем из характеристик для мгновенных значений или снимают опытным путем с помощью схемы (рис. 15.14, *а*), но приборы $V_1$ и $A_1$ в этом случае должны измерять действующие значения.

ВАХ для действующих значений зависят от формы напряжения на нелинейном элементе и (или) от формы протекающего через него тока, поэтому необходимо указывать, при каких условиях они получены.

При качественном и грубом количественном анализах полагают, что характеристики, снятые при одной форме напряжения на



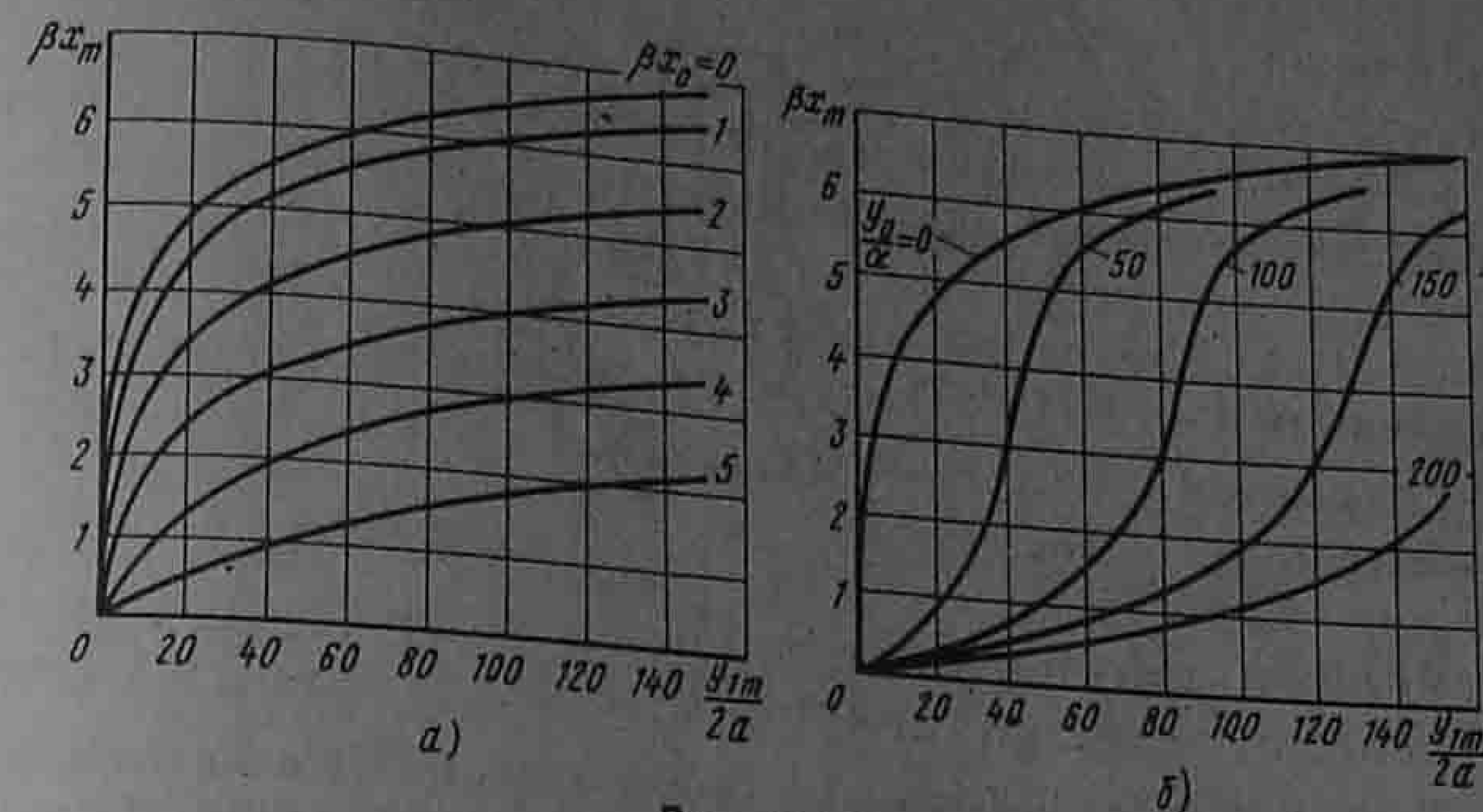



Рис. 15.15

нелинейном элементе, близки к характеристикам, снятым при другой форме напряжения. В действительности же количественное различие в характеристиках может оказаться значительным. ВАХ для действующих значений используют при расчете, называемом расчетом по ВАХ для действующих значений (см. § 15.48).

**§ 15.23. Получение аналитическим путем обобщенных характеристик управляемых нелинейных элементов по первым гармоникам.** Как отмечалось, нелинейные индуктивные катушки и конденсаторы, а также большая группа нелинейных резисторов имеют характеристики для мгновенных значений, которые могут быть приближенно описаны формулой $y = \alpha \operatorname{sh} \beta x$. Для каждого нелинейного элемента под $x$ и $y$ следует понимать свои величины (см. § 15.13).

Таким образом, $x$ и $y$ — обобщенные обозначения величин, определяющих работу нелинейного элемента. Для всех перечисленных нелинейных элементов можно построить единые характеристики по первым гармоникам. С этой целью положим $x = x_0 + x_m \sin\omega t$. Тогда в соответствии с (15.13) амплитуда первой гармоники функции

$$y_{1m} = 2\alpha \operatorname{ch} \beta x_0 [-jJ_1(j\beta x_m)]. \qquad (15.19)$$

Формула (15.19) устанавливает связь между амплитудой $y_{1m}$ первой гармоники $y$, амплитудой $x_m$ первой гармоники $x$ и постоянной составляющей $x_0$.

На рис. 15.15, *а* изображены характеристики управляемого нелинейного элемента $\beta x_m = f(y_{1m}/2\alpha)$ при $\beta x_0 = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, построенные по (15.19). Кривыми можно пользоваться при известном значении параметра $\beta x_0$. Если известна не $\beta x_0$, а постоянная составляющая $y_0/\alpha$, то семейство кривых $\beta x_m = f[y_{1m}/(2\alpha)]$ при параметре $y_0/\alpha$ может быть построено следующим образом. Из (15.12) находим $\operatorname{sh}\beta x_0 = \dfrac{y_0/\alpha}{J_0(j\beta x_m)}$ и вместо $\operatorname{ch}\beta x_0$ в (15.19) подставим

$$\sqrt{1+\operatorname{sh}^2\beta x_0} = \sqrt{1+\left[\frac{y_0/\alpha}{J_0(j\beta x_m)}\right]^2}.$$

В результате получим

$$\frac{y_{1m}}{2\alpha} = \sqrt{1+\left[\frac{y_0/\alpha}{J_0(j\beta x_m)}\right]^2}\,[-j\ J_1(j\beta_m x)]. \qquad (15.20)$$

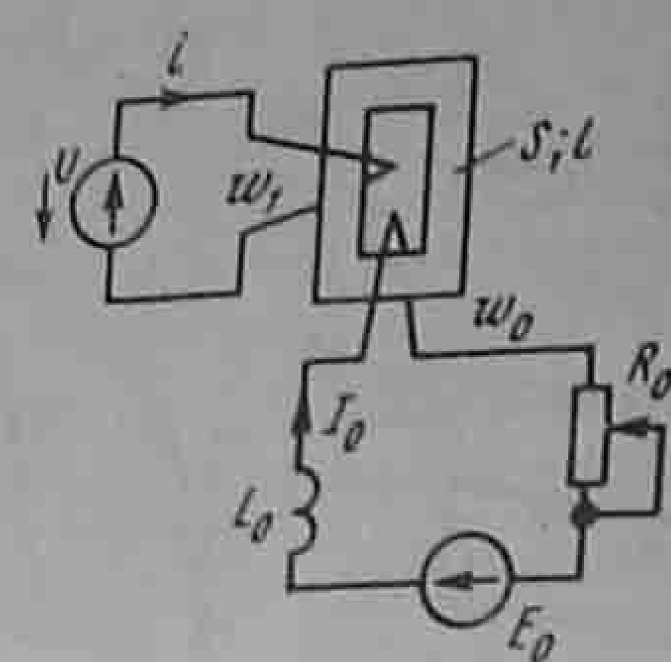


Рис. 15.16

Кривые (рис. 15.15, *б*), построенные по формуле (15.20), являются характеристиками управляемого нелинейного элемента при значениях параметра $y_0/\alpha = 0,50$, 100, 150 и 200. Обратим внимание на то, что $y_{1m}/2\alpha$, $\beta x_m$, $y_0/\alpha$ — величины с нулевой размерностью. Если масштабы по оси уменьшить в $\sqrt{2}$ раз, то кривые (рис. 15.15, *б*) будут представлять собой характеристики по действующим значениям первых гармоник. Характеристика неуправляемого нелинейного элемента изображена на рис. 15.15, *б* кривой, для которой $y_0/\alpha=0$.

**§ 15.24. Простейшая управляемая нелинейная индуктивная катушка.** Простейшая управляемая нелинейная индуктивная катушка изображена на рис. 15.16. Она состоит из обмоток $w_1$ и $w_0$, намотанных на замкнутый ферромагнитный сердечник. Площадь поперечного сечения сердечника $S$ (м²), длина средней магнитной линии $l$ (м).

Обмотка $w_1$ включена в цепь переменного тока, и по ней проходит переменный ток $i$, содержащий первую и высшие гармоники.

Обмотка управления (подмагничивания) $w_0$ присоединена к источнику постоянной ЭДС $E_0$ через дополнительную индуктивность $L_0$ и регулируемое резистивное сопротивление $R_0$. По обмотке $w_0$ протекает постоянный ток $I_0 = E_0/R_0$.

Хотя переменный магнитный поток и наводит в обмотке $w_0$ переменную ЭДС, но переменный ток по ней практически не проходит, так как дополнительная индуктивность $L_0$ образует для переменного тока достаточно большое индуктивное сопротивление.

Пусть приложенное к обмотке $w_1$ напряжение равно $U_m \cos\omega t$. Это напряжение равно ЭДС самоиндукции, взятой с обратным знаком (активное сопротивление обмотки $w_1$ считаем весьма малым):

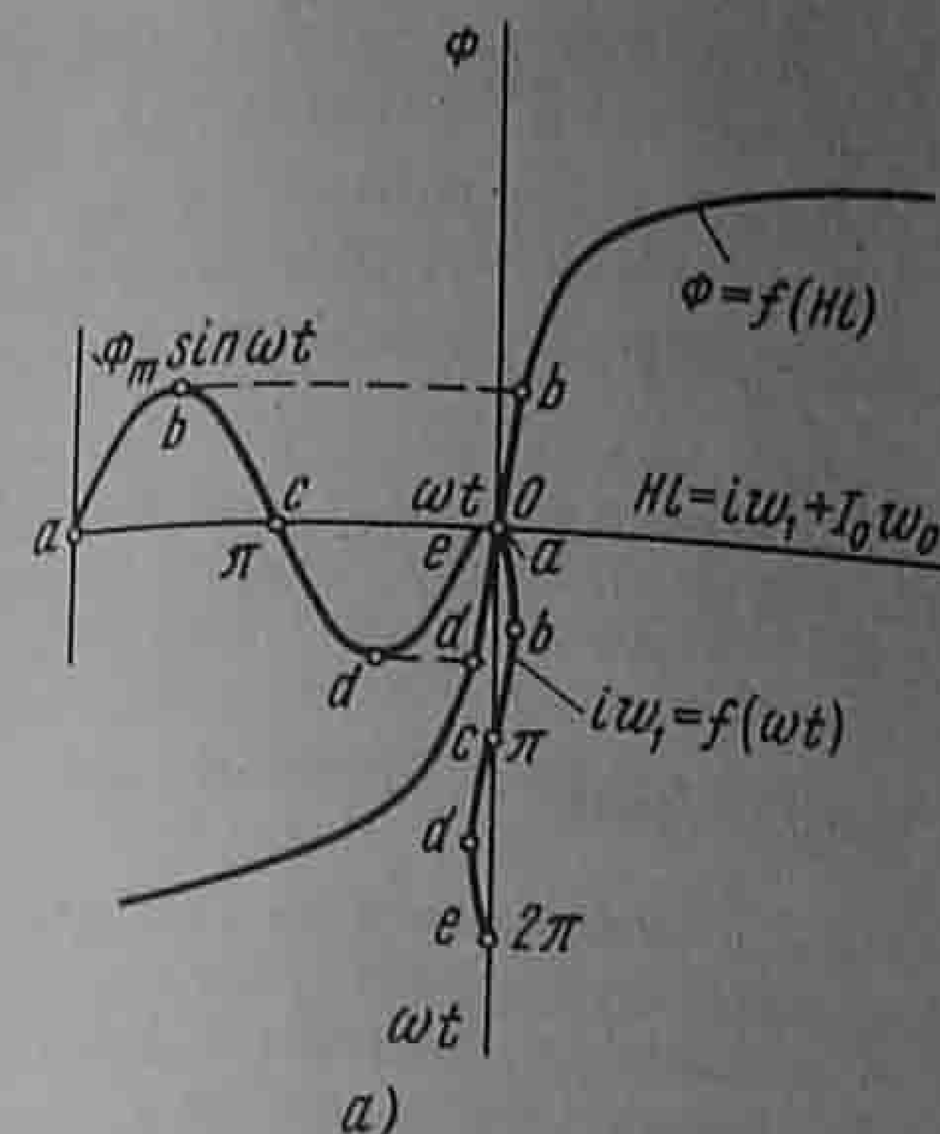
$$u = -e_L = w_1 \frac{d\Phi}{dt} = U_m \cos\omega t.$$

Отсюда магнитный поток

$$\Phi = \frac{U_m}{\omega w_1} \sin\omega t + \Phi_0 = \Phi_m \sin\omega t + \Phi_0; \quad (15.21)$$

$$\Phi_m = U_m/(\omega w_1). \quad (15.22)$$





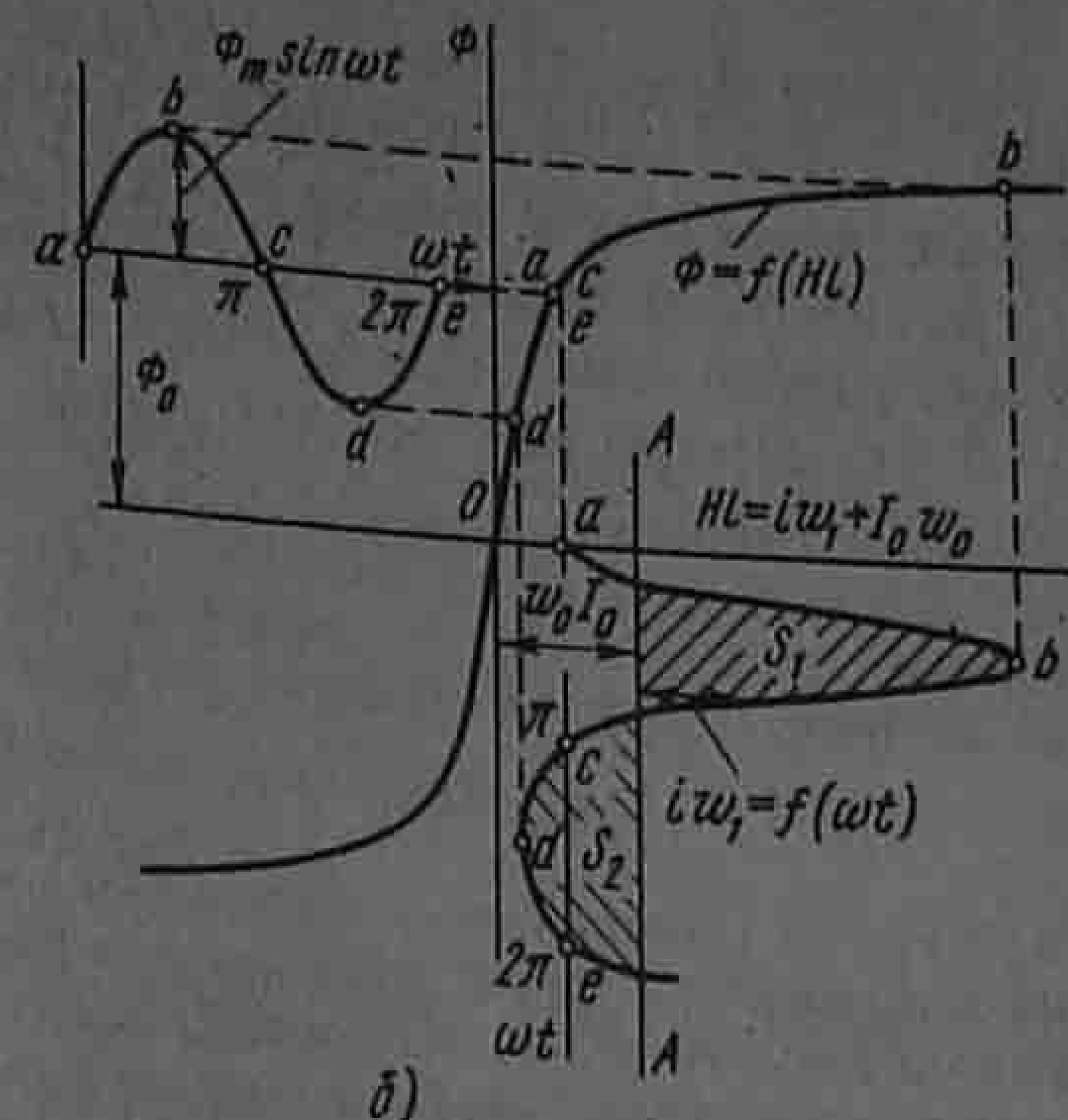


Рис. 15.17

где $\Phi_m$ — амплитуда переменной составляющей магнитного потока; $\Phi_0$ — постоянная составляющая магнитного потока.

Управляемая нелинейная катушка позволяет путем изменения постоянного тока $I_0$ в обмотке $w_0$ управлять переменным током $i$.

Принцип управления режимом ее работы и характер изменения во времени отдельных величин поясним с помощью рис. 15.17, *а*, *б*, где кривые $\Phi = f(Hl)$ представляют собой зависимости потока $\Phi$ в сердечнике от произведения напряженности магнитного поля $H$ на длину средней магнитной линии $l$ сердечника.

Построения на рис. 15.17, *а* соответствуют случаю, когда $I_0=0$, а на рис. 15.17, *б* — когда $I_0 \neq 0$. На обоих рисунках переменная составляющая потока $\Phi_m \sin\omega t$ одинакова. Для рис. 15.17, *а* постоянная составляющая потока $\Phi_0 = 0$, для рис. 15.17, *б* $\Phi_0 \neq 0$. На кривых $\Phi = f(\omega t)$, $\Phi = f(Hl)$ и $iw_1 = f(\omega t)$ наиболее характерные соответствующие друг другу точки обозначены одинаковыми буквами.

Построения производим в такой последовательности.

Сначала откладываем значения постоянной составляющей потока $\Phi_0$ и строим кривую $\Phi_m \sin\omega t = f(\omega t)$. Затем произвольно задаемся различными моментами времени, например равными $\omega t = 0$; $\pi/2$; $\pi$; $3\pi/2$; $2\pi$, и для каждого значения $\omega t$ с помощью кривой $\Phi = f(Hl)$ находим соответствующие значения $Hl$ и строим кривую $iw_1 + I_0 w_0 = f(\omega t)$ (для рис. 15.17, *а* $I_0 w_0 = 0$). Ось времени для этой кривой направлена вертикально вниз и проходит через точки *a*, *c*, *e* в нижней части рисунка.

Ток $i$ не содержит постоянной составляющей, так как в цепи обмотки $w_1$ нет источника постоянной ЭДС и выпрямителей.

Прямая $A - A$ (рис. 15.17, *б*) является нулевой линией для кривой $iw_1 = f(\omega t)$. Ток $i$ изменяется относительно этой прямой так, что среднее значение его за период от $\omega t = 0$ до $\omega t = 2\pi$ равно нулю.

Другими словами, проводим прямую $A - A$ так, чтобы площадь $S_1$ была равна площади $S_2$. Расстояние, на которое удалена прямая $A - A$ от оси ординат, равно $I_0 w_0$.

Полезно сопоставить выводы § 15.17, сделанные в общей форме, с теми выводами, которые применительно к нелинейному индуктивному элементу следуют из рассмотрения рис. 15.17, *а*, *б*. Сопоставимыми величинами являются $x$—$\Phi$; $y$—$(iw_1 + I_0 w_0)$; $x_0$—$\Phi_0$; . $x_m$—$\Phi_m$

$$y_0 - I_0 w_0;\ y = f(\omega t) - (iw_1 + I_0 w_0) = f(\omega t);$$

а) в § 15.17 утверждалось, что: путем изменения $y_0$ можно влиять на амплитуды первой и высшей гармоник функции $y = f(\omega t)$; этот вывод подтверждается построениями на рис. 15.17, *а*, *б* — амплитуды первой и высших гармоник функция $iw_1 = f(\omega t)$ зависят от $I_0 w_0$ (чем больше $I_0 w_0$, тем больше амплитуда первой гармоники тока $i$);

б) $y_0$ зависит не только от $\Phi_0$, но и от $\Phi_m$; из построений рис. 15.17, *а*, *б* следует, что $I_0 w_0$ зависит не только от $\Phi_0$, но и от $\Phi_m$;

в) при наличии постоянной составляющей в составе функции $x$ в кривой $y = f(\omega t)$ появляются четные гармоники. Из рис. 15.17, *б* следует, что при наличии постоянной составляющей $\Phi_0$ в составе магнитного потока $\Phi$ в кривой $iw_1 = f(\omega t)$ появляются четные гармоники — кривая $iw_1 = f(\omega t)$ несимметрична относительно прямой $A - A$.

Запишем потоки через индукции и сечения:

$$\Phi_m = B_m S; \tag{15.23}$$

$$\Phi_0 = B_0 S, \tag{15.24}$$

где $B_m$ — амплитуда переменной составляющей индукции; $B_0$ — постоянная составляющая индукции.

Из (15.22) и (15.23) следует, что

$$B_m = U_m / (\omega w_1 S). \tag{15.25}$$

Если магнитную индукцию $B_m$ выражать в Гс; $S$ — см$^2$; $U_m$ заменить на $U\sqrt{2}$, где $U$ — действующее значение напряжения на обмотке $w_1$, то

$$B_m = \frac{\sqrt{2}\, U \cdot 10^8}{2\pi f w_1 S} = \frac{U \cdot 10^8}{4{,}44 f w_1 S}. \tag{15.26}$$

Формула (15.25) дает возможность найти амплитуду переменной составляющей магнитной индукции по амплитуде синусоидального напряжения $U_m$, частоте $f$, числу витков $w_1$ и сечению $S$.

По закону полного тока, произведение напряженности поля $H$ на длину средней магнитной линии $l$ должно быть равно алгебраической сумме МДС:

$$Hl = iw_1 + I_0 w_0. \tag{15.27}$$

Так как ток $i$ содержит первую и высшие гармоники, то уравнение (15.27) распадается на ряд уравнений: уравнение для постоянных составляющих, уравнения для первой гармоники, второй гармоники и т. д.



Уравнение для постоянных составляющих

$$I_0 w_0 = H_0 l, \tag{15.28}$$

где $H_0$ — постоянная составляющая напряженности поля.

Переменный ток $i$ содержит первую, вторую и другие высшие гармоники, но постоянной составляющей не содержит, так как в цепи обмотки $w_1$ нет источника постоянной ЭДС и выпрямителей.

Уравнение для первой гармоники

$$I_{1m} w_1 = H_{1m} l, \tag{15.29}$$

где $I_{1m}$ — амплитуда первой гармоники тока $i$; $H_{1m}$ — амплитуда первой гармоники напряженности поля. Аналогично,

$$I_{2m} w_1 = H_{2m} l. \tag{15.30}$$

Из (15.28) — (15.29) следует, что

$$H_0 = I_0 w_0 / l, \tag{15.31}$$

$$H_{1m} = I_{1m} w_1 / l, \tag{15.32}$$

$$H_{2m} = I_{2m} w_1 / l, \tag{15.33}$$

и т. д.

Формула (15.31) позволяет определить постоянную составляющую напряженности поля $H_0$ через постоянную составляющую тока $I_0$. Формула (15.32) позволяет найти $H_{1m}$ через $I_{1m}$ и т. д.

**§ 15.25. ВАХ управляемой нелинейной индуктивной катушки по первым гармоникам.** Под ВАХ управляемой нелинейной индуктивной катушки по первым гармоникам будем понимать зависимость действующего значения первой гармоники переменного напряжения $U_1$ на обмотке $w_1$ от действующего значения первой гармоники переменного тока $I_1$ при постоянном токе $I_0$, взятом в качестве параметра.

Как уже указывалось в § 15.21, ВАХ нелинейной индуктивной катушки можно получить опытным путем с помощью схемы (рис. 15.14, *а*) или расчетным.

Рассмотрим расчетный путь, основанный на использовании обобщенных характеристик (см. § 15.23).

Пусть зависимость между мгновенным значением напряженности магнитного поля $H$ и мгновенным значением магнитной индукции $B$ выражается гиперболическим синусом:

$$H = \alpha \operatorname{sh} \beta B. \tag{15.34}$$

В (15.34) $H$ выполняет ту же функцию, что $y$ в (15.1), а $B$ — ту же, что и $x$. На основании аналогии между (15.34) и (15.1) ясно, что характеристики управ-

Первая гармоника напряжения

$$2a\mathrm{ch}\beta Q_0[-jJ_1(j\beta Q_m)]\sin\omega t.$$

Ток через конденсатор равен $dq/dt$. Следовательно, первая гармоника тока через него

$$\frac{d}{dt}(Q_m \sin\omega t) = \omega Q_m \cos\omega t.$$

Ее амплитуда $\omega Q_m = \beta Q_m/\beta$, а действующее значение в $\sqrt{2}$ раз меньше:

$$I_1 = \beta Q_m \frac{\omega}{\beta\sqrt{2}}. \qquad (15.41)$$

Под ВАХ управляемого нелинейного конденсатора по первым гармоникам будем понимать зависимость действующего значения первой гармоники тока через конденсатор $I_1$ от действующего значения первой гармоники напряжения $U_1$ при параметре $U_0$.

На основании записанного соответствия между $U_0$ и $y_0$ и $U_{1m}$ и $y_{1m}$ и т. д. можно утверждать, что семейство кривых $\beta Q_m = f[U_{1m}/(2a)]$ при параметре $U_0/a$ полностью повторяет семейство кривых $\beta x_m = f[y_{1m}/(2a)]$ при параметре $y_0/a$, изображенное на рис. 15.15, *б*.

Для перехода от семейства кривых $\beta Q_m = f(U_{1m}/2a)$ к семейству ВАХ управляемого нелинейного конденсатора по первым гармоникам следует учесть формулу (15.41) и то, что действующее значение первой гармоники напряжения на конденсаторе

$$U_1 = \frac{U_{1m}}{2a} a\sqrt{2}; \; U_0 = \frac{U_0}{a} a.$$

Следовательно, для перехода от семейства кривых $\beta Q_m = f[U_{1m}/(2a)]$ при параметре $U_0/a$ к семейству кривых $I_1 = f(U_1)$ при параметре $U_0$ необходимо масштаб по оси ординат изменить в $\omega/(\beta\sqrt{2})$ раз, по оси абсцисс — в $a\sqrt{2}$ раз, параметр — в $a$ раз. Подобно тому как для нелинейной индуктивной катушки вводят понятие индуктивного сопротивления по первой гармонике (см. § 15.25), для нелинейного конденсатора вводят понятие емкостного сопротивления по первой гармонике: $X_1 = U_1/I_1$, где $U_1$ — действующее значение первой гармоники напряжения на конденсаторе; $I_1$ — действующее значение первой гармоники тока через нелинейный конденсатор; $X_1$ — функция $U_1$ и $U_0$.

Рассмотрим элементы теории транзисторов и применение последних в электрических цепях. В настоящее время применяют транзисторы двух типов: биполярные и полевые. Физические основы работы их различны. Сначала обсудим вопросы, относящиеся к биполярным транзисторам, а затем (см. § 15.35 — 15.37) — к полевым.

**§ 15.27. Основные сведения об устройстве биполярного транзистора.** Биполярным его называют потому, что его работа обусловлена носителями обеих полярностей. Транзистор представляет собой трехслойную структуру *p-n-p* или *n-p-n*-типа. Схематически структура *p-n-p*-типа пояснена на рис. 15.19, *а*, где знаком плюс в *p*-области обозначены носители положительных зарядов, знаком минус в *n*-области — носители отрицательных зарядов. Оба переходных слоя между *p*- и *n*-областями обладают односторонней проводимостью. Ток через каждый из этих слоев может проходить



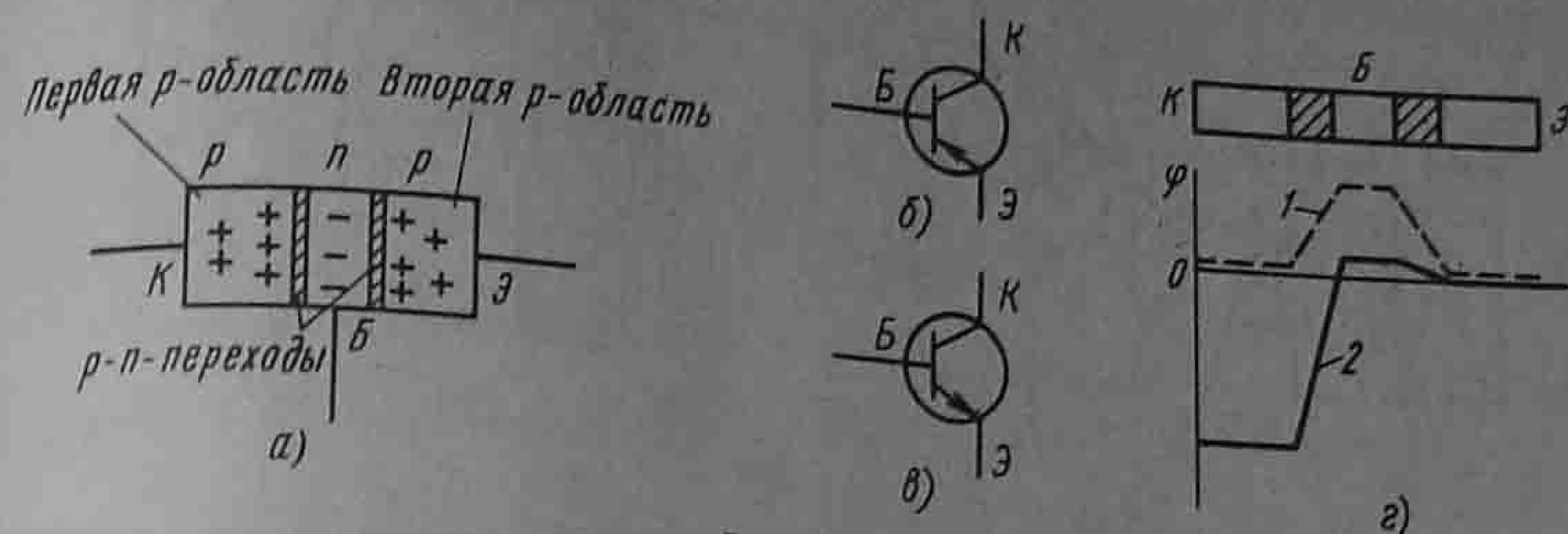



Рис. 15.19

практически в том случае, когда потенциал *p*-области выше потенциала *n*-области.

У транзистора имеется три вывода. В транзисторе *p-n-p*-типа первый вывод — от первой *p*-области — называют *коллектором*, второй вывод — от второй *p*-области — *эмиттером*, третий вывод — от *n*-области — *базой*.

На электрических схемах транзистор *p-n-p*-типа изображают, как показано на рис. 15.19, *б*, а транзисторы *n-p-n*-типа — в соответствии с рис. 15.19, *в*.

**§ 15.28. Основные способы включения биполярных транзисторов в схему.** Различают три основных способа включения триодов в схему в зависимости от того, какой из электродов транзистора является общим для управляющей и управляемой цепей. На рис. 15.20, *а* изображена схема с общей базой, на рис. 15.20, *б* — схема с общим эмиттером, на рис. 15.20, *в* — схема с общим коллектором.

Во всех схемах $E_н$ — источник ЭДС в цепи нагрузки; $E_у$ — источник ЭДС в цепи управления. Для всех схем, в которых используют транзисторы типа *p-n-p*, полярность источников ЭДС должна быть такой, чтобы коллектор имел отрицательный, а эмиттер положительный потенциал относительно базы.

Для создания смещения на базе транзистора (напряжение $U_{эб\,0}$) вместо отдельной ЭДС $E_у$ (рис. 15.20, *б*) используют делитель напряжения — резисторы $R_1$ и $R_2$, подключенные к $E_н$ (рис. 15.20, *г*). В этом случае $U_{эб0} = I_{20}R_2$, $U_{эб0} + I_{10}R_1 = E_н$, $I_{б0} + I_{20} = I_{10}$, где $I_{10}$, $I_{20}$, $I_{б0}$ — постоянные составляющие токов $i_1$, $i_2$, $i_б$. Сигнал на базу поступает через конденсатор $C$.

**§ 15.29. Принцип работы биполярного транзистора.** Рассмотрим принцип работы транзистора *p-n-p*-типа в схеме с общей базой (рис. 15.20, *а*). Вследствие диффузии в переходном слое между эмиттером и базой и между базой и коллектором имеются объемные заряды (на рис. 15.19, *а* не показаны). В *p*-области объемные заряды отрицательны, а в *n*-области — положительны.

Объемные заряды в каждом переходном слое создают электрическое поле, вектор напряженности которого направлен от *n*- к *p*-области, т. е. поле препятствует движению носителей положительных зарядов из *p*- в *n*-область и движению носителей отрицательных зарядов из *n*- в *p*-область.

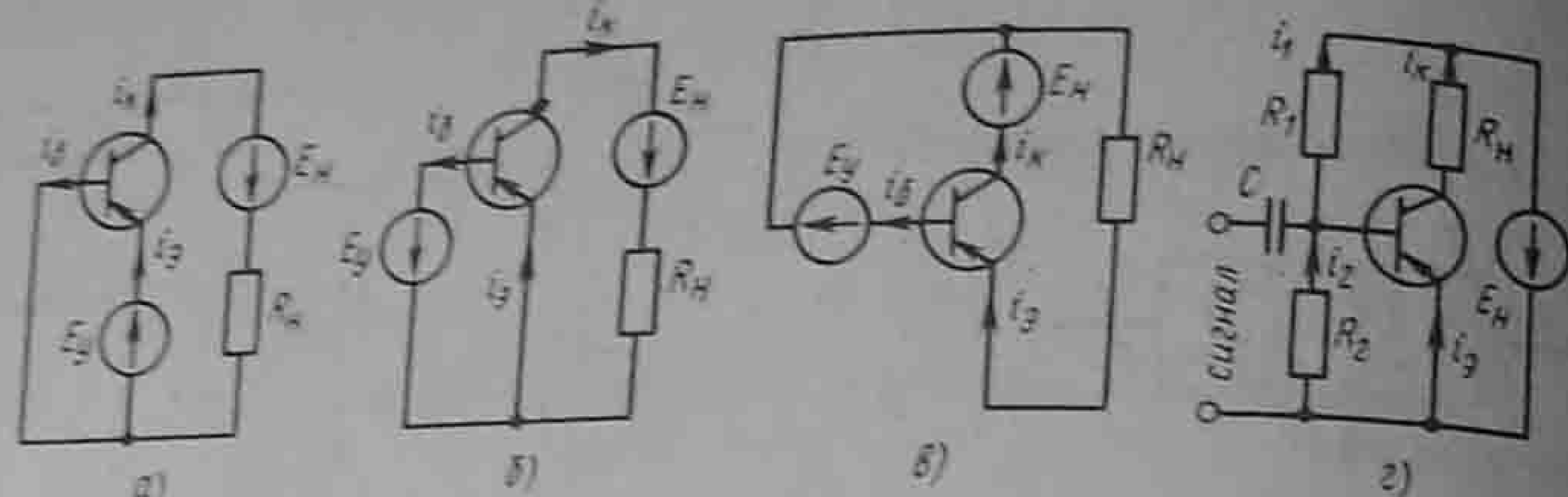



Рис. 15.20

Разность потенциалов на переходном слое между p- и n-областями называют *потенциальным барьером*. Потенциальные барьеры зависят от ЭДС и полярности каждого источника ЭДС, включенного в схему. Так, включение источника ЭДС $E_у$ в схему (рис. 15.20, *а*) приводит к уменьшению потенциального барьера между эмиттером и базой по сравнению с разностью потенциалов на этом слое, когда источник ЭДС $E_у$ не включен. В свою очередь, включение источника ЭДС $E_н$ приводит к увеличению потенциального барьера между базой и коллектором по сравнению с разностью потенциалов на этом слое, когда $E_н$ не включена.

Объясняется это тем, что результирующая напряженность поля на переходном слое коллектор — база при наличии ЭДС $E_н$ равна сумме напряженностей от объемных зарядов и от ЭДС $E_н$, тогда как на переходном слое эмиттер — база результирующая напряженность поля при наличии ЭДС $E_у$ равна разности напряженностей от объемных зарядов и от ЭДС $E_у$.

Кривая *1* на рис. 15.19, *г* — зависимость изменения потенциала вдоль триода при отсутствии ЭДС $E_н$ и $E_у$, а кривая *2* — при наличии ЭДС $E_н$ и $E_у$. При сниженном потенциальном барьере между эмиттером и базой энергетический уровень части носителей зарядов оказывается достаточным для того, чтобы от эмиттера к базе, соединенной с отрицательным полюсом источника ЭДС $E_у$, двигались дырки (носители положительных зарядов).

Небольшое количество отрицательных зарядов движется при этом от базы к эмиттеру, но ток, создаваемый ими, относительно мал, так как концентрация атомов примесей в области базы значительно меньше концентрации атомов примесей в эмиттере.

Хотя в n-области при этом и происходит частичная рекомбинация положительных и отрицательных зарядов, однако благодаря малой толщине n-слоя большая часть дырок успевает продрейфовать к переходному слою между базой и коллектором. В переходном слое между базой и коллектором носители положительных зарядов оказываются под воздействием сильного электрического поля, образованного источником ЭДС $E_н$ (обычно $E_н \gg E_у$). Под действием этого поля дырки втягиваются в область коллектора и движутся к электроду коллектора. Таким образом, большая часть дырок, вышедших из эмиттера и прошедших в n-область, устремляется к коллектору (потенциал коллектора отрицателен по отношению к потенциалу базы и потенциалу эмиттера).

В результате к электроду базы подходит лишь незначительное количество дырок, вышедших из области эмиттера и прошедших в область базы.

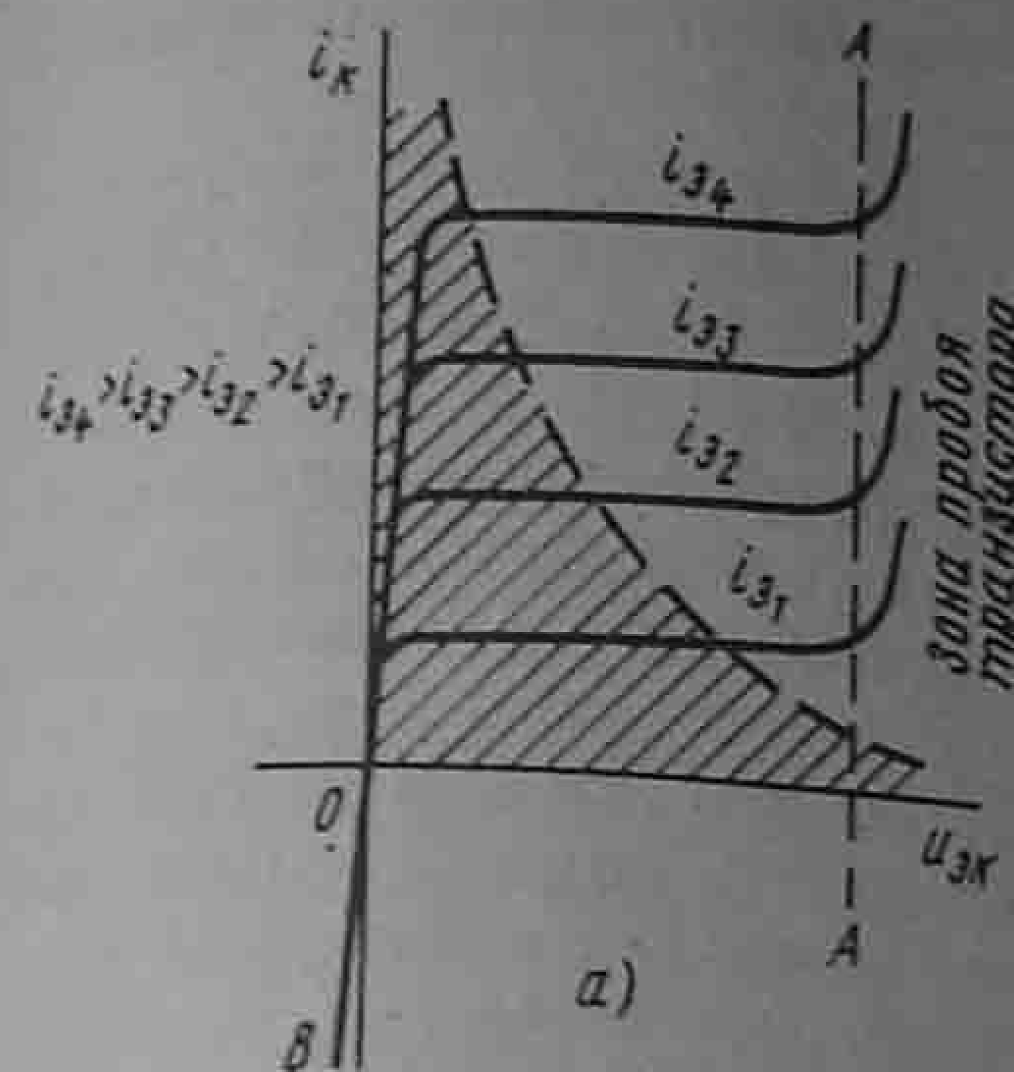
При принятых на рис. 15.20, *а* положительных направлениях для токов ток эмиттера $i_э$ равен сумме тока коллектора $i_к$ и тока базы $i_б$: $i_э = i_к + i_б$.

Отношение тока коллектора к току эмиттера $i_к/i_э = \alpha = 0,95 \div 0,99$ и зависит от режима работы.

В транзисторе коллекторным током и падением напряжения между электродами коллекторной цепи можно управлять путем изменения ЭДС $E_у$.

Следует иметь в виду, что при изменении полярности ЭДС $E_н$ в схеме (рис. 15.20, *а*) транзистор теряет свойство управляемости и на участке между базой и коллектором работает как обычный неуправляемый диод. Этот режим является ненормальным режимом работы транзистора.





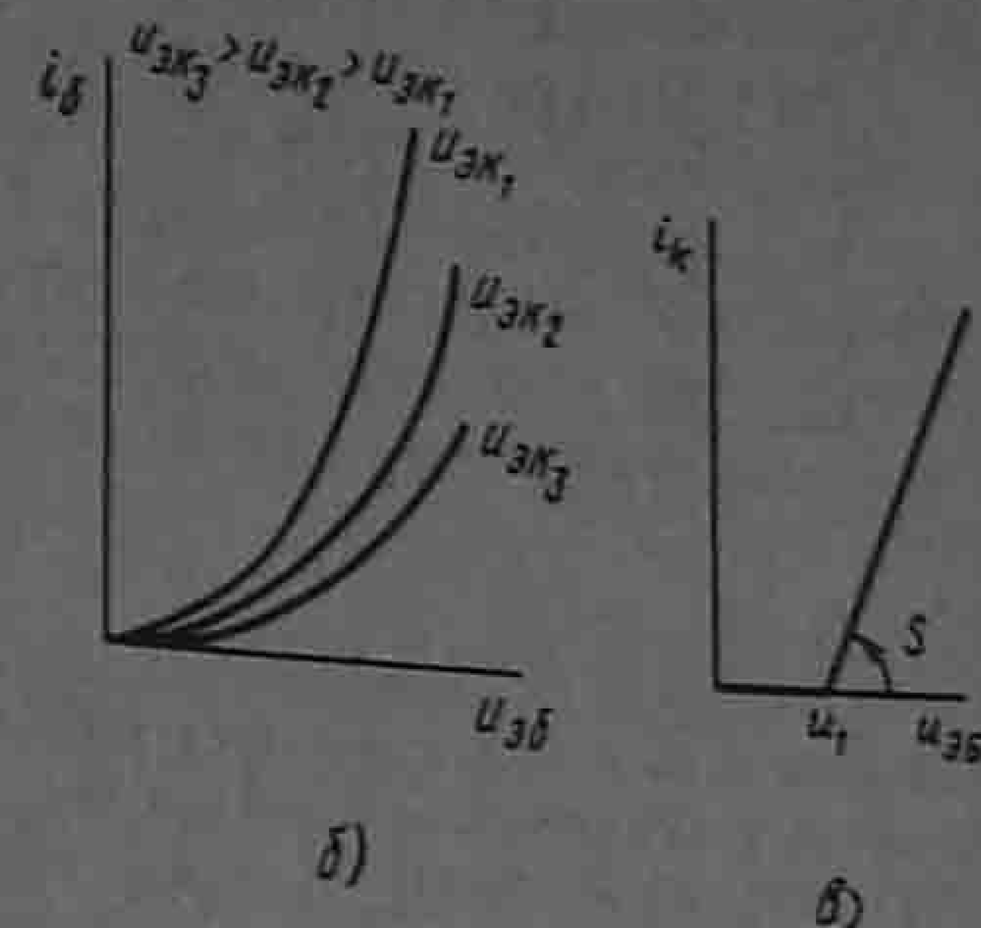




Рис. 15.21

Принцип действия транзистора n-p-n-типа аналогичен принципу действия транзистора p-n-p-типа. Но концентрация атомов примесей в базе транзистора n-p-n-типа много меньше концентрации примесей в n-области эмиттера. В транзисторе n-p-n-типа в область базы поступают не дырки, а электроны. Полярность включения источников питания $E_у$ и $E_н$ транзисторов n-p-n-типа противоположна полярности источников питания транзистора p-n-p-типа. В соответствии с этим направления прохождения токов в соответствующих ветвях для этих типов транзисторов противоположны.

**§ 15.30. ВАХ биполярного транзистора**. Свойства каждого транзистора определяются двумя основными семействами его ВАХ. Первое семейство характеристик — зависимость тока выходной цепи от напряжения между электродами транзистора, включенными в выходную цепь, при каком-либо из остальных токов транзистора, взятом в качестве параметра. В качестве параметра может быть взята и любая другая величина, например напряжение между электродами транзистора, включенными в цепь управления. Это семейство описывает свойства транзистора по отношению к выходной цепи. Второе семейство характеристик — зависимость тока входной цепи (цепи управления) от напряжения между электродами транзистора, включенными во входную цепь, при напряжении между электродами, включенными в выходную цепь (или при токе выходной цепи), взятом в качестве параметра. Это семейство характеристик описывает свойства транзистора по отношению к цепи управления.

На рис. 15.21, *а* качественно изображено семейство выходных характеристик $i_к = f(u_{эк})$ при параметре $i_э$ для схемы с общим эмиттером (см. рис. 15.20, *а*). Правее вертикальной пунктирной прямой *А — А* кривые начинают круто подниматься. Это свидетельствует о том, что в данной зоне может произойти пробой транзистора. Поэтому в зоне правее прямой *А — А* работать нельзя.

Расположенная в третьем квадранте кривая *OB* иллюстрирует

потерю управляемости транзистора при изменении полярности ЭДС в выходной цепи.

При протекании тока по транзистору он нагревается выделяющейся в нем теплотой. Каждый транзистор в зависимости от размеров и условий охлаждения может отдавать в окружающее пространство определенное количество теплоты. Допустимое количество теплоты, выделяющейся в транзисторе, характеризуется *мощностью рассеяния* $p_к = u_{эк} i_к$ (дается в каталогах). На рис. 15.21, *а* пунктиром нанесена гипербола $i_к = p_к / u_{эк} = f(u_{эк})$. Транзистор не перегревается в условиях длительного режима в том случае, если рабочая точка находится внутри заштрихованной области (кратковременно можно работать и в области, находящейся выше пунктирной кривой). На рис. 15.21, *б* качественно изображено семейство входных характеристик транзистора $i_б = f(u_{эб})$ при параметре $u_{эк}$ в схеме с общим эмиттером (см. рис. 15.20, *б*).

Важно обратить внимание на то, что любой ток транзистора (например, $i_к$ или $i_б$) является функцией не одной, а двух переменных. Так, ток $i_к$ является функцией $u_{эк}$ и $i_э$, ток $i_б$ — функцией $u_{эб}$ и $u_{эк}$. (В § 15.34 это положение будет учтено.)

В радиотехнике свойства транзистора иногда описывают еще так называемой *проходной характеристикой* $i_к = f(u_{эб})$ (рис. 15.21, *в*). Ее используют, например, когда ток $i_к$ имеет форму косинусоидальных импульсов с отсечкой (в резонансных усилителях мощности, умножителях частоты и других устройствах). Формулы разложения тока $i_к$ на гармоники в этом случае приведены в 16 п. вопросов гл. 7 ($S$ — крутизна характеристики).

**§ 15.31. Биполярный транзистор в качестве усилителя тока, напряжения, мощности.** Транзистор может служить усилителем тока, когда приращение тока управляемой цепи (той, где включен источник ЭДС $E_н$) во много раз больше приращения тока управляющей цепи (той, где включен источник ЭДС $E_у$). Из трех схем (рис. 15.20) в качестве усилителя тока могут быть использованы две: схема с общим эмиттером (см. рис. 15.20, *б*) и схема с общим коллектором (см. рис. 15.20, *в*). В обеих схемах током управления является ток базы $i_б$. Током управляемой цепи в схеме с общим эмиттером является ток коллектора $i_к$, а в схеме с общим коллектором — ток эмиттера $i_э$.

Так как $i_к = \alpha i_э$ (см. § 15.29) и $i_э = i_к + i_б$, то $i_б = i_э - i_к = (1-\alpha) i_э$.

При нахождении связи между малыми приращениями токов можно в первом приближении принять $\alpha = \mathrm{const}$. Тогда $\Delta i_к = \alpha \Delta i_э$; $\Delta i_б = (1-\alpha)\Delta i_э$.

*Коэффициент усиления по току* $k_i$ равен отношению приращения тока на выходе к приращению тока на входе. Для схемы с общим эмиттером

$$k_i = \Delta i_к / \Delta i_б = \alpha / (1-\alpha),$$

для схемы с общим коллектором

$$k_i = \Delta i_э / \Delta i_б = 1/(1-\alpha).$$

Так как коэффициент $\alpha = 0{,}95 \div 0{,}99$, то $k_i \approx 19 \div 100$.

При работе транзистора в качестве усилителя напряжения важно, чтобы приращение напряжения на нагрузке $\Delta u_{вых}$, включенной в выходную цепь, было больше приращения напряжения на входе управляющей цепи $\Delta u_{вх}$.



Коэффициент усиления по напряжению $k_u = \Delta u_{вых} / \Delta u_{вх}$. При использовании транзистора в качестве усилителя напряжения его включают по схеме с общей базой (см. рис. 15.20, *а*) или по схеме с общим эмиттером (см. рис. 15.20, *б*).

Для схемы с общей базой $k_u$ составляет несколько сотен, для схемы с общим эмиттером — несколько десятков или сотен.

Усиление по мощности достигается во всех схемах включения на рис. 15.20. Коэффициент усиления по мощности $k_p$ равен отношению приращения мощности в нагрузке $\Delta P_н$ к приращению мощности на входе транзистора $\Delta P_у$.

Наибольшее усиление по мощности достигается в схеме с общим эмиттером. Для нее $k_p$ может достигать значений $10^4$ и более.

**§ 15.32. Связь между приращениями входных и выходных величин биполярного транзистора.** Напряжение на входных $u_1$ и напряжение на входных $u_2$ зажимах являются функциями входного $i_1$ и выходного $i_2$ токов, т. е.

$$u_1 = U_1(i_1, i_2); \quad (15.42)$$

$$u_2 = U_2(i_1, i_2). \quad (15.42а)$$

Условимся исходные значения токов и напряжений обозначать большими буквами ($U$, $I$), а приращения — малыми ($\Delta u$, $\Delta i$). Пусть токи получили малые приращения $\Delta i_1$ и $\Delta i_2$ и стали равными $I_1 + \Delta i_1$ и $I_2 + \Delta i_2$. При этом напряжения также получили приращения и стали равными $U_1 + \Delta u_1$ и $U_2 + \Delta u_2$. Следовательно,

$$U_1 + \Delta u_1 = U_1[(I_1 + \Delta i_1), (I_2 + \Delta i_2)]; \quad (15.43)$$

$$U_2 + \Delta u_2 = U_2[(I_1 + \Delta i_1), (I_2 + \Delta i_2)]. \quad (15.43а)$$

Найдем связь между приращениями напряжений $\Delta u_1$ и $\Delta u_2$ и приращениями токов $\Delta i_1$ и $\Delta i_2$. С этой целью разложим правые части равенств (15.43) и (15.43а) в ряд Тейлора для функции от двух переменных по степеням приращений $\Delta i_1$ и $\Delta i_2$ и воспользуемся тем, что в силу малости приращений можно пренебречь слагаемыми, содержащими $\Delta i_1$ и $\Delta i_2$ в степенях выше первой. В результате получим

$$U_1 + \Delta u_1 = U_1(I_1, I_2) + \Delta i_1 \cdot R_{11} + \Delta i_2 R_{12},$$

$$U_2 + \Delta u_2 = U_2(I_1, I_2) + \Delta i_1 \cdot R_{21} + \Delta i_2 R_{22},$$

где

$$R_{11} = \left(\frac{\partial U_1}{\partial i_1}\right)_{I_1, I_2}; \quad R_{12} = \left(\frac{\partial U_1}{\partial i_2}\right)_{I_1, I_2};$$

$$R_{21} = \left(\frac{\partial U_2}{\partial i_1}\right)_{I_1, I_2}; \quad R_{22} = \left(\frac{\partial U_2}{\partial i_2}\right)_{I_1, I_2}.$$

Обратим внимание на то, что $R_{21} \neq R_{12}$.

Значения $R_{11}$, $R_{12}$, $R_{21}$, $R_{22}$ могут быть найдены графическим путем из характеристик транзистора или опытным путем, поэтому в дальнейшем будем полагать их известными. Если из (15.43) вычесть (15.42), а из (15.43а) — (15.42а), то

$$\Delta u_1 = R_{11} \Delta i_1 + R_{12} \Delta i_2, \quad (15.44)$$

$$\Delta u_2 = R_{21} \Delta i_1 + R_{22} \Delta i_2. \quad (15.44а)$$

Из (15.44) и (15.44а) следует, что по отношению к малым приращениям транзистор можно заменить эквивалентной линейной схемой замещения.

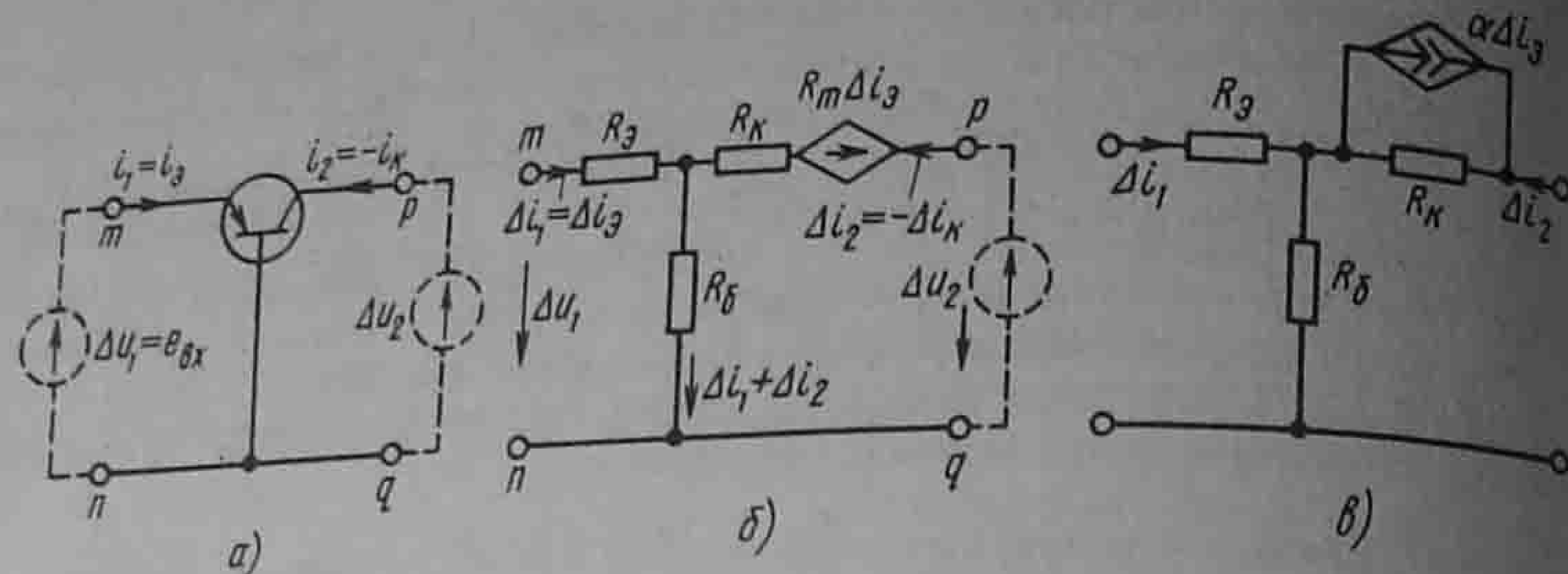



Рис. 15.22

**§ 15.33. Схема замещения биполярного транзистора для малых приращений. Методика расчета схем с управляемыми источниками с учетом их частотных свойств.** В схемы замещения для малых приращений часто вводят не сопротивления $R_{11}$, $R_{12}$, $R_{21}$, $R_{22}$, которые рассматривались ранее, а некоторые расчетные сопротивления — сопротивления базы $R_б$, коллектора $R_к$, эмиттера $R_э$ и некоторый управляемый источник, ЭДС которого равна произведению тока управляемой цепи на расчетное сопротивление $R_m$.

Значения $R_б$, $R_к$, $R_э$ и $R_m$ определяют через $R_{11}$, $R_{12}$, $R_{21}$ и $R_{22}$.

Рассмотрим схему замещения транзистора, когда общим электродом является база (рис. 15.22, *а*). Входной ток в ней $i_1=i_э$, выходной ток $i_2=-i_к$ (положительное направление для тока $i_2$ принято противоположным положительному направлению тока $i_к$ на рис. 15.20, *а*). Схема на рис. 15.22, *б* заменяет схему на рис. 15.22, *а* для малых приращений.

По второму закону Кирхгофа составим уравнения для двух контуров схемы (рис. 15.22, *б*):

$$\Delta u_1=(R_э+R_б)\Delta i_1+R_б\Delta i_2; \qquad (15.45)$$

$$\Delta u_2-R_m\Delta i_э=R_б\Delta i_1+(R_к+R_б)\Delta i_2; \qquad (15.45а)$$

$$\Delta u_1=u_{mn}=\varphi_m-\varphi_n \quad \Delta u_2=u_{pq}=\varphi_p-\varphi_q,$$

где $\varphi_m$ — потенциал точки $m$; $\varphi_q$ — потенциал точки $q$ и т. д.

Сопоставляя (15.45) и (15.45а) с (15.44) и (15.44а), определим:

$$R_э+R_б=R_{11};\ R_б=R_{12},R_m+R_б=R_{21};\ R_к+R_б=R_{22}.$$

Последние уравнения дают возможность найти сопротивления $R_б$, $R_э$, $R_к$ и $R_m$ по известным сопротивлениям $R_{11}$, $R_{12}$, $R_{21}$, $R_{22}$. Источник ЭДС $R_m\Delta i_э$ введен в схему замещения (рис. 15.22, *б*) для того, чтобы учесть в расчете усилительное действие транзистора; ЭДС этого источника пропорциональна входному току.

Таким образом, для расчета малых приращений входных и выходных токов в нелинейной схеме (рис. 15.22, *а*), определения коэффициентов усиления и входных сопротивлений следует произвести расчет линейной схемы (рис. 15.22, *б*), подключив к ее входным зажимам источник малой, обычно синусоидальной, ЭДС, а к выходным зажимам — нагрузку $R_н$. Источник ЭДС $R_m\Delta i_э$ в схеме (рис. 15.22, *б*) является зависимым источником ЭДС.

В заключение остановимся еще на двух положениях.

1. В схемах замещения транзисторов вместо зависимого источника ЭДС и последовательно с ним включенного резистора часто используют зависимый источник тока и шунтирующий его резистор. Так, в схеме на рис. 15.22, *в* вместо источника ЭДС $R_m\Delta i_э$ и резистора $R_к$ можно включить управляемый источник тока $\frac{R_m}{R_к}\Delta i_э=\alpha\Delta i_э$ и зашунтировать его резистором $R_к$.



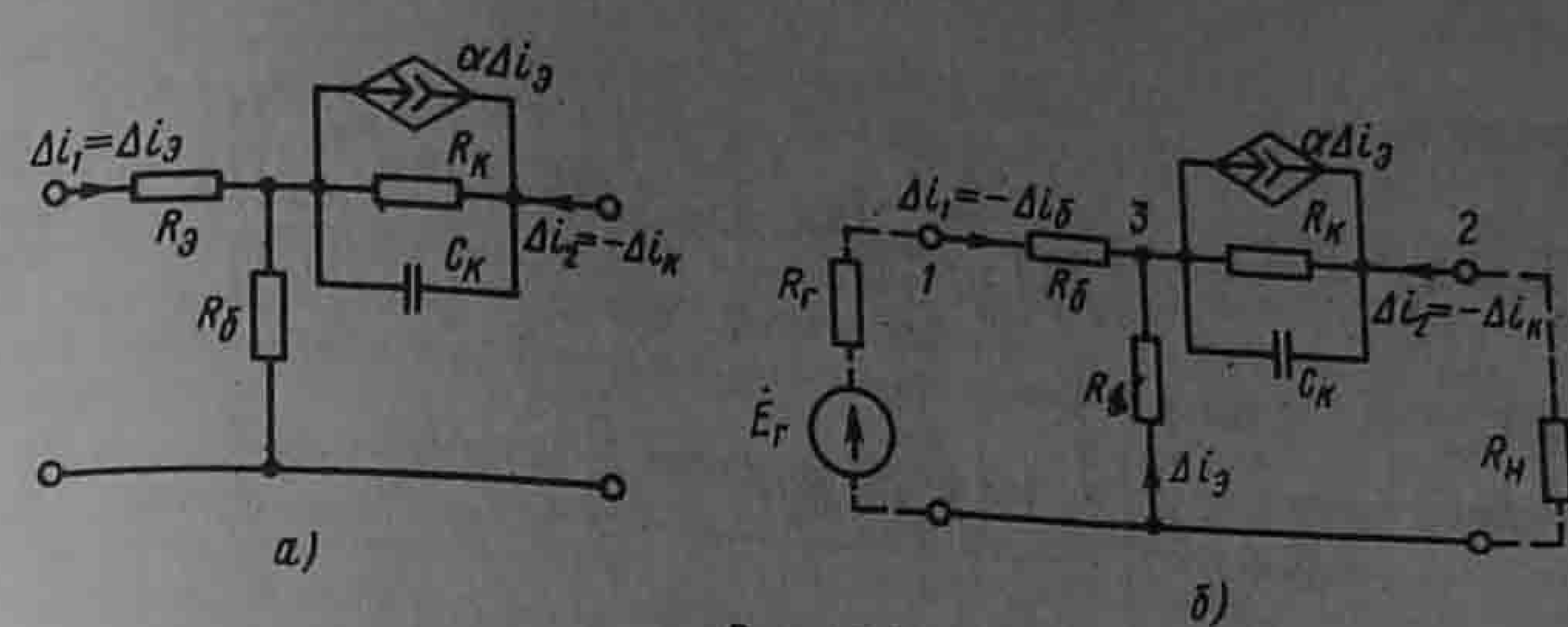



Рис. 15.23

2. При относительно высоких частотах и быстро протекающих процессах *p-n*-переходы проявляют свои емкостные свойства и имеет место инерционность основных носителей зарядов. Емкостные свойства учитывают в расчете, шунтируя в схеме замещения коллекторный *p-n*-переход некоторой емкостью $C_к$, а инерционность носителей заряда — вводя зависимость коэффициента усиления $\alpha$ транзистора от комплексной частоты $p$ $\alpha=\frac{\alpha_0}{1+p/\omega_0}$, где $\alpha_0$ — коэффициент усиления транзистора на постоянном токе; $\omega_0^{-1}=R_кC_к$.

Емкость эмиттерного перехода обычно не учитывают, так как она шунтирует относительно малое по сравнению с $R_к$ сопротивление $R_э$.

Для высокой частоты схема замещения транзистора, собранного по схеме с общей базой, изображена на рис. 15.23, *а*, с общим эмиттером — на рис. 15.23, *б*. В зависимости от типа транзистора $R_к$ имеет значение от нескольких десятых МОм до нескольких МОм; $R_э$ — несколько десятков Ом; $R_б$ — несколько десятков или сотен Ом; $C_к$ — от нескольких единиц до нескольких десятков или сотен пФ.

*Рассмотрим методику расчета схем с управляемыми источниками* для малых переменных составляющих на примере схемы (рис. 15.23, *б*). Пунктиром на ней показаны генератор сигнала (ЭДС $E_г$, внутреннее сопротивление $R_г$) и нагрузка $R_н$. Для синусоидального процесса $p=j\omega$, поэтому $\alpha=\frac{\alpha_0}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}$. Воспользуемся методом узловых потенциалов. Незаземленных узлов два (*3* и *2*). Поэтому

$$Y_{33}\dot\varphi_3+Y_{32}\dot\varphi_2=\dot J_{33}, \qquad (а)$$

$$Y_{23}\dot\varphi_3+Y_{22}\dot\varphi_2=\dot J_{22}, \qquad (б)$$

$$Y_{33}=\frac{1}{R_г+R_б}+\frac{1}{R_э}+\frac{1}{R_к}+j\omega C_к;\ Y_{32}=Y_{23}=-\left(\frac{1}{R_к}+j\omega C_к\right),$$

$$Y_{22}=\frac{1}{R_н}+\frac{1}{R_к}+j\omega C_к;\ \dot J_{33}=\frac{\dot E_г}{R_б+R_г}-\alpha\Delta\dot i_э=\frac{\dot E_г}{R_г+R_б}+\alpha\frac{\dot\varphi_3}{R_э};\ \dot J_{22}=-\alpha\frac{\dot\varphi_3}{R_э}.$$

Слагаемые $\frac{\alpha\dot\varphi_3}{R_э}$, содержащиеся в $\dot J_{33}$, и $-\frac{\alpha\dot\varphi_3}{R_э}$, содержащиеся в $\dot J_{22}$, перенесем в левые части уравнения (а) и (б) и заменим $\alpha$ на $\frac{\alpha_0}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}$.

Получим

$$\left(\frac{1}{R_г+R_б}+\frac{1}{R_э}+\frac{1}{R_к}+j\omega C_к-\frac{a_0}{R_э(1+j\frac{\omega}{\omega_0})}\right)\dot{\varphi}_3-\left(\frac{1}{R_к}+j\omega C_к-\left[\frac{a_0}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}\right]\right)\dot{\varphi}_2=\frac{\dot{E}_г}{R_б+R_г}, \quad (в)$$

$$-\left(\frac{1}{R_к}+j\omega C_к-\frac{a_0}{R_э(1+j\frac{\omega}{\omega_0})}\right)\dot{\varphi}_3+\left(\frac{1}{R_э}+\frac{1}{R_к}+j\omega C_к\right)\dot{\varphi}_2=0. \quad (г)$$

Решив совместно (в) и (г), определим $\dot{\varphi}_3$ и $\dot{\varphi}_2$, а по ним все токи и напряжения.

## § 15.34. Графический расчет схем на транзисторах.

Схемы на транзисторах при относительно низких частотах на практике иногда рассчитывают не с помощью рассмотренных схем замещения, при использовании которых необходимо знать $R_э$, $R_б$, $R_к$ и $R_m$, а путем непосредственного применения семейства характеристик транзистора. Этот способ расчета показан на примере 153.

**Пример 153.** Определить коэффициенты усиления по току, напряжению и мощности схемы (рис. 15.24, *а*), предназначенной для усиления слабых синусоидальных колебаний.

Входные характеристики использованного в схеме транзистора изображены на рис. 15.24, *б*, выходные — на рис. 15.24, *в*. Параметром на рис. 15.24, *в* является ток $I_б$. Сопротивление нагрузки $R_н$=500 Ом. ЭДС смещения в выходной цепи $E_{к0}$=10 В. ЭДС смещения в цепи управления $E_{у0}$=0,25 В.

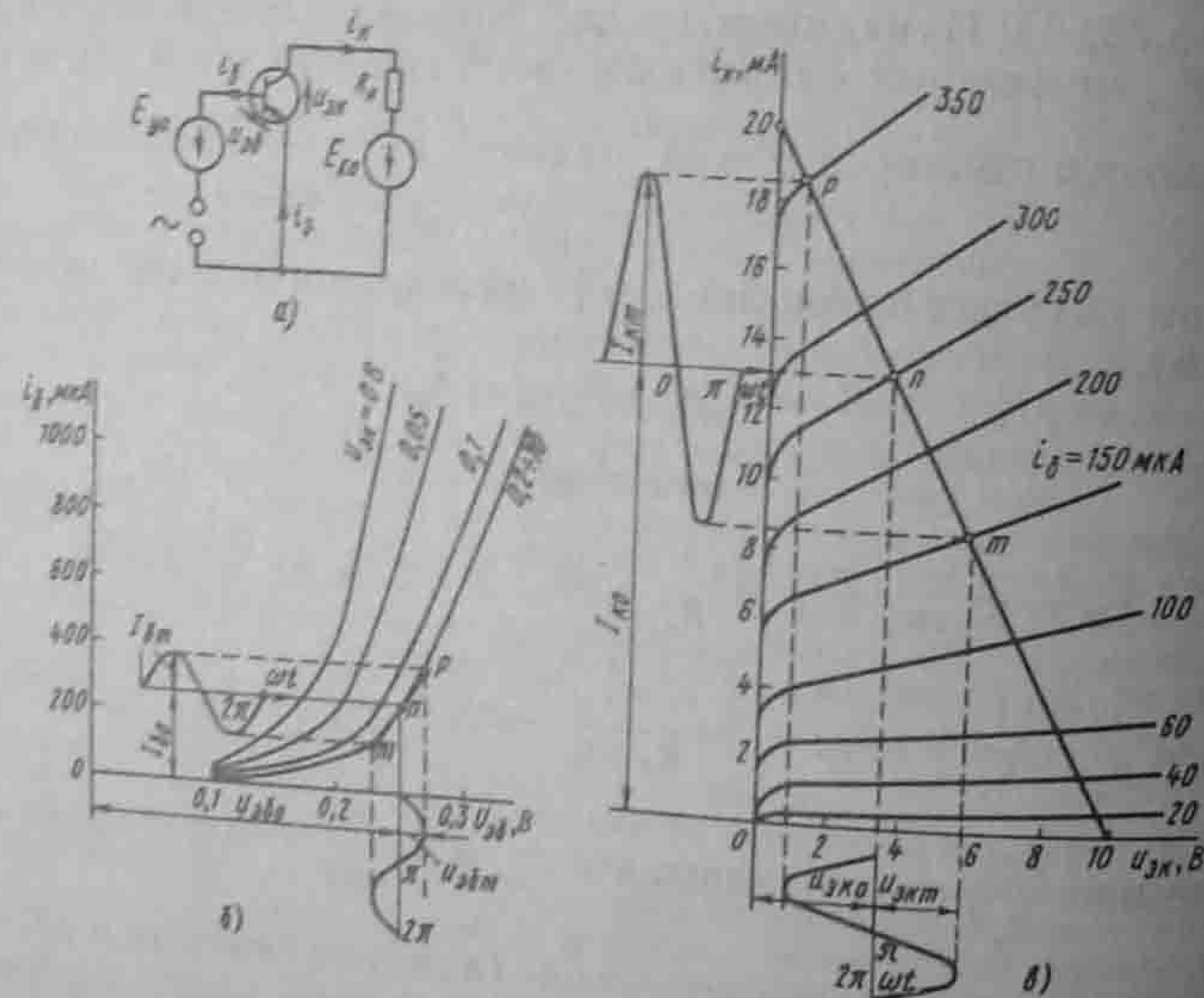



Рис. 15.24



Решение. На рис. 15.24, *в* проводим прямую, представляющую собой ВАХ нагрузки $R_н$=500 Ом. Эта прямая пройдет через точку $i_к=0$, $u_{эк}=E_{к0}$=10 В и через точку $i_к=E_{к0}/R_н$=20 мА, $u_{эк}=0$.

Семейство входных характеристик транзистора П14, как это видно из рис. 15.24, *б*, обладает той особенностью, что в интервале значений $u_{эк}=0{,}2\div10$ В зависимость тока базы $i_б$ от напряжения между эмиттером и базой изображается одной и той же кривой. Найдем значение тока $i_б=I_{б0}$ в режиме, когда на входе действует только ЭДС $E_{у0}$=0,25 В.

Из рис. 15.24, *б* следует, что при $u_{эб}$=0,25 В ток $i_б=I_{б0}$=250 мкА (точка *n*). Далее найдем ток $i_к=I_{к0}$ и напряжение $u_{эк}=U_{эк0}$ в этом режиме.

На семействе кривых рис. 15.24, *в* режим работы при $E_у=E_{у0}$ определяется точкой *n*, полученной в результате пересечения ВАХ нагрузки с той кривой семейства $i_к=f(u_{эк})$, для которой параметром является $i_б$=250 мкА.

В точке *n* $i_к=I_{к0}$=13,1 мА, $u_{эк}=U_{эк0}$=3,5 В. Линеаризуем входную характеристику в рабочей точке. С этой целью проведем в окрестности точки *n* (рис. 15.24, *б*) прямую так, чтобы она на возможно большем участке совпала с касательной к кривой $i_б=f(u_{эб})$ в точке *n*. Крайними точками проведенной прямой будем считать точки *p* и *m*. В точке *p* ток $i_б$=350 мкА и $u_{эб}$= 0,23 В. В точке *m* ток $i_б$=150 мкА и $u_{эб}$=0,23 В. Этим точкам соответствуют одноименные точки *p* и *m* на рис. 15.24, *в*.

В точке *p* (рис. 15.24, *в*) $i_к$=18,6 мА, в точке *m* $i_к$=8,5 мА. Таким образом, при подаче на вход схемы синусоидального напряжения амплитудой $U_{эб\,m}$=0,02 В в цепи управления появится синусоидальная составляющая тока, имеющая амплитуду $I_{бm}=I_{уm}$ = 100 мкА, а в выходной цепи кроме постоянного тока $I_{к0}$ возникает синусоидальный ток амплитудой $I_{кm}$=5,0 мА[1]. При этом на выходных зажимах транзистора действует синусоидальная составляющая напряжения, имеющая амплитуду $U_{эк\,m}$=2,45 В.

Тогда коэффициент усиления по току

$$k_i=\Delta i_{вых}/\Delta i_{вх}=I_{кm}/I_{уm}=5{,}0\ мА/100\ мкА=50.$$

Коэффициент усиления по напряжению

$$k_u=\Delta u_{вых}/\Delta u_{вх}=R_нI_{кm}/U_{эбm}=500\cdot5{,}0\cdot10^{-3}/0{,}02=125.$$

Коэффициент усиления по мощности

$$k_p=\Delta P_{вых}/\Delta P_{вх}=(R_нI^2_{кm})/(U_{эбm}I_{уm})=$$

$$=500(5{,}0\cdot10^{-3})^2/0{,}02\cdot100\cdot10^{-6}=6250.$$

Входное сопротивление транзистора между зажимами эмиттер — база для синусоидальной составляющей

$$R_{вхэб}=U_{эбm}/I_{уm}=0{,}02\ В/100\ мкА=200\ Ом.$$

Выходное сопротивление между зажимами эмиттер — коллектор для синусоидальной составляющей

$$R_{выхэк}=U_{экm}/I_{кm}=2{,}45\ В/5{,}0\ мА=490\ Ом.$$

В тепловом отношении транзистор работает в ненапряженных условиях, так как мощность, выделяемая в нем в режиме, соответствующем точке *n* (рис. 15.24, *б*),

$$U_{эк0}I_{к0}=3{,}5\ В\cdot13{,}1\ мА=45{,}8\ мВт,$$

что значительно меньше допустимой для данного транзистора мощности рассеяния 150 мВт.

---

[1] Берем первую гармонику переменной составляющей коллекторного тока.

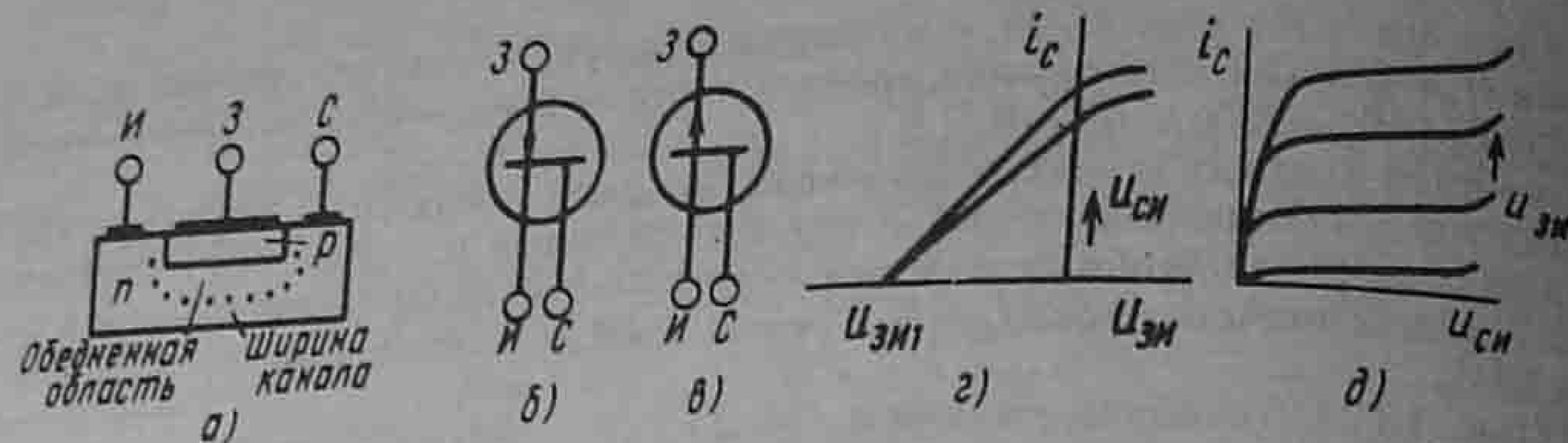



Рис. 15.25

**§ 15.35. Принцип работы полевого транзистора.** *Полевыми* называют транзисторы, управляемые электрическим полем. Их работа обусловлена в основном носителями одной полярности, поэтому их называют иногда униполярными.

Принцип действия полевого транзистора поясняет рис. 15.25, *а*. В полупроводнике *n*-типа создается небольшая *p*-область. У *n*-области имеется два электрода: исток *И* и сток *С*. Электрод *p*-области называют затвором *З*. С помощью электрода *З* создается электрическое поле в *n*-области, примыкающей к *p*-области. Это поле влияет на распределение в ней основных носителей (электронов).

Если потенциал затвора *З* станет меньше потенциалов истока *И* и стока *С*, то упомянутая часть *n*-области (границы ее показаны точками) оказывается обедненной электронами. Вследствие этого ширина канала, по которому могут проходить основные носители от электрода истока к электроду стока, уменьшается.

Если потенциал стока *С* будет выше потенциала истока *И* ($u_{си}>0$), то током от истока к стоку можно управлять, изменяя напряжение между истоком и затвором $u_{зи}$. При некотором $u_{зи}=u_{зи1}$ проводимость канала стремится к нулю и ток $i_c=0$.

В полевом транзисторе *p*-типа *n*- и *p*-области меняются местами по сравнению с транзистором *n*-типа. Условные обозначения полевого транзистора *n*-типа показаны на рис. 15.25, *б*, а *p*-типа — на рис. 15.25, *в*.

**§ 15.36. ВАХ полевого транзистора.** Входные (стокозатворные) ВАХ $i_c=f(u_{зи})$ при некоторой фиксированной температуре показаны на рис. 15.25, *г*. Параметром является напряжение между стоком и истоком $u_{си}$. При некотором напряжении $u_{зи}=u_{зи1}$ проводящий канал перекрывается и ток $i_c=0$.

Семейство выходных (стоковых) характеристик $i_c=f(u_{си})$ при параметре $u_{зи}$ изображено на рис. 15.25, *д*.

На обоих рисунках в направлении стрелки параметр возрастает.

**§ 15.37. Схемы включения полевого транзистора.** Три основных способа включения полевых транзисторов *n*-типа изображены на рис. 15.26. На рис. 15.26, *а* показана схема с общим истоком, на рис. 15.26, *б* — с общим затвором, на рис. 15.26, *в* — с общим стоком. Полярности источников для транзисторов *p*-типа следует изменить на противоположные по сравнению с указанными.

Полевые транзисторы имеют очень большое (теоретически бесконечно большое) входное сопротивление (во много раз больше, чем у биполярных), и потому схема их замещения (рис. 15.26, *г*) при относительно малых переменных составляющих для области относительно низких частот напоминает схему замещения электронной лампы (см. рис. 15.30). На ней изображен источник тока $Su_{зи}$, где $S=\Delta i_c/\Delta u_{зи}$ — крутизна характеристики; $u_{зи}$ — малая переменная



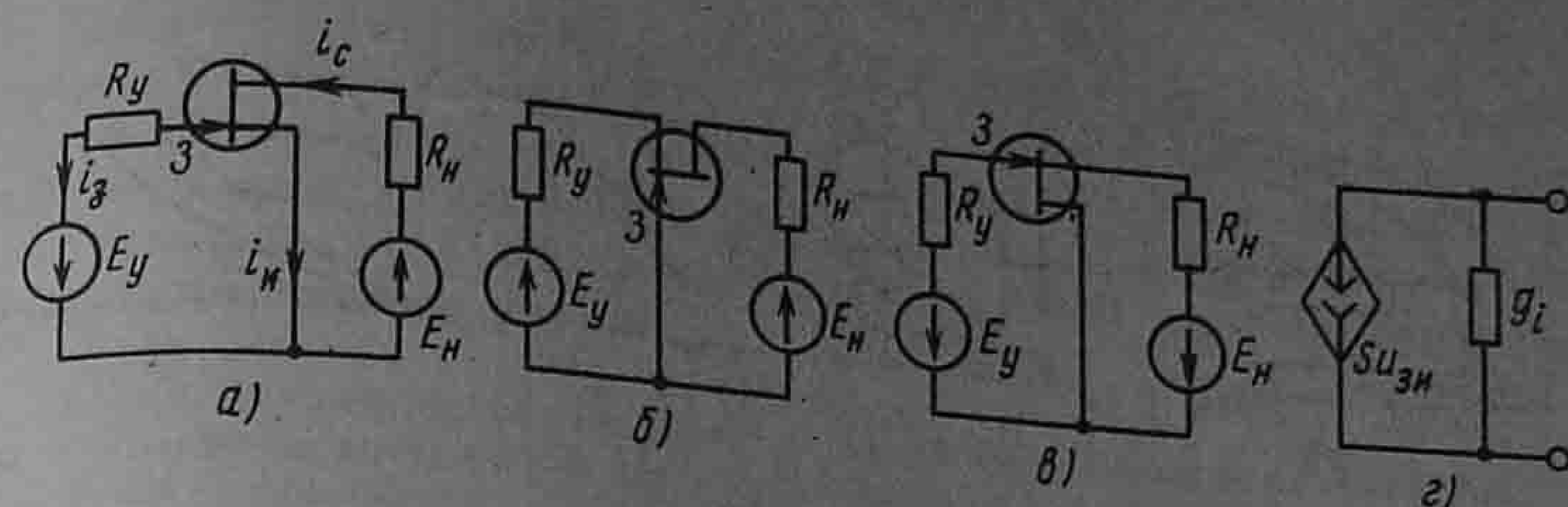



Рис. 15.26

составляющая входного напряжения; $g_i=\Delta i_c/\Delta u_{зи}$ — внутренняя проводимость.

Достоинством полевых транзисторов является также большое усиление по току и мощности.

**§ 15.38. Основные сведения о трехэлектродной лампе.** Трехэлектродная лампа (триод) имеет три электрода: катод, анод и сетку. Эти электроды находятся в вакуумированном стеклянном или металлическом баллоне.

Катод, подогреваемый нитью накала от вспомогательной батареи (обычно не показываемой на схемах), испускает электроны вследствие явления термоэлектронной эмиссии. Поток электронов направляется ко второму (холодному) электроду — аноду — только в том случае, если потенциал анода выше потенциала катода. Если же потенциал анода сделать ниже потенциала катода, то потока электронов от катода к аноду не будет (в этом случае анод не притягивает электроны, а отталкивает их). В результате этого электронная лампа обладает несимметричной ВАХ.

Третий электрод — сетка — расположен ближе к катоду, чем анод. Поэтому электрическое поле, создаваемое между сеткой и катодом, даже при малых напряжениях между ними оказывает сильное влияние на поток электронов с катода на анод. Сетка является управляющим электродом. Путем изменения потенциала сетки можно управлять анодным током лампы. Как и транзистор, электронная лампа может быть включена в схему тремя основными способами: с общим катодом, с общей сеткой и с общим анодом (в зависимости от того, какой из электродов является общим для анодной и сеточной цепей).

На рис. 15.27 изображена наиболее часто употребляемая схема — схема с общим катодом. Как и транзистор, электронная лампа может служить в качестве усилителя тока, напряжения и мощности. Возможность выполнения лампой всех этих функций основывается на том, что изменение разности потенциалов между сеткой и катодом оказывает более сильное влияние на

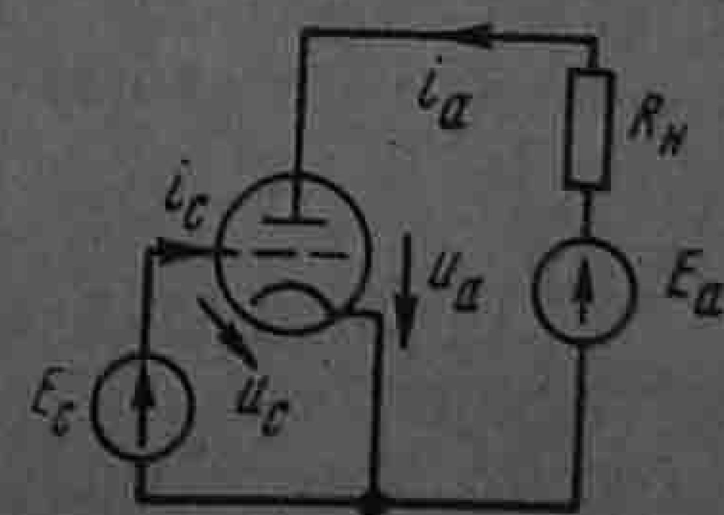



Рис. 15.27

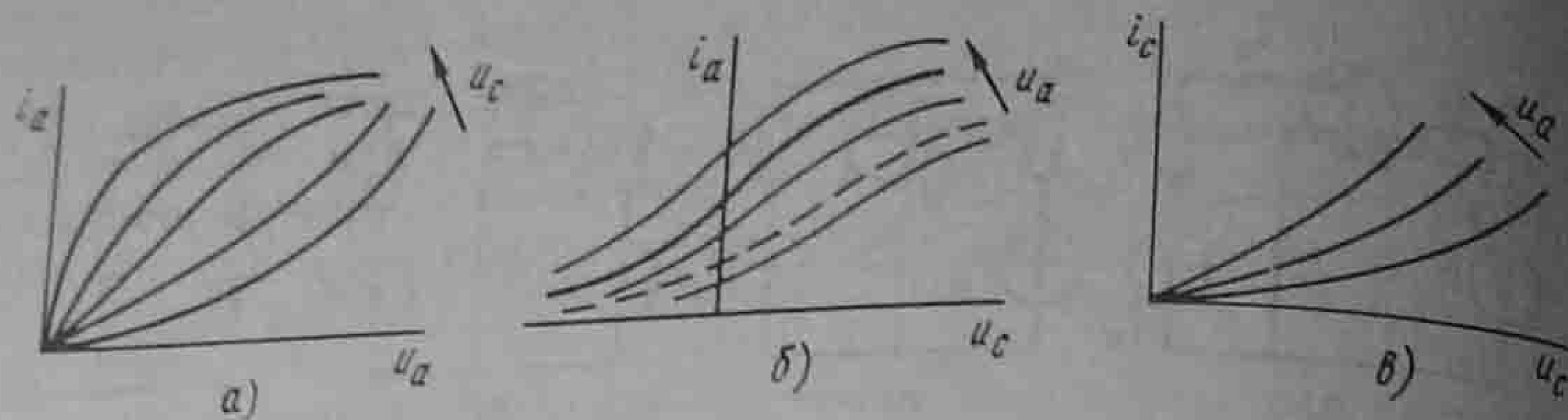



Рис. 15.28

поток электронов с катода на анод, чем изменение (на то же значение) разности потенциалов между анодом и катодом.

**§ 15.39. ВАХ трехэлектродной лампы для мгновенных значений.** Цепь, образованную анодом и катодом трехэлектродной лампы, источником ЭДС $E_а$ и нагрузкой $R_н$, называют *анодной цепью*. Цепь, образованную сеткой и катодом электронной лампы и источником ЭДС $E_с$, называют *сеточной цепью*.

Напряжение между анодом и катодом $u_а$ называют *анодным напряжением*, между сеткой и катодом $u_с$ — *сеточным напряжением*.

Ток в анодной цепи $i_а$ и ток в сеточной цепи $i_с$ нелинейно зависят от анодного и сеточного напряжений $u_а$ и $u_с$.

Под *анодными характеристиками* трехэлектродной лампы понимают зависимость анодного тока $i_а$ от анодного напряжения $u_а$ при сеточном напряжении $u_с$, взятом в качестве параметра.

На рис. 15.28, *а* изображено семейство анодных характеристик лампы. Стрелка на рис. 15.28, *а* — *в* указывает направление, в котором возрастает параметр.

Если семейство анодных характеристик рассечь прямыми $u_а$=const, то можно получить семейство кривых $i_а=f(u_с)$ при параметре $u_а$. Такие кривые называются *сеточными* (*анодно-сеточными*) *характеристиками* трехэлектродной лампы (рис. 15.28, *б*). Для них характерно, что ток $i_а\neq0$ при $u_с=0$; кроме того, имеется область насыщения, в которой ток $i_а$ почти не увеличивается с ростом $u_с$.

Семейство кривых $i_с=f(u_с)$ при различных значениях анодного напряжения и положительных значениях $u_с$ для одного из типов ламп изображено на рис. 15.28, *в*.

В общем случае при работе лампы одновременно меняются $u_а$ и $u_с$ и изображающая точка на семействах анодных и сеточных характеристик перемещается с одних кривых на другие. В частном случае работы, когда $u_а$ остается неизменным или почти неизменным, $i_а=f(u_с)$ изображается одной кривой семейства кривых (рис. 15.28, *б*).

Если электронная лампа работает при отрицательных или сравнительно малых положительных напряжениях на сетке, то сеточный ток имеет малое значение и его в расчете, как правило, не учитывают.



Следует отметить своеобразие сеточной характеристики по сравнению с обычными ВАХ: сеточная характеристика дает связь не между током через нелинейный элемент и напряжением на нем, что характерно для обычных ВАХ, а между мгновенным значением тока через нелинейный элемент и мгновенным значением управляющего напряжения на нем.

**§ 15.40. Аналитическое выражение сеточной характеристики электронной лампы.** Сеточная характеристика при $u_а$=const может быть приближенно представлена отрезками прямых (рис. 15.29). Часть сеточных характеристик, например характеристика, выделенная жирной линией на рис. 15.28, *б*, может быть описана полиномом третьей степени:

$$i_а = i_{а0}+au_с-bu_с^3,$$

где $i_{а0}$ — значение тока $i_а$ при $u_с=0$; $a$ (А·В$^{-1}$) и $b$ (А·В$^{-3}$) — числовые коэффициенты.

Для определения коэффициентов $a$ и $b$ следует выбрать на характеристике две точки с координатами ($i_{а1}$, $u_{с1}$) и ($i_{а2}$, $u_{с2}$) и решить систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$i_{а1} = i_{а0}+au_{с1}-bu_{с1}^3;$$
$$i_{а2} = i_{а0}+au_{с2}-bu_{с2}^3.$$

Характеристика по типу пунктирной кривой на рис. 15.28, *б* может быть приближенно описана полиномом пятой степени:

$$i_а = i_{а0}+pu_с+qu_с^3-ru_с^5,$$

где $p$, $r$ и $q$ — числовые коэффициенты.

**§ 15.41. Связь между малыми приращениями входных и выходных величин электронной лампы.** Как упоминалось в § 15.40, анодный ток $i_а$ является функцией не только анодного, но и сеточного напряжения: $i_а=I_а(u_а, u_с)$. Если по отношению к некоторому исходному состоянию ($U_а$, $U_с$) сеточное напряжение получит небольшое приращение $\Delta u_с$, то оно вызовет приращение анодного напряжения $\Delta u_а$ и анодного тока $\Delta i_а$.

Проделав выкладки, аналогичные выкладкам § 15.32, получим

$$\Delta i_а = g_i\Delta u_а+S\Delta u_с, \qquad (15.46)$$

где $g_i = \left(\dfrac{\partial I_а}{\partial u_а}\right)_{U_а,\ U_с}$

— *внутренняя проводимость лампы* (проводимость между анодом и катодом).

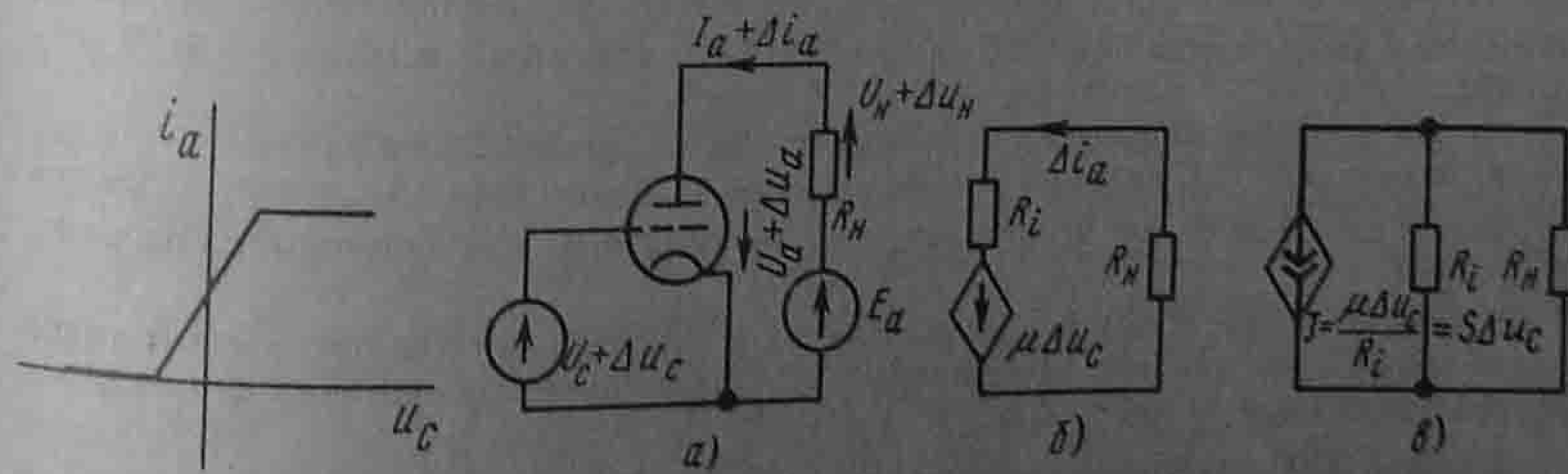



Рис. 15.29

Рис. 15.30

Величину, обратную $g_i$, называют *внутренним сопротивлением лампы* (сопротивление между анодом и катодом):

$$R_i = 1/g_i. \qquad (15.47)$$

Крутизна характеристики лампы $S$ имеет размерность проводимости:

$$S = \left(\frac{\partial I_a}{\partial u_c}\right)_{U_a,\ U_c} \qquad (15.48)$$

Проводимость $g_i$ и крутизна характеристики $S$ зависят от вида характеристик лампы и исходных напряжений $U_a$ и $U_c$. Отношение $S$ к $g_i$ называют *коэффициентом усиления лампы*:

$$\mu = S/g_i. \qquad (15.49)$$

Коэффициент $\mu$ показывает, во сколько раз приращение напряжения между сеткой и катодом $\Delta u_c$ оказывается более эффективным, чем приращение напряжения между анодом и катодом $\Delta u_a$ в отношении получения одинакового приращения анодного тока $\Delta i_a$. С учетом сказанного имеем

$$\Delta u_a = R_i\Delta i_a - \mu\Delta u_c. \qquad (15.50)$$

**§ 15.42. Схема замещения электронной лампы для малых приращений.** На схеме (рис. 15.30, *а*) через $U_н$, $U_a$, $U_c$, $I_a$ обозначены постоянные составляющие напряжений и тока, соответствующие исходному состоянию схемы. Положительные направления для приращений $\Delta u_c$, $\Delta u_a$, $\Delta i_a$ те же, что и для исходных напряжений и токов.

Запишем уравнение для приращений напряжений в анодной цепи, вызванных приращением напряжения $\Delta u_c$ на сетке лампы. С этой целью составим два уравнения по второму закону Кирхгофа для анодной цепи. Одно из них — для режима до получения приращений: $U_a+U_н=E$; другое — для режима после получения приращений: $U_a+\Delta u_a+U_н+\Delta U_н=E$. Если в последнем уравнении $U_a+U_н$ заменить на $E$, то окажется, что

$$\Delta u_a+\Delta u_н=0, \qquad (15.51)$$

где $\Delta u_н$ — приращение напряжения на нагрузке $R_н$.

В уравнение (15.51) вместо $\Delta u_н$ подставим $R_н\Delta i_a$ и вместо $\Delta u_a$ в соответствии с уравнением (15.50) $R_i\Delta i_a-\mu\Delta u_c$. В результате получим

$$(R_н+R_i)\Delta i_a = \mu\Delta u_c. \qquad (15.52)$$

Уравнению (15.52) отвечает схема на рис. 15.30, *б*. В этой схеме к управляемому источнику ЭДС $\mu\Delta u_c$ присоединены нагрузка $R_н$ и внутреннее сопротивление электронной лампы $R_i$. Таким образом, для малых приращений анодную цепь электронной лампы замещают (имитируют) источником ЭДС $\mu\Delta u_c$ и последовательно с ним включенным резистором сопротивлением $R_i$. ЭДС этого источника пропорциональна изменению напряжения на сетке лампы (т. е. это зависимый источник ЭДС; ср. с § 15.35).

На рис. 15.30, *в* изображена другая часто используемая схема замещения. В ней вместо источника ЭДС включены управляемый источник тока $s\Delta u_c$ и шунтирующий его резистор $R_i$ (напомним, что переход от источника ЭДС к источнику тока рассмотрен в § 2.2).

В схемах на рис. 15.30, *б*, *в* не учтены межэлектродные емкости, поэтому такие схемы применимы для относительно низких частот. Схема замещения для высоких частот изображена на рис. 9.3, *б*.

**Пример 154.** Между сеткой и катодом триода 6С2С приложено напряжение $U_c+\Delta u_c = U_c+U_{cm}\sin\omega t = -2+0{,}05\sin\omega t$ (рис. 15.30, *а*). Зависимость $i_a=f(u_a)$ при



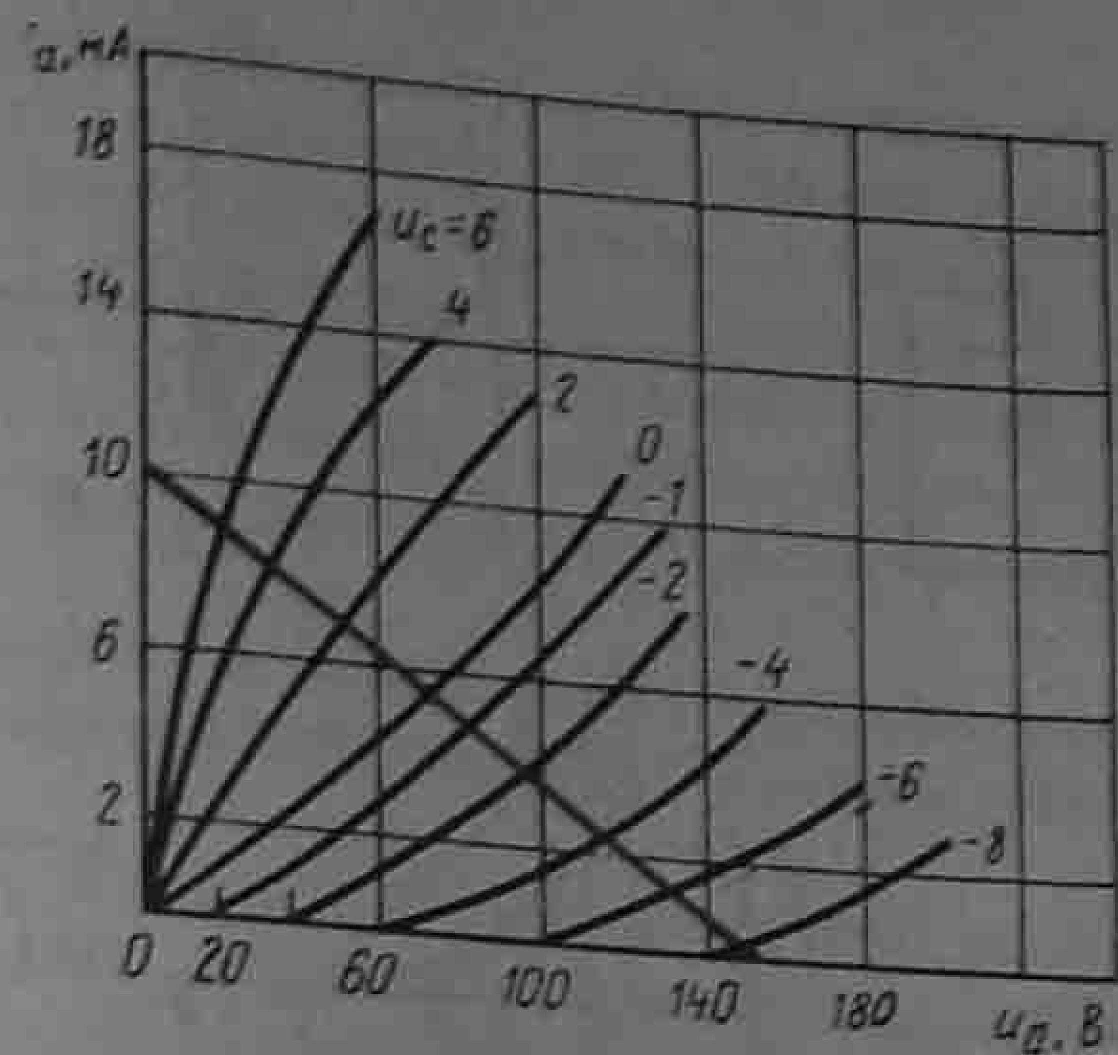



Рис. 15.31

параметре $u_c$ изображена на рис. 15.31, где $E_a=150$ В; $R_н=15$ кОм. Найти параметры схемы замещения триода и определить с помощью этой схемы амплитуду синусоидальной составляющей тока в анодной цепи.

Р е ш е н и е. Определим положение рабочей точки на характеристиках лампы по постоянному току. На рис. 15.31 наносим прямую, характеризующую нагрузочное сопротивление анодной цепи. Ее часто называют нагрузочной прямой. Прямая проходит через точки $i_a=0$, $u_a=150$ В и $i_a=E_a/R_н=10$ мА; $u_a=0$.

Рабочей точкой в рассмотренном режиме будет точка пересечения прямой с той кривой семейства, для которой параметр $U_c=-2$ В. Координаты этой точки: $u_a=94$ В; $i_a=3{,}67$ мА.

По определению [см. формулу (15.46)], для нахождения $g_i$ следует, считая за исходное положение найденную рабочую точку, при неизменном $U_c=-2$ В дать приращение анодному напряжению $\Delta u_a$, найти соответствующее ему приращение анодного тока $\Delta i_a$ и разделить $\Delta i_a$ на $\Delta u_a$:

$$g_i=\partial i_a/\partial u_a\approx\Delta i_a/\Delta u_a = 5\ \text{мА}/50\ \text{В}=10^{-4}\ \text{См};\ R_i=1/g_i=10^4\ \text{Ом}.$$

Проводимость $g_i$ пропорциональна тангенсу угла наклона касательной в рабочей точке к кривой $i_a=f(u_a)$, для которой $U_c=-2$ В.

Для определения крутизны характеристики $S$ при $u_a=94$ В даем приращение сеточному напряжению $\Delta u_c=-1-(-2)=1$ В и из рисунка находим соответствующее ему приращение $\Delta i_a=4{,}67-3{,}67=1$ мА. Следовательно, $S=\partial i_a/\partial u_c\approx\Delta i_a/\Delta u_c=10^{-3}$ А/В. Коэффициент усиления $\mu=S/g_i=10$. Амплитуда синусоидальной составляющей тока в анодной цепи, согласно (15.52),

$$I_{1m}=\frac{\mu U_{cm}}{R_н+R_i}=2\cdot10^{-5}\ \text{А}.$$

Анодный ток $i_a=3{,}67+0{,}02\sin\omega t$ мА.

**§ 15.43. Тиристор — управляемый полупроводниковый диод.** На рис. 15.32, *а* изображена простейшая схема включения тиристора. *Тиристор* — это четырехслойный полупроводниковый прибор с тремя *p-n*-переходами (*1*, *2*, *3*). Напряжения на них обозначены $u_1$, $u_2$, $u_3$. ВАХ *p-n*-переходов *1* и *3* изображены на рис. 15.32, *б*, ВАХ перехода *2* — на рис. 15.32, *в* (включен встречно *p-n*-переходам *1* и *3*). При $u_2=u_{заж}$ в переходе *2* происходит лавинная ионизация (пунктир

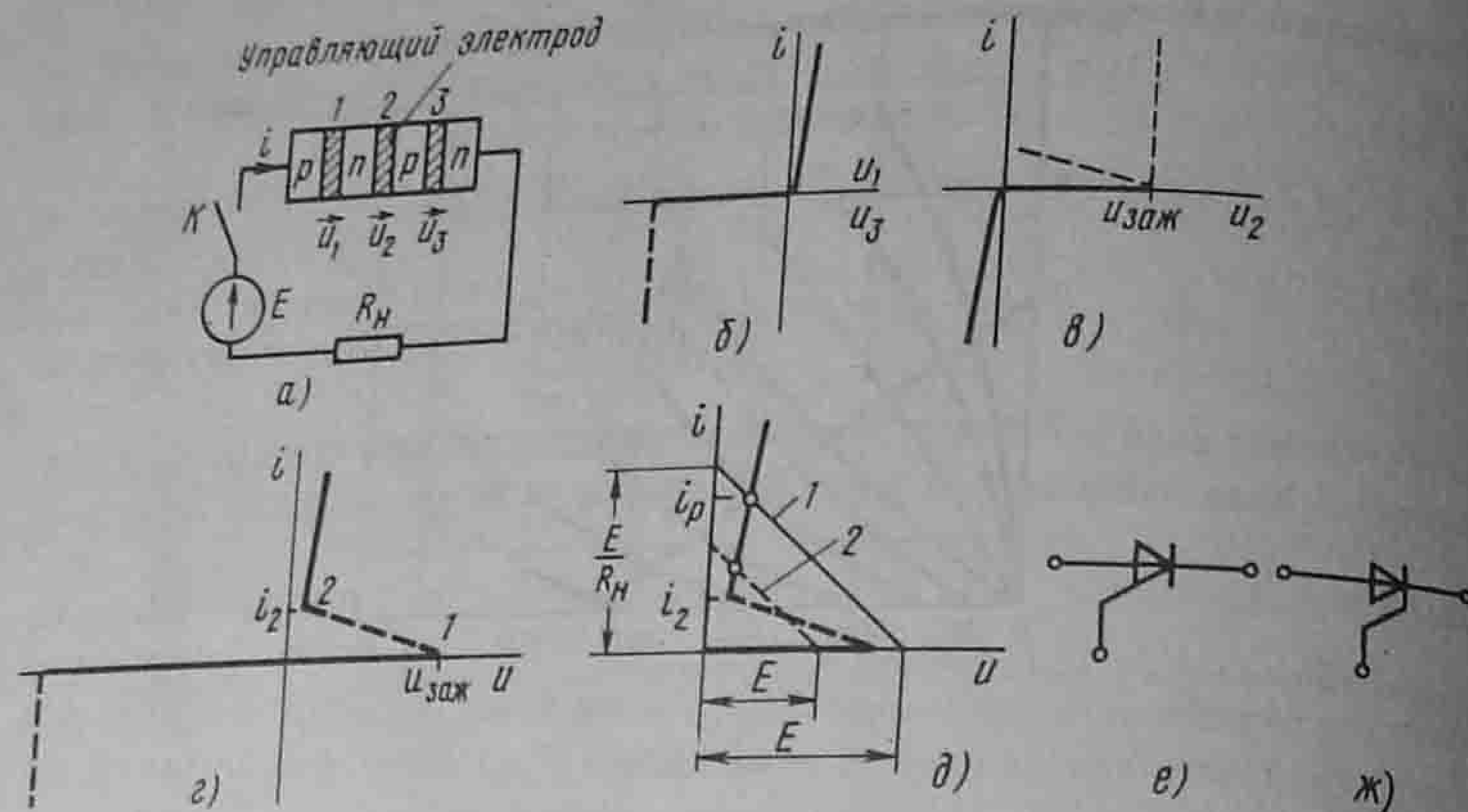



Рис. 15.32

на рис. 15.32, *в*). Суммарная ВАХ трех переходов $i=f(u)$, т. е. ВАХ всего тиристора, изображена на рис. 15.32, *г*. Она получена сложением абсцисс (рис. 15.32, *в*) и двух абсцисс (рис. 15.32, *б*). Участок *1—2* на ней соответствует участку лавинной ионизации второго *p-n*-перехода.

Если при замкнутом ключе *K* (рис. 15.32, *а*) ЭДС *E* станет немного больше $u_{заж}$, тиристор зажжется, т. е. перейдет в открытое состояние. Ток в цепи станет равным току $i_р$ на рис. 15.32, *д*. Прямую *1* (рис. 15.32, *д*) называют нагрузочной. Для погашения тиристора необходимо, чтобы ток через него уменьшился до $i<i_2$ (рис. 15.32, *г*). До сих пор рассматривалась работа тиристора при отсутствии управляющего сигнала (так работает динистор). При воздействии управляющего сигнала (импульса тока или напряжения) на управляющий электрод (расположенный вблизи *p-n*-перехода *2* на рис. 15.32, *а*) от вспомогательной цепи, не показанной на рис. 15.32, *а*, происходит лавинная ионизация *p-n*-перехода *2*. Подавая импульсы управления, можно снижать напряжение зажигания (т. е. зажигать прибор при более низком $u_{заж}$).

Пунктиром на рис. 15.32, *д* показано положение нагрузочной прямой *2* в управляемом тиристоре. Переход от закрытого состояния к открытому происходит за доли микросекунды. Тиристоры выполняют на токи от долей миллиампер до нескольких килоампер. На рис. 15.32, *е*, *ж* показано условное изображение тиристора на схемах: рис. 15.32, *е* соответствует управлению тиристором со стороны анода, рис. 15.32, *ж* — со стороны катода.

**§ 15.44. Общая характеристика методов анализа и расчета нелинейных электрических цепей переменного тока.** Анализ нелиней-



ных явлений и получение числовых соотношений в нелинейных цепях переменного тока является более сложным и трудоемким, чем анализ и расчет линейных электрических цепей.

Как правило, в нелинейных электрических цепях содержатся либо нелинейные индуктивные катушки, либо нелинейные конденсаторы, либо безынерционные в тепловом отношении нелинейные резисторы. Токи и напряжения в таких цепях в той или иной степени несинусоидальны.

Токи и напряжения в большей степени синусоидальны в цепях, содержащих только инерционные в тепловом отношении нелинейные резисторы.

Все методы анализа нелинейных цепей можно подразделить на две большие группы: аналитическую и графическую. Аналитические методы в отличие от графических дают возможность проводить анализ в общем виде, а не только для частных значений параметров.

Недостатком аналитических методов является то, что приходится выражать аналитически характеристики нелинейных элементов, а это всегда связано с некоторой погрешностью. Расчет сколько-нибудь сложных нелинейных электрических цепей переменного тока можно произвести лишь с известной степенью приближения.

Наиболее широко распространены следующие методы анализа и расчета нелинейных цепей переменного тока:

1) графический при использовании характеристик нелинейных элементов для мгновенных значений;

2) аналитический при использовании характеристик нелинейных элементов для мгновенных значений при их кусочно-линейной аппроксимации;

3) аналитический или графический при использовании ВАХ по первым гармоникам;

4) аналитический или графический при использовании ВАХ по действующим значениям несинусоидальных величин;

5) аналитический путем расчета по первой и одной или нескольким высшим или низшим гармоникам;

6) с помощью линейных схем замещения;

7) малого параметра;

8) интегральных уравнений;

9) моделирования.

В дальнейшем кратко охарактеризован каждый метод. Тот или иной метод целесообразно применять в зависимости от характера цепи, формы ВАХ нелинейного элемента, а также от того, какое нелинейное явление в цепи исследуется. Чем сложнее характер нелинейного явления, тем более сложным и громоздким оказывается метод его анализа. И наоборот, анализ грубых нелинейных явлений производится простыми средствами.

**§ 15.45. Графический метод расчета при использовании характеристик нелинейных элементов для мгновенных значений.** Этот ме-

тод применим, как правило, к цепям, в которых известен закон изменения во время какой-либо одной определяющей работу нелинейного элемента величины, например тока, напряжения, заряда.

Последовательность расчета данным методом такова:

1) исходя из физических предпосылок, положенных в основу анализа, полагают известным закон изменения во времени одной из определяющих работу нелинейного элемента величины;

2) используя характеристики (характеристику) нелинейного элемента для мгновенных значений, путем графических построений находят закон изменения во времени второй величины, определяющей работу нелинейного элемента;

3) по результатам п. 2 путем вспомогательных графических построений и простейших расчетов определяют выходную величину и искомое соотношение между параметрами схемы.

Достоинствами метода являются простота и наглядность, а также легкость учета гистерезисных явлений. Примеры см. в § 15.8 и 15.24.

**§ 15.46. Аналитический метод расчета при использовании характеристик нелинейных элементов для мгновенных значений при их кусочно-линейной аппроксимации.** Основой метода является сведение задачи о нахождении периодического решения нелинейных уравнений к определению периодического решения системы линейных уравнений.

Основные этапы метода следующие:

1) замена вольт-амперной (вебер-амперной, кулон-вольтной) характеристики нелинейного элемента для мгновенных значений отрезками прямых линий;

2) подстановка в нелинейные дифференциальные уравнения уравнений прямых п. 1 (этим нелинейные дифференциальные уравнения будут сведены к линейным). Каждому нелинейному уравнению будет соответствовать столько линейных уравнений, сколько отрезков прямых заменяют характеристику нелинейного элемента;

3) решение системы линейных дифференциальных уравнений. Каждому линейному участку характеристики нелинейного элемента будет соответствовать свое решение со своими постоянными интегрирования;

4) определение постоянных интегрирования исходя из согласования решения на одном линейном участке с решением на другом линейном участке.

Наиболее эффективен этот метод, когда характеристику нелинейного элемента с известной степенью приближения можно заменить отрезками прямых, расположенных таким образом, что когда одна величина, определяющая режим работы нелинейного элемента, например ток, меняется, то другая, например потокосцепление, неизменна.

Еще более эффективен метод, если отрезки прямых, заменяющие ВАХ нелинейного элемента, могут быть взяты совпадающими с осями координат. Пример решения задачи для этого случая см. в § 15.51 — 15.53.



**§ 15.47. Аналитический (графический) метод расчета по первым гармоникам токов и напряжений.** В этом методе по сложному закону изменяющиеся токи и напряжения на нелинейном элементе заменяют их первыми гармониками. В расчете используют ВАХ по первым гармоникам в аналитической форме или в виде графической зависимости.

Основные этапы расчета в аналитическом варианте:

1) выражают аналитически ВАХ нелинейного элемента для мгновенных значений;

2) путем подстановки в нее первой гармоники напряжения или тока получают формулу, которая дает нелинейную связь между амплитудой первой гармоники тока через нелинейный элемент и амплитудой первой гармоники напряжения на нем [в качестве примера такой связи можно назвать формулу (15.19)];

3) в уравнение, составленное для исследуемой цепи по второму закону Кирхгофа, подставляют вместо мгновенных значений тока и напряжения на нелинейном элементе мгновенные значения их первых гармоник, а высшими гармониками пренебрегают;

4) уравнение разбивают на два уравнения: одно из них выражает собой равенство коэффициентов при синусных слагаемых левой и правой частей уравнения, другое — равенство коэффициентов при косинусных слагаемых обеих частей уравнения;

5) совместно решают эти два уравнения.

Основные этапы расчета в графическом варианте:

1) в качестве зависимости между амплитудой первой гармоники напряжения на нелинейном элементе и амплитудой первой гармоники тока через него берется нелинейная зависимость в виде графика. Эта зависимость может быть получена любым путем, в том числе и опытным;

2) произвольно задаются амплитудой $I_{1m}$ первой гармоники тока через нелинейный элемент, из графика находят соответствующую ей амплитуду первой гармоники напряжения на нем и затем путем построения векторной диаграммы по первой гармонике для всей схемы определяют амплитуду $U_{1m}$ первой гармоники напряжения на входе схемы. Построение векторной диаграммы производится так же, как и для обычных линейных цепей синусоидального тока, а именно: если не учитывать потери в сердечнике, то первая гармоника напряжения на нелинейной индуктивной катушке опережает первую гармонику протекающего через нее тока на 90°, первая гармоника напряжения на нелинейном конденсаторе отстает от протекающего через него тока на 90°, первые гармоники напряжения и тока на нелинейном резисторе по фазе совпадают;

3) путем построения нескольких векторных диаграмм для раз-

личных значений $I_{1m}$ находят соответствующие им $U_{1m}$ и строят ВАХ всей схемы $U_{1m} = f(I_{1m})$.

Данный метод позволяет рассматривать такие нелинейные явления, как преобразование постоянного тока в переменный и обратное преобразование, явление резонанса на основной гармонике, триггерный эффект на первой гармонике, некоторые типы автомодуляционных процессов. Но он не позволяет исследовать более сложные явления, как, например, резонанс на высших, низших или дробных гармониках и др.

Если пользоваться аналитическим вариантом этого метода, то решение можно получить в общем виде, что существенно, так как становится возможным исследовать решение при изменении любого из параметров цепи. Этот метод будет применен для анализа работы автогенератора (см. § 15.54) и для анализа работы разветвленной цепи с нелинейной индуктивной катушкой (см. пример 159).

**§ 15.48. Анализ нелинейных цепей переменного тока путем использования ВАХ для действующих значений.** В этом случае графический расчет проводят путем использования ВАХ нелинейных элементов для действующих значений, полученных расчетным или опытным путем.

При этом полагают, что в действительности несинусоидально изменяющиеся токи и напряжения могут быть заменены эквивалентными им синусоидальными величинами (эквивалентность в смысле действующего значения).

Все этапы расчета рассматриваемым методом полностью совпадают с перечисленными в § 15.47 этапами графического расчета методом первой гармоники. Отличие между методами состоит только в том, что в данном случае используется ВАХ не для первых гармоник, а для действующих значений.

Метод применен в дальнейшем для исследования простейших явлений в феррорезонансных цепях (см. § 15.57 — 15.62).

Если исследуют нерезонансные электрические цепи или резонансные, но для которых по тем или иным соображениям заранее известно, что в изучаемых режимах работы в них не могут возникать резонансные явления на высших и низших гармониках, то амплитуда первой гармоники тока, как правило, оказывается больше амплитуд высших гармоник тока. При этом действующее значение тока в цепи сравнительно мало отличается от действующего значения первой гармоники тока.

Чтобы убедиться в этом, рассмотрим следующий пример: пусть ток в цепи содержит первую и третью гармоники и действующее значение третьей гармоники тока составляет 40 % от действующего значения первой гармоники ($I_3 = 0{,}4 I_1$). Действующее значение несинусоидального тока будет $\sqrt{I_1^2 + I_3^2} = 1{,}075 I_1$, т. е. всего на 7,5 % больше действующего значения первой гармоники $I_1$.

Метод позволяет изучать некоторые свойства нерезонансных



электрических цепей, как, например, эффект усиления мощности. Для исследования свойств резонансных нелинейных цепей метод пригоден в ограниченной степени. Так, им можно приближенно исследовать простейший триггерный эффект (см. § 15.59), но нельзя, например, исследовать резонансные явления на высших гармониках.

**§ 15.49. Аналитический метод расчета цепей по первой и одной или нескольким высшим или низшим гармоникам.** Основные этапы расчета следующие: 1) составляют систему дифференциальных уравнений цепи; 2) аналитически выражают характеристики нелинейных элементов и полученные выражения подставляют в дифференциальные уравнения цепи.

Искомую величину выражают в виде ряда, состоящего из первой и одной или нескольких высших или низших гармоник, например в виде

$$x = x_{1m}\sin\omega t + x_{3m}\sin(3\omega t + \psi_3).$$

Предполагаемое решение подставляют в уравнение системы. В результате этой подстановки оказывается возможным разбить уравнения системы на несколько трансцендентных алгебраических уравнений, составленных относительно амплитуды первой гармоники, амплитуд высших (соответственно низших) гармоник и их фаз.

Число трансцендентных уравнений в общем случае в два раза больше числа учитываемых гармоник, поскольку для каждой из гармоник уравнение разбивается на два уравнения для синусной и косинусной составляющих.

Далее совместно решают систему трансцендентных уравнений. Трудность состоит в том, что каждое из трансцендентных уравнений обычно содержит все неизвестные. Поэтому при решении часто используют метод последовательных приближений. Решение облегчается, если учесть последний абзац § 15.62.

Расчет этим методом, как правило, громоздок. Однако метод позволяет исследовать такие сложные явления в нелинейных цепях, как резонанс на высших, низших и дробных гармониках и т. п.

Рассматриваемый метод в литературе называют также *методом гармонического баланса*. Частным случаем его является метод первой гармоники (см. § 15.47).

**§ 15.50. Расчет цепей с помощью линейных схем замещения.** Этот метод применим к расчету нелинейных электрических цепей, на которые воздействуют постоянные и синусоидально изменяющиеся ЭДС, если переменные составляющие токов и напряжений относительно малы, например во много раз меньше соответственно постоянных составляющих токов и напряжений.

Последовательность расчета такова:

1) определяют положение рабочей точки на характеристике нелинейного элемента по постоянному току. В окрестности этой точки будет перемещаться изображающая точка под воздействием малой переменной ЭДС;

2) через рабочую точку по постоянному току проводят касательную к характеристике нелинейного элемента и производят замену участка его характеристики отрезком касательной;

3) составляют линейную схему замещения для расчета переменной составляющей. Вид схемы зависит от характера нелинейного элемента, а ее параметры — от тангенса угла, составленного касательной к характеристике и одной из осей координат.

ЭВМ применяют для: а) табулирования решений систем трансцендентных уравнений и систем алгебраических уравнений высоких степеней; б) табулирования решений, выраженных в виде медленно сходящихся рядов; в) интегрирования систем линейных дифференциальных уравнений, к которым сводятся нелинейные дифференциальные уравнения при кусочно-линейной аппроксимации характеристик нелинейных элементов; г) численного интегрирования нелинейных дифференциальных уравнений, в которых ВАХ нелинейных элементов представлены аналитически, а также в некоторых других случаях.

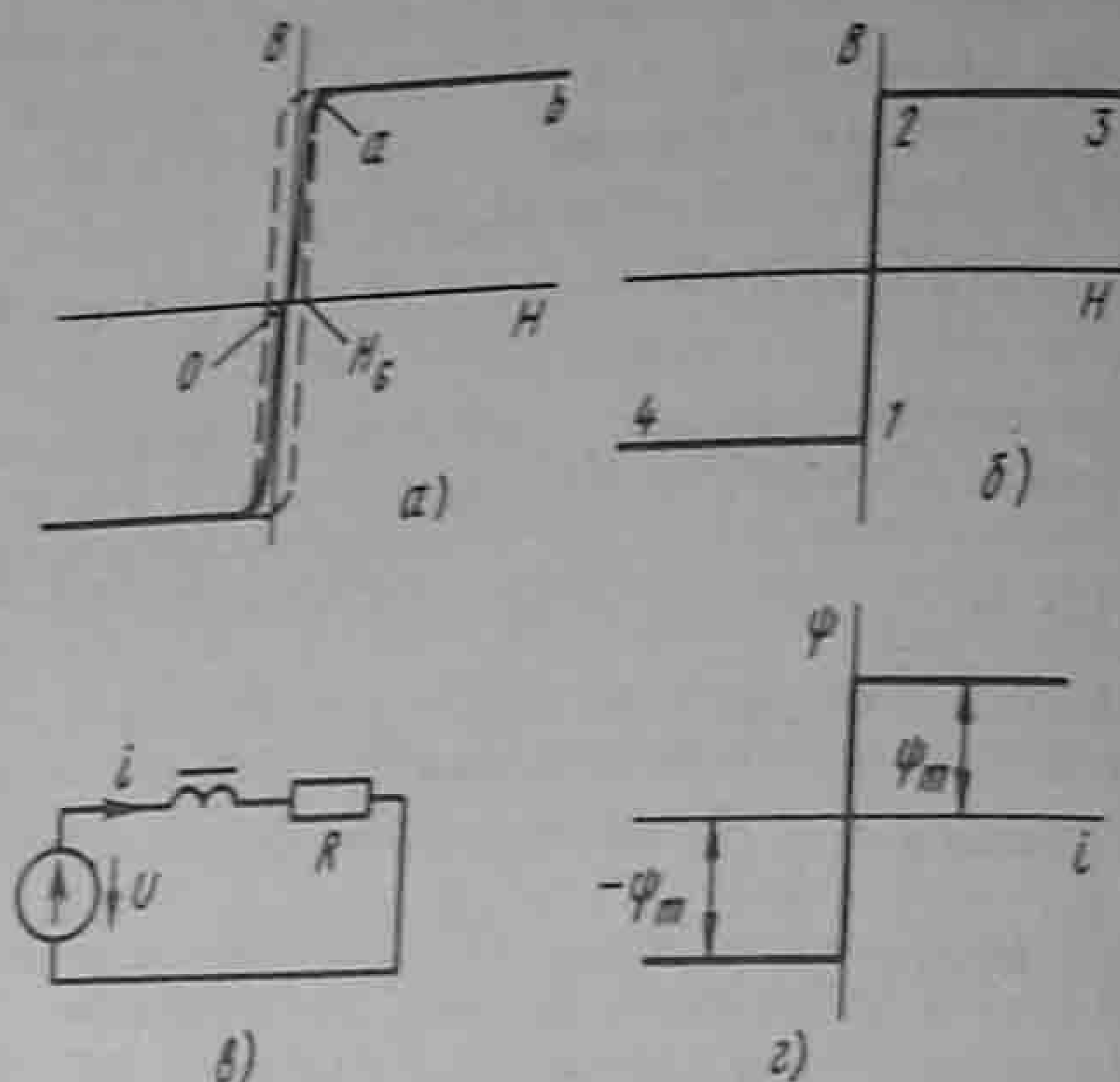



Рис. 15.33

**§ 15.51. Расчет цепей, содержащих индуктивные катушки, сердечники которых имеют почти прямоугольную кривую намагничивания.** Кривые намагничивания некоторых высококачественных магнитомягких материалов, например 65НП, 68НМП и др., близки по форме к прямоугольной: на участке $O - a$ (рис. 15.33, $a$) кривая почти совпадает с осью ординат, а на участке $a - b$ расположена почти параллельно оси абсцисс.

На рис. 15.33, $a$ пунктиром показана предельная петля гистерезиса. Коэрцитивная сила $H_c$ для таких материалов очень мала и составляет 1 — 10 А/м.

Расчет электрических цепей переменного тока, содержащих индуктивные катушки, сердечники которых выполнены из упомянутых магнитных материалов, обычно производят с помощью метода кусочно-линейной аппроксимации (см. § 15.46). Для облегчения расчета кривую намагничивания заменяют идеально прямоугольной (рис. 15.33, $б$). Участки $4 - 1$ и $2 - 3$ параллельны оси абсцисс, а участок $1 - 2$ совпадает с осью ординат.

Если изображающая точка перемещается по участку $1 - 2$, то изменяется только индукция в сердечнике при напряженности поля в сердечнике, почти равной нулю. При движении изображающей точки по участкам $4 - 1$ и $2 - 3$ меняется только напряженность поля $H$, а индукция в сердечнике остается неизменной.

**Пример 155.** Схема (рис. 15.33, $в$) состоит из источника синусоидальной ЭДС $u = e = E_m \sin\omega t$, индуктивной катушки с заданной зависимостью потокосцепления $\psi$ от тока $i$ и резистора сопротивлением $R$. Вывести формулу для определения $\psi$ и $i$ и построить графики изменения $\psi$ и $i$ во времени в установившемся режиме.

Р е ш е н и е. Так как потокосцепление $\psi$ равно произведению индукции в сердечнике $B$ на площадь поперечного сечения сердечника и на число витков обмотки: $\psi = BSw$, а по закону полного тока, ток $i = Hl/w$, т. е. пропорционален напряженности магнитного поля в сердечнике, то зависимость потокосцепления $\psi$ от тока $i$ (рис. 15.33, $г$) качественно такая же, как и зависимость $B = f(H)$ (рис. 15.33, $б$). Имеем



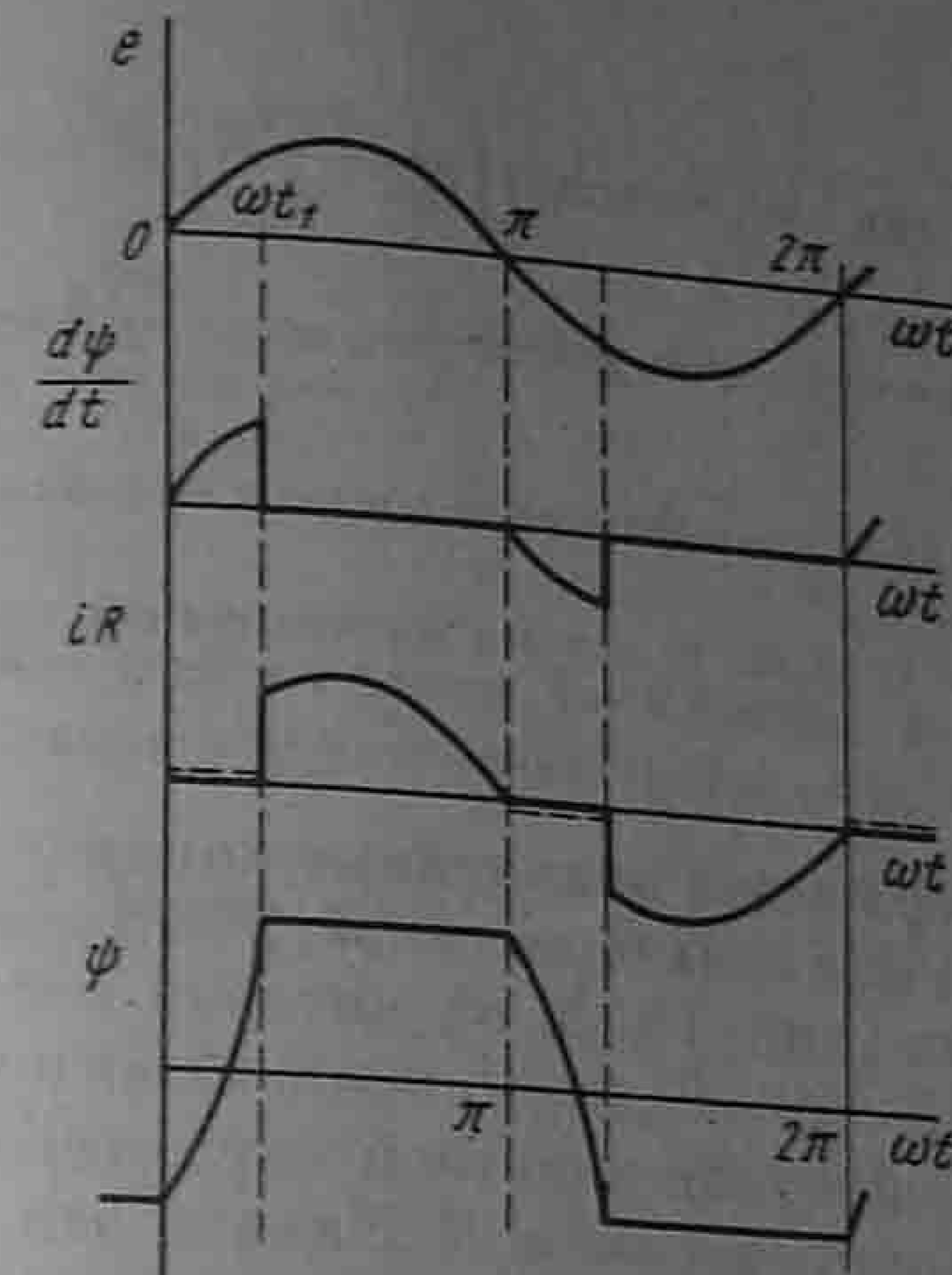



Рис. 15.34

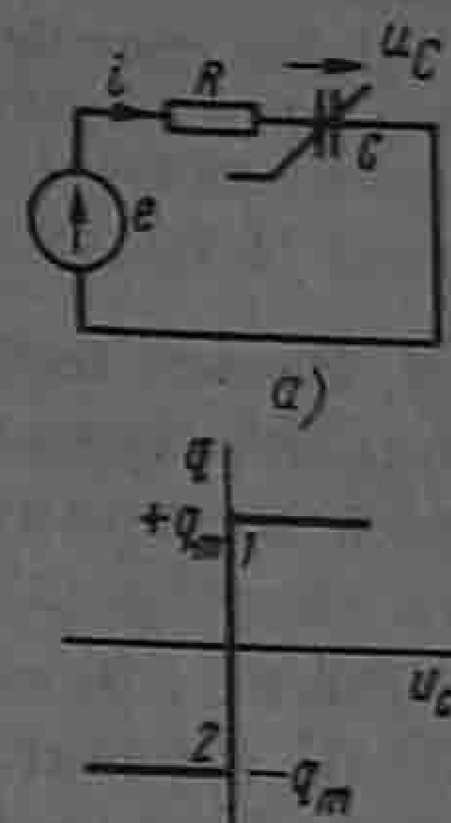



Рис. 15.35

$$\frac{d\psi}{dt} + Ri = E_m \sin\omega t. \tag{15.53}$$

В интервале времени от $\omega t = 0$ до $\omega t = \omega t_1$ (назовем его первым) ток $i = 0$, все напряжение приходится на индуктивную катушку $d\psi/dt = E_m \sin\omega t$ и потокосцепление $\psi$ изменяется от $-\psi_m$ до $+\psi_m$ (изображающая точка на рис. 15.33, $б$ перемещается от $1$ к $2$).

В этом интервале $d\psi = E_m \sin\omega t dt$; следовательно,

$$\psi = -\frac{E_m}{\omega}\cos\omega t + C, \tag{15.54}$$

где $C$ — постоянная интегрирования.

Во втором интервале времени от $\omega t = \omega t_1$ до $\omega t = \pi$ потокосцепление $\psi$ остается постоянным и равным $\psi_m$; $d\psi/dt = 0$; из уравнения (15.33) получим

$$Ri = E_m \sin\omega t, \text{ или } i = \frac{E_m}{R}\sin\omega t. \tag{15.55}$$

Таким образом, во втором интервале времени ток $i$ изменяется по закону синуса, потокосцепление $\psi$ постоянно и равно $\psi_m$. При этом изображающая точка перемещается по участку $2 - 3$ (рис. 15.33, $б$).

Найдем постоянную интегрирования $C$ и значение $\omega t_1$. Для определения $C$ запишем уравнение (15.54) при $\omega t = 0$. Для этого момента времени $\psi = -\psi_m$, поэтому $-\psi_m = E_m/\omega + C$. Отсюда $C = -\psi_m + E_m/\omega$.

Для нахождения $\omega t_1$ воспользуемся также уравнением (15.54), учтя, что при $\omega t = \omega t_1$ $\psi = \psi_m$. Получим

$$\psi_m = -\frac{E_m}{\omega}\cos\omega t_1 - \psi_m + \frac{E_m}{\omega}.$$

Отсюда

$$\cos\omega t_1 = 1 - \frac{2\omega\psi_m}{E_m} \quad \text{или} \quad \omega t_1 = \arccos\left(1 - \frac{2\omega\psi_m}{E_m}\right).$$

Характер изменения тока $i$, потокосцепления $\psi$ и $d\psi / dt$, когда $\frac{\omega\psi_m}{E_m} < 1$, показан на рис. 15.34.

Если амплитуда ЭДС $E_m < \omega\psi_m$, то второго интервала времени не возникнет, т. е. ток $i = 0$ в течение всего периода.

Отметим, что если учитывать гистерезис, то перемагничивание сердечника будет происходить при токе $i \neq 0$. При $d\psi / dt > 0$ $i = i_c$, при $d\psi / dt < 0$ $i = -i_c$ (см. пунктир на рис. 15.34). Ток $i_c$ соответствует коэрцитивной силе $H_c$ (см. рис. 15.33, *а*).

**§ 15.52. Расчет цепей, содержащих нелинейные конденсаторы с прямоугольной кулон-вольтной характеристикой.** Метод расчета рассмотрим на примере цепи (рис. 15.35, *а*), которая состоит из источника синусоидальной ЭДС $e = E_m \sin\omega t$, нелинейного конденсатора с почти прямоугольной кулон-вольтной характеристикой (рис. 15.35, *б*) и резистора сопротивлением $R$. Задача эта близка рассмотренной в § 15.51. По второму закону Кирхгофа, $u_C + R\frac{dq}{dt} = e$. При перезарядке конденсатора изображающая точка движется по участку $2 - 1$ характеристики $q = f(u_C)$; при этом $u_C = 0$. Когда перезарядка закончится, все напряжение источника окажется приложенным к конденсатору. При $t = 0$ $q = -q_m$. Во время перезарядки, когда $u_C = 0$,

$$R\frac{dq}{dt} = E_m \sin\omega t; \; q = -\frac{E_m}{\omega R}\cos\omega t - q_m + \frac{E_m}{\omega R}.$$

К концу перезарядки при $\omega t_1$ $q$ достигает значения $q_m$:

$$\cos\omega t_1 = 1 - \frac{2\omega R q_m}{E_m}.$$

В интервале времени от $\omega t_1$ до $\pi$ $u_C = E_m \sin\omega t$.

Графики $i$, $q$, $u_C$ изображены на рис. 15.36.

Если учесть гистерезис (см. рис. 15.6), то перезарядка конденсатора происходит при напряжении на нем, немного не равном нулю (см. пунктир на рис. 15.36).

**§ 15.53. Выпрямление переменного напряжения.** Под *выпрямлением переменного напряжения* понимают процесс преобразования переменного напряжения в постоянное или пульсирующее. Выпрямление производят с помощью полупроводниковых, ламповых или других типов диодов.

Неуправляемый диод изображают на схемах в виде большой треугольной стрелки с поперечной чертой у острия. Стрелка показывает проводящее направление. Сопротивление диода в проводящем направлении в тысячи раз меньше, чем в непроводящем.



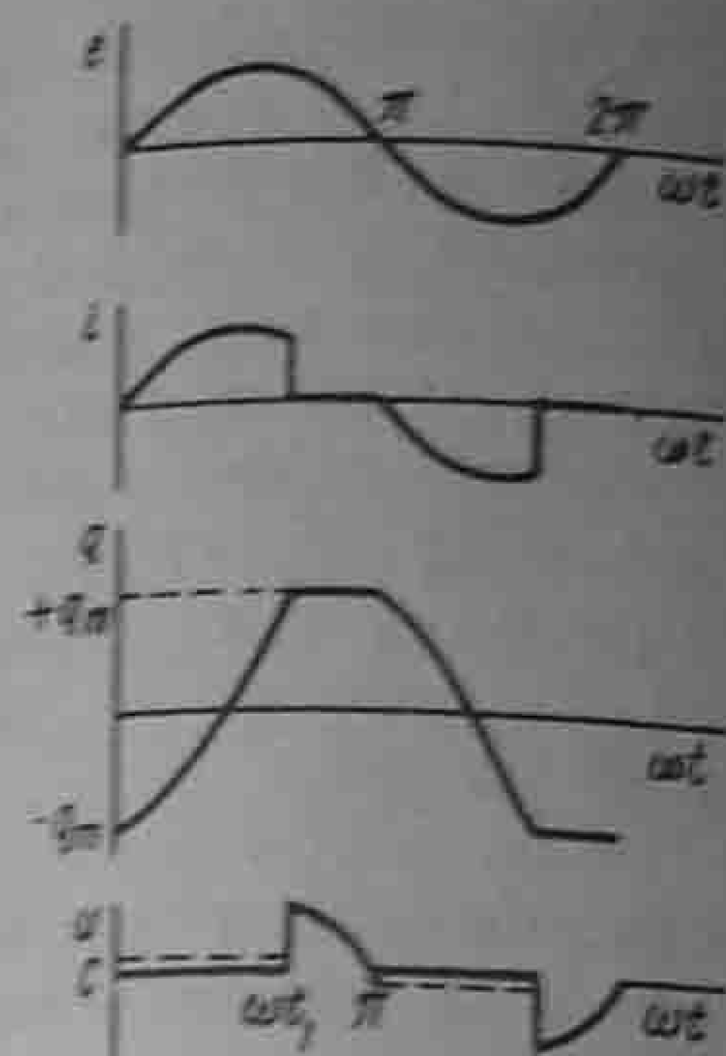



Рис. 15.36

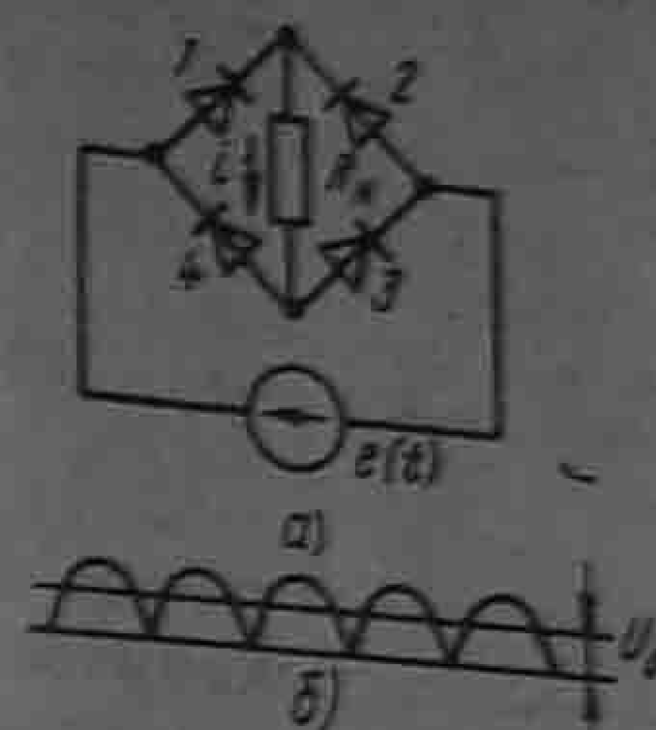



Рис. 15.37

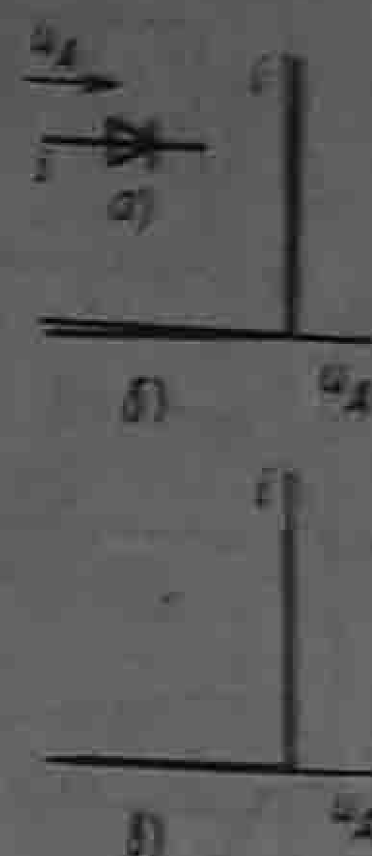



Рис. 15.38

По числу фаз выпрямленного переменного напряжения выпрямительные схемы делятся на одно- и многофазные. Однофазные схемы подразделяют на схемы одно- и двухполупериодного выпрямления.

В однополупериодных схемах выпрямление производится, грубо говоря, в течение одного полупериода питающего напряжения, в двух- полупериодных — в течение обоих полупериодов.

Мостовая схема однофазного двухполупериодного выпрямления представлена на рис. 15.37, *а*. Она состоит из четырех полупроводниковых диодов (*1*, *2*, *3* и *4*), источника выпрямляемого синусоидального напряжения $e(t)$ и нагрузки $R_н$. На рис. 15.38, *а* показаны положительные направления тока $i$ и напряжения $u_д$ на диоде.

На рис. 15.38, *б* изображена ВАХ диода. В целях облегчения анализа вместо нее будем пользоваться идеализированной ВАХ, изображенной на рис. 15.38, *в*.

В соответствии с этой идеализированной характеристикой, когда через диод проходит ток, падение напряжения на нем равно нулю и, следовательно, сопротивление самого диода равно нулю. Когда напряжение на диоде отрицательно (т. е. отрицательна взятая в направлении стрелки рис. 15.38, *а* разность потенциалов на самом диоде), диод не проводит тока ($i = 0$) и сопротивление его равно бесконечности.

*Диод открывается, когда напряжение на нем, увеличиваясь, становится равным нулю, и закрывается, когда ток через него, уменьшаясь, становится равным нулю.*

Рассмотрим работу мостовой схемы (рис. 15.37, *а*). Источник ЭДС включен в одну диагональ этой схемы, а нагрузка $R_н$ — в другую. Диоды работают попарно.

В первый полупериод, когда ЭДС $e(t)$ действует согласно с

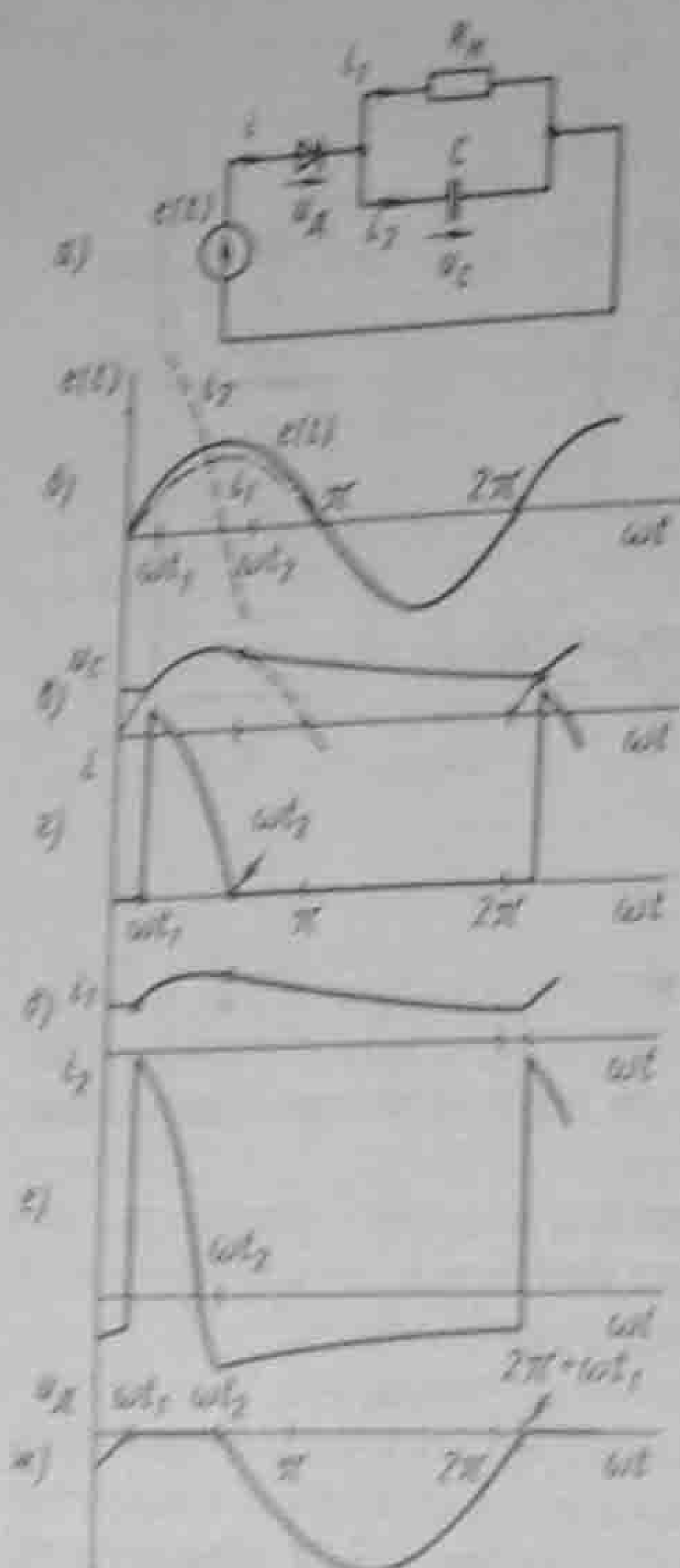


Рис. 15.39

положительным направлением напряжения на диодах *1* и *3*, эти диоды проводят ток, а диоды *2* и *4* тока не проводят. Во второй полупериод, когда ЭДС $e(t)$ изменит знак и действует согласно с положительным направлением напряжения на диодах *2* и *4*, эти диоды проводят ток, а диоды *1* и *3* не проводят. Направление прохождения тока через нагрузку показано на рис. 15.37, *а* стрелкой. Ток через нагрузку протекает все время в одном и том же направлении. Форма напряжения на нагрузке иллюстрируется кривой на рис. 15.37, *б*. Через $U_0$ обозначено среднее значение напряжения на нагрузке.

**Пример. 156**. Рассмотреть работу схемы однополупериодного выпрямления, когда нагрузка $R_н$ шунтирована конденсатором емкостью $C$ (рис. 15.39,*а*).

Решение. По законам Кирхгофа, $u_д + u_C = e(t)$; $u_C = i_1 R_н$; $i = i_1 + i_2$. В соответствии с ВАХ (рис. 15.38, *в*) диод закрыт и сопротивление его теоретически равно бесконечности, когда напряжение на нем $u_д$ отрицательно. Диод открывается в момент $\omega t_1$, когда напряжение на нем $u_д = e(t) - u_c$, увеличиваясь, становится равным нулю. Как только диод откроется, напряжение на конденсаторе становится равным ЭДС $u_c = E_m \sin\omega t$ и ток через конденсатор станет изменяться по закону $i_2 = C\dfrac{du_c}{dt} = \omega C E_m \cos\omega t$ (пунктир на рис. 15.39, *б*), а ток через нагрузку — по закону $i_1 = \dfrac{u_c}{R_н} = \dfrac{E_m}{R_н}\sin\omega t$ (пунктир с точкой на рис. 15.39, *б*). Ток через диод $i = i_1 + i_2 = E_m(\omega C\cdot\cos\omega t + \dfrac{1}{R_н}\sin\omega t)$ (рис. 15.39, *г*) в момент $\omega t_2$ становится равным нулю и диод закрывается; $\operatorname{tg}\omega t_2 = -\omega C R_н$; $\omega t_2 = \operatorname{arctg}(-\omega C R_н)$.

В интервале от $\omega t_2$ до $2\pi + \omega t_1$ конденсатор разряжается на $R_н$ (рис. 15.39, *в*) и напряжение на нем изменяется во времени по показательному закону $u_c = E_m \sin\omega t_2 e^{-\frac{\omega t - \omega t_2}{\omega C R_н}}$; $\omega t > \omega t_2$ (см. гл. 8). При этом $i_1 = u_c / R_н$ (кривые на рис. 15.39, *д*, *е*). Зависимость $u_д(\omega t)$ изображена на рис. 15.39, *ж*. Момент открытия $\omega t_1$ диода определяем из условия $u_c(\omega t_1) = e(\omega t_1)$. Из этого условия получаем трансцендентное уравнение относительно $\omega t_1$:

$$\sin\omega t_2 e^{-\frac{(2\pi + \omega t_1 - \omega t_2)}{\omega C R_н}} = \sin\omega t_1$$



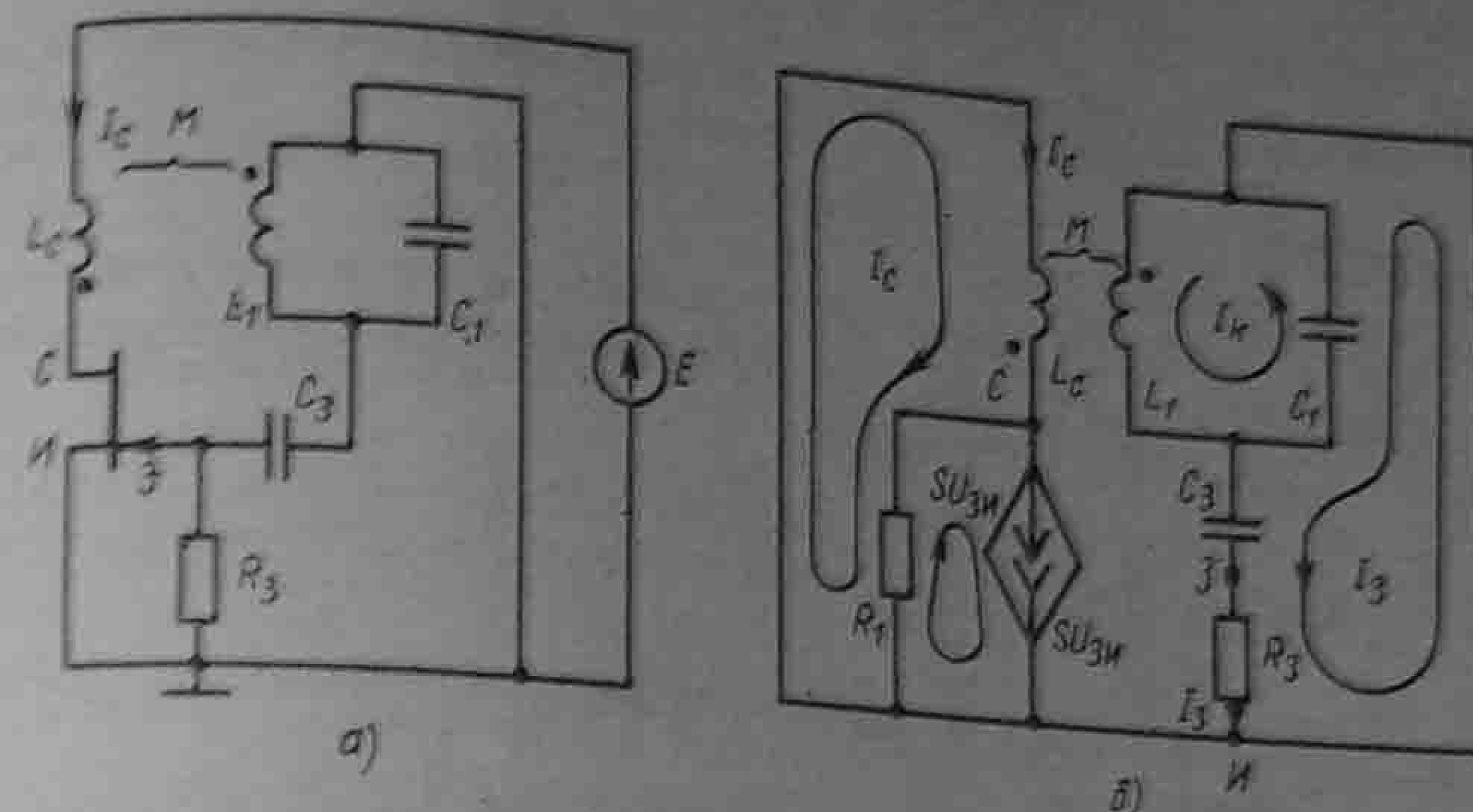


Рис. 15.40

В следующий период процесс повторяется. Чем больше значение $R_н C$ по сравнению с периодом $2\pi/\omega$, тем меньше пульсация напряжения на нагрузке $R_н$.

## § 15.54. Автоколебания.

*Автоколебания* (АК) — это периодические колебания, возникающие в системах, находящихся под воздействием постоянных во времени вынуждающих сил. АК системы подразделяют на почти гармонические (см. § 15.55) и релаксационные (см. § 17.5). АК-система на полевом транзисторе изображена на рис. 15.40, *а*. В ней имеются источник постоянной ЭДС, колебательный контур $L_1$, $C_1$ и взаимная индуктивность $M$ между $L_1$ и $L_c$, за счет которой в системе осуществляется отрицательная обратная связь.

При анализе АК-систем почти гармонического типа требуется выяснить частоту и амплитуду возникающих колебаний и характер возбуждения (мягкий или жесткий). На рис. 15.40, *б* изображена схема замещения для переменных составляющих токов и напряжений. Источник постоянной ЭДС закорочен. Транзистор представлен источником тока $SU_{зи}$, управляемым напряжением $U_{зи}$, и шунтирующим его резистором $R_1$. Составим уравнения по методу контурных токов. В схеме три неизвестных контурных тока $I_c$, $I_к$, $I_з$ и один ток источника тока $SU_{зи}$ ($U_{зи} = I_з R_з$):

$$\begin{aligned} &I_c(R_1 + pL_c) - pMI_к - R_1 S R_з I_з = 0,\\ &-pMI_c + \left(pL_1 + \frac{1}{pC_1}\right)I_к - \frac{1}{pC_1}I_з = 0,\\ &-\frac{1}{pC_1}I_к + \left(R_з + \frac{1}{pC_1} + \frac{1}{pC_з}\right)I_з = 0. \end{aligned} \quad (15.56)$$

При АК токи не равны нулю, это может быть только в том случае, если главный определитель системы (15.56) равен нулю:

$$\Delta(p) = p^4(R_3 kC_1^2 C_{(2)}) + p^3(kC_1^2 + R_1 R_3 L_1 C_1^2 C_{13}) + p^2(R_3 L_c C_1 C_{13} + R_1 L_1 C_1^2 -$$

$$-R_1SR_3MC_1C_{13})+p[R_1R_3C_1C_{13}+L_c(C_1-C_3)]+R_1(C_1-C_{13})=0. \quad (15.57)$$

Здесь $k=L_1L_c-M^2$ и $C_{13}=\dfrac{C_1C_3}{C_1+C_3}$.

В $\Delta(p)$ подставим $p=j\omega$, выделим из него действительную и мнимую части и приравняем их нулю. После деления всех членов уравнения $\mathrm{Re}\Delta(j\omega)=0$ на $R_3C_1^2C_{13}$ получим

$$k\omega^4-\omega^2\left(\frac{L_c}{L_1}+\frac{R_1L_1}{R_3C_{13}}-\frac{R_1SM}{C_1}\right)+\frac{R_1(C_1-C_{13})}{R_3C_1^2C_{13}}=0. \quad (15.58)$$

После деления всех членов уравнения $\mathrm{Im}\Delta(j\omega)=0$ на $C_1^2C_{13}$ и сокращения на $\omega$ имеем

$$\omega^2\left(R_1R_3L+\frac{k}{C_{13}}\right)=\frac{R_1R_3}{C_1}+\frac{L_c}{C_1C_3}.$$

Отсюда

$$\omega=\sqrt{\left(\frac{R_1R_3}{C_1}+\frac{L_c}{C_1C_3}\right)\Big/\left(R_1R_3L_1+\frac{k}{C_{13}}\right)}. \quad (15.59)$$

При весьма больших $R_3$ $\omega=1/\sqrt{L_1C_1}$ и крутизна

$$S=M/(R_1L_1). \quad (15.59а)$$

**§ 15.55. Мягкое и жесткое возбуждение автоколебаний.** Ток стока транзистора $i_c$ является функцией напряжения $u_{зи}$. Эта функция может быть представлена кривой рис. 15.41, *а*, приближенно описываемой зависимостью

$$i_c=i_0+au_{зи}-bu_{зи}^3, \quad (15.60)$$

либо кривой рис. 15.41, *б*, описываемой формулой

$$i_c=i_0+au_{зи}+bu_{зи}^3-cu_{зи}^5. \quad (15.61)$$

При возникновении АК $u_{зи}=U_m\sin\omega t$. Подставим это $u_{зи}$ в (15.60) и (15.61) и определим амплитуду первой гармоники тока $i_c$. Из формулы (15.60) она равна $I_{cm}=aU_m-0{,}75bU_m^3$, а из (15.61) $I_{cm}=aU_m+0{,}75bU_m^3-\frac{5}{8}cU_m^5$.

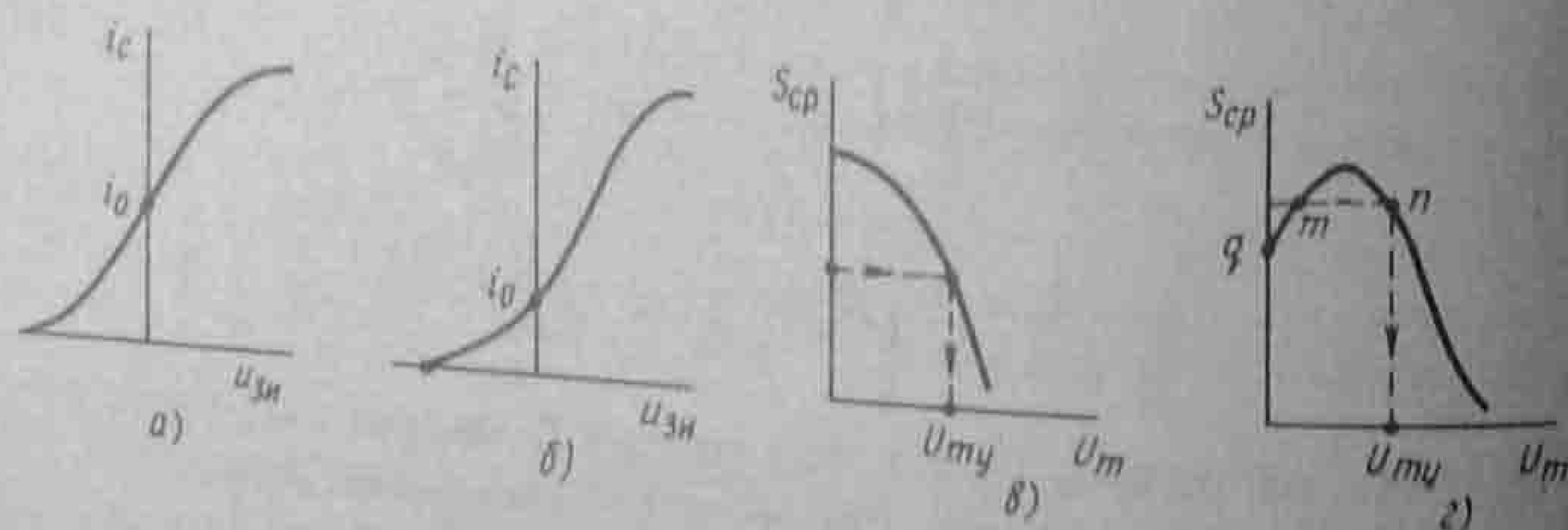



Рис. 15.41



Под средней крутизной по первой гармонике в режиме автоколебаний понимают $S_{ср}=I_{cm}/U_m$. Она выполняет роль крутизны $S$ в формулах (15.58) и (15.59). Для первого случая (рис. 15.41, *в*)

$$S_{ср}=a-0{,}75bU_m^2. \quad (15.62)$$

Для второго (рис. 15.41, *г*)

$$S_{ср}=a+0{,}75bU_m^2-\frac{5}{8}U_m^4. \quad (15.63)$$

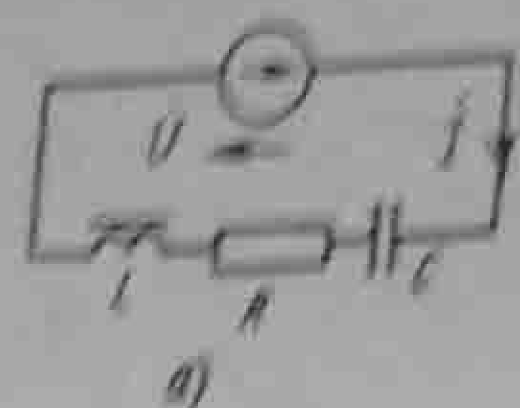
Кривые рис. 15.41, *в*, *г* используем для определения амплитуды $U_m$ возникшего колебания. С этой целью из (15.58) или при $R_3\to\infty$ из $S=\dfrac{M}{R_1L_1}$ определим $S$ и положим его равным $S_{ср}$, а по $S_{ср}$ из кривой рис. 15.41, *в* или *г* найдем $U_m$. В первом случае каждому $S_{ср}$ соответствует одно $U_m$, во втором может соответствовать либо два режима (в области $S_{ср}$ от $q$ до $S_{ср\ max}$ точки $m$ и $n$), либо один режим (при $S_{ср}<q$). Режим работы на левой ветви кривой рис. 15.41, *г* неустойчив, на всей правой ("жирной") ветви — устойчив.

Если $S_{ср}$ определяется кривой рис. 15.41, *в*, то колебания возбуждаются *мягко*, их амплитуда плавно нарастает от сколь угодно малого начального значения флуктуационного происхождения до установившегося $U_{mу}$. Для $S_{ср}$ по рис. 15.41, *г* колебания возбуждаются *жестко* — скачком от нуля до установившегося значения $U_{mу}$.

**§ 15.56. Определение феррорезонансных цепей.** Рассмотрим группу довольно грубых явлений, которые имеют место в цепях, содержащих нелинейную индуктивную катушку и линейный конденсатор. Такие цепи называют *феррорезонансными*. Аналогичные явления имеют место в цепи с линейной индуктивной катушкой и нелинейным конденсатором.

Для анализа этих явлений можно воспользоваться методом первой гармоники (см. § 15.47) или методом расчета по действующим значениям (см. § 15.48). В § 15.58 — 15.61 будет применен метод расчета по действующим значениям. При этом будем пользоваться ВАХ нелинейной индуктивной катушки для действующих значений тока и напряжения. В этом методе в действительности несинусоидальные токи и напряжения заменяют их эквивалентными синусоидальными величинами (эквивалентность в смысле действующего значения по § 7.12).

Когда в § 15.58 — 15.61, 15.64, 15.67 рассматривается сдвиг фаз между током и напряжением на каком-либо элементе схемы, то под ним понимают угол между эквивалентным синусоидальным током и эквивалентным синусоидальным напряжением.



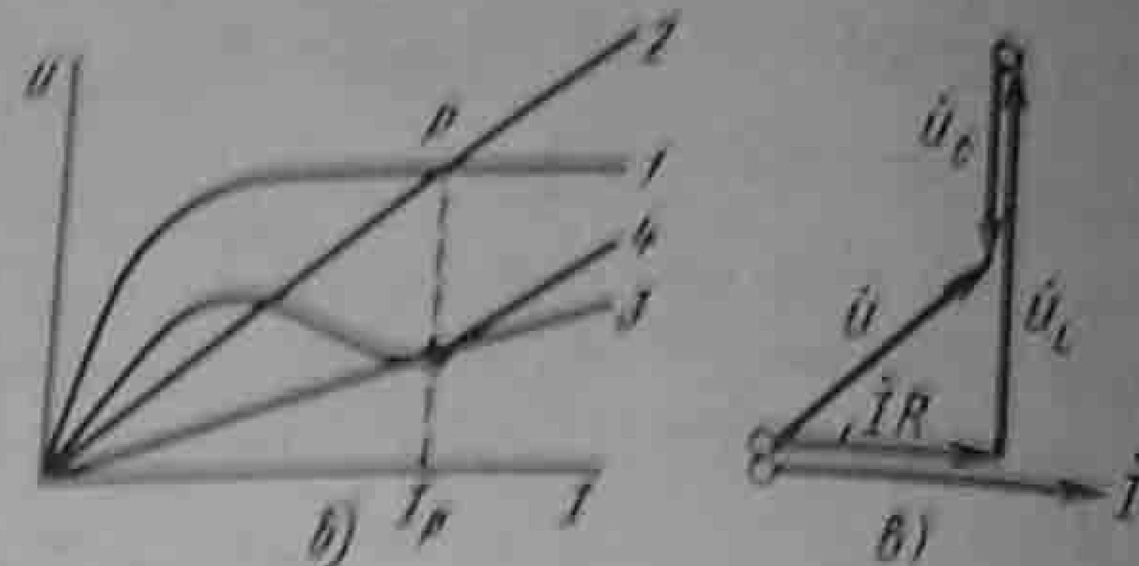




Рис. 15.42

**§ 15.57. Построение ВАХ последовательной феррорезонансной цепи.** В схеме рис. 15.42, *а* последовательно включены нелинейная индуктивная катушка *L*, линейный резистор сопротивлением *R* и линейный конденсатор емкостью *C*. ВАХ катушки со стальным сердечником $U_L = f(I)$ изображается кривой *1* на рис. 15.42, *б*; ВАХ конденсатора $U_C = I\frac{1}{\omega C}$ — прямой *2*; ВАХ резистора $U_R = RI$ — прямой *3*.

Точки, принадлежащие результирующей ВАХ схемы — кривой *4*, получаем следующим образом.

Произвольно задаемся некоторым током *I*, находим для него разность напряжений $U_L - U_C$ (напряжения на индуктивной катушке и на конденсаторе находятся в противофазе) и напряжение $U_R$; результирующее напряжение *U* равно гипотенузе треугольника, построенного на катетах $U_R$ и $U_L - U_C$ (рис. 15.42, *в*).

При сравнительно малом *R* на результирующей ВАХ цепи имеется падающий участок, а сама ВАХ имеет N-образную форму. С увеличением *R* падающий участок на ВАХ исчезает.

**§ 15.58. Триггерный эффект в последовательной феррорезонансной цепи. Феррорезонанс напряжений.** На рис. 15.43, *а* отдельно представлена кривая *4* рис. 15.42, *б*. Будем начиная с нуля плавно увеличивать напряжение источника ЭДС в схеме 15.42, *а*. При этом изображающая точка на рис. 15.43, *а* перемещается от точки *0* через точку *1* к точке *2*. Если напряжение и дальше повышать, то изображающая точка скачком переместится из точки *2* в точку *4*, а затем движение будет происходить по участку *4 — 5*.

При уменьшении напряжения изображающая точка перемещается от точки *5* через *4* к точке *3*, затем произойдет скачок в точку *1* и далее от точки *1* к точке *0*. Таким образом, при увеличении напряжения и достижении им значения $U_2$ в цепи происходит скачкообразное увеличение тока со значения $I_2$ до $I_4$. При этом резко изменяется сдвиг фаз между током в цепи и общим напряжением: в точке *2* ток отстает от напряжения ($U_L > U_C$), в точке *4* ток опережает напряжение ($U_C > U_L$). При плавном уменьшении напряжения источника ЭДС и достижении им значения $U_1$ ток в цепи скачком уменьшается со значения $I_3$ до $I_1$.



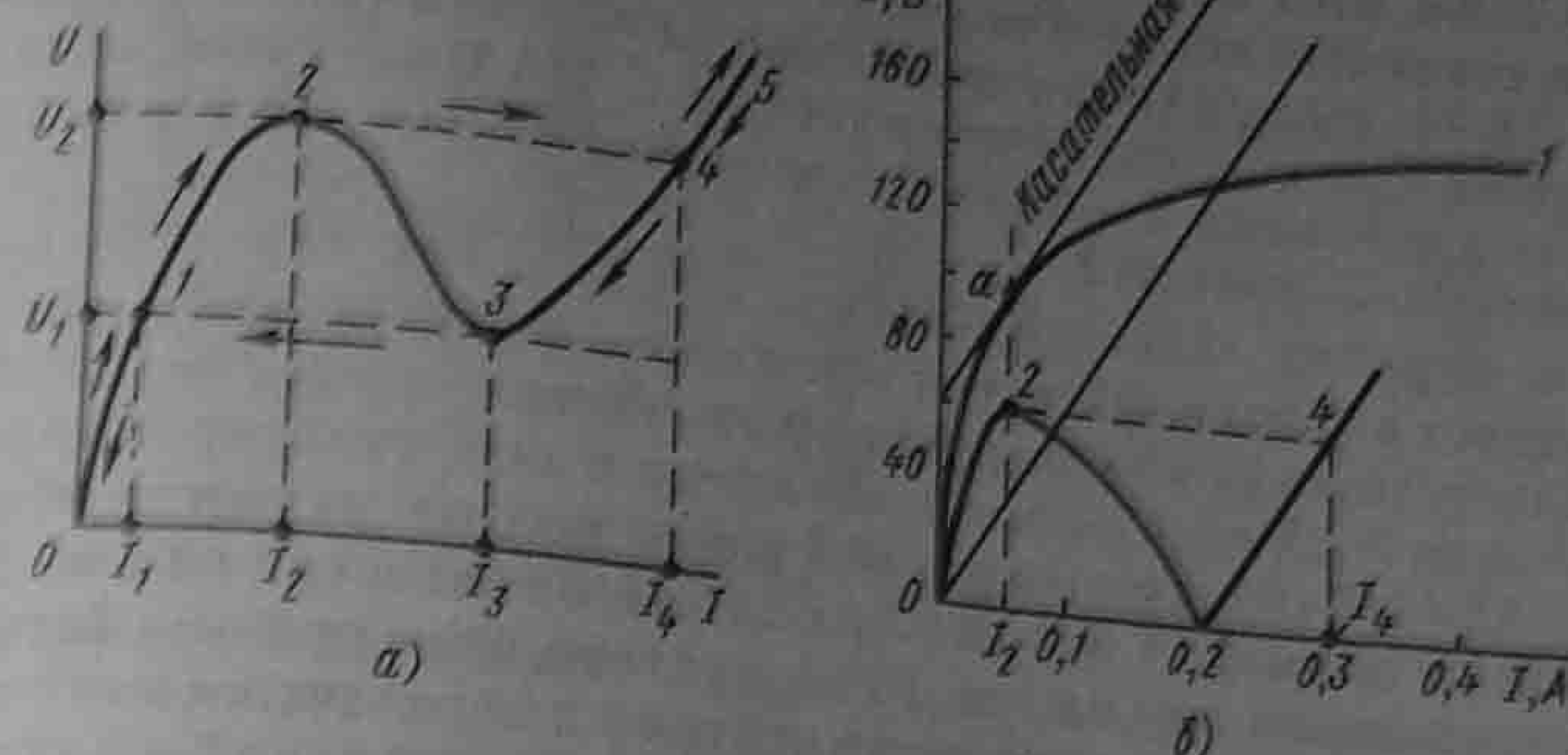



Рис. 15.43

Явление резкого изменения тока в цепи при незначительном изменении напряжения на входе будем называть *триггерным эффектом в последовательной феррорезонансной цепи*.

Если схему рис. 15.42, *а* подключить к источнику напряжения *U*, напряжение которого находится в интервале между $U_1$ и $U_2$, то в схеме установится один из двух возможных режимов. Первый режим соответствует положению рабочей точки на участке между точками *1* и *2*, второй — на участке между точками *3* и *4*.

На каком из двух участков окажется рабочая точка, зависит от характера переходного процесса в цепи при подключении ее к источнику ЭДС.

*Феррорезонансом напряжений* называют режим работы цепи рис. 15.42, *а*, при котором первая гармоника тока в цепи совпадает по фазе с напряжением *U* источника ЭДС. На рис. 15.42, *б* построены ВАХ для действующих значений: феррорезонанс напряжений приблизительно соответствует точке *p* (находится немного левее ее).

Феррорезонанса напряжений можно достичь путем изменения напряжения или частоты источника питания схемы, а также путем изменения емкости и параметров катушки со стальным сердечником.

**Пример 157.** Кривая *1* на рис. 15.43, *б* представляет собой ВАХ нелинейной индуктивной катушки. Полагая $R \to 0$, определить емкость конденсатора, который следует включить последовательно с нелинейной индуктивной катушкой (рис. 15.42, *а*), чтобы триггерный эффект происходил при 60 В. Во сколько раз после скачка $I_4$ будет больше тока до скачка $I_2$, если $\omega = 314 с^{-1}$?

Решение. Из точки $U = 60$ В, $I = 0$ проводим касательную к ВАХ индуктивной катушки. Касание произойдет в точке *а*. ВАХ конденсатора (прямая) должна быть проведена из начала координат параллельно касательной. Тангенс угла наклона ее к оси абсцисс численно равен $1/(\omega C)$.

Из рис. 15.43, *б* находим $1/(\omega C) = 600$ Ом; $C = 10^6/(314 \times 600) = 5{,}32$ мкФ. Ток при скачке изменяется с $I_2 = 0{,}06$ А до $I_4 = 0{,}3$ А; $I_4/I_2 = 5$.

**§ 15.59. ВАХ параллельного соединения конденсатора и катушки со стальным сердечником. Феррорезонанс токов.** В схеме на рис. 15.44, *а* параллельно соединены нелинейная индуктивная катушка $L$ и конденсатор емкостью $C$. ВАХ катушки со стальным сердечником изображена кривой *1* на рис. 15.44, *б*, а конденсатора — прямой *2*.

По первому закону Кирхгофа, $\dot{I}=\dot{I}_C+\dot{I}_L$. Так как токи $\dot{I}_C$ и $\dot{I}_L$ находятся в противофазе, то точке $p$ пересечения кривой *1* и прямой *2* соответствует режим феррорезонанса токов — ток $I=0$. Результирующая ВАХ всей схемы изображена в виде пунктирной кривой *3* рис. 15.44, *б* (абсциссы кривой *3* равны модулю разности абсцисс кривой *1* и прямой *2*). Кривая *3* рис. 15.44, *б* повторена на рис. 15.44, *в* с тем отличием, что на рис. 15.44, *в* учтено, что в режиме феррорезонанса токов (точка $d$ на рисунке) ток $I$ в неразветвленной части схемы до нуля не снижается за счет высших гармоник и активной составляющей первой гармоники в токе $I_L$.

**§ 15.60. Триггерный эффект в параллельной феррорезонансной цепи.** Если схему (рис. 15.44, *а*) питать от *источника напряжения*, плавно увеличивая напряжение этого источника при неизменной частоте, то изображающая точка пройдет без скачков по всем участкам ВАХ схемы. Если же схему питать от *источника тока*, то при плавном увеличении тока этого источника и неизменной угловой частоте $\omega$ изображающая точка будет сначала перемещаться по участку $0-e-a$, затем произойдет скачок из $a$ в $b$, после этого движение будет происходить по участку $b-c$. При последующем плавном уменьшении тока движение будет происходить от $c$ через $b$ к $d$, затем произойдет скачок из $d$ в $e$ и далее от $e$ к 0. Обратим внимание на то, что режим феррорезонанса токов в схеме (рис. 15.44, *а*) и режим феррорезонанса напряжений в схеме (рис. 15.42, *а*) могут быть достигнуты изменением входного напряжения $U$ при фиксированных угловой частоте $\omega$, емкости $C$ и неизменной ВАХ катушки со стальным сердечником.

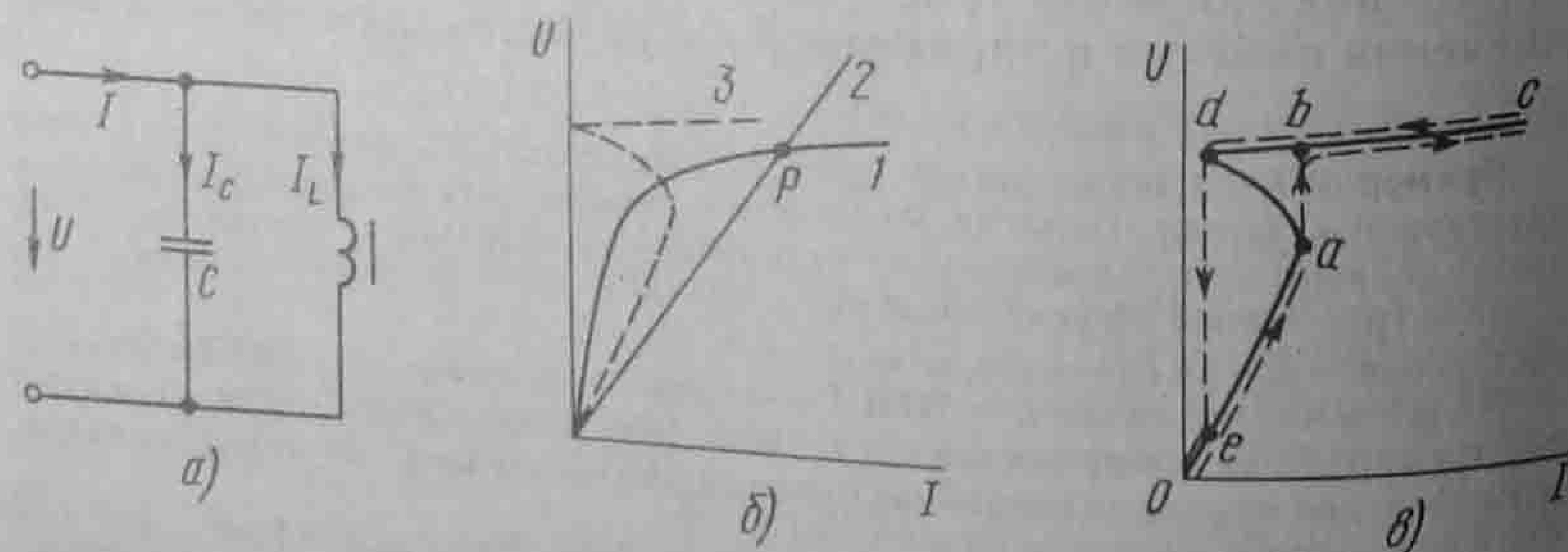



Рис. 15.44



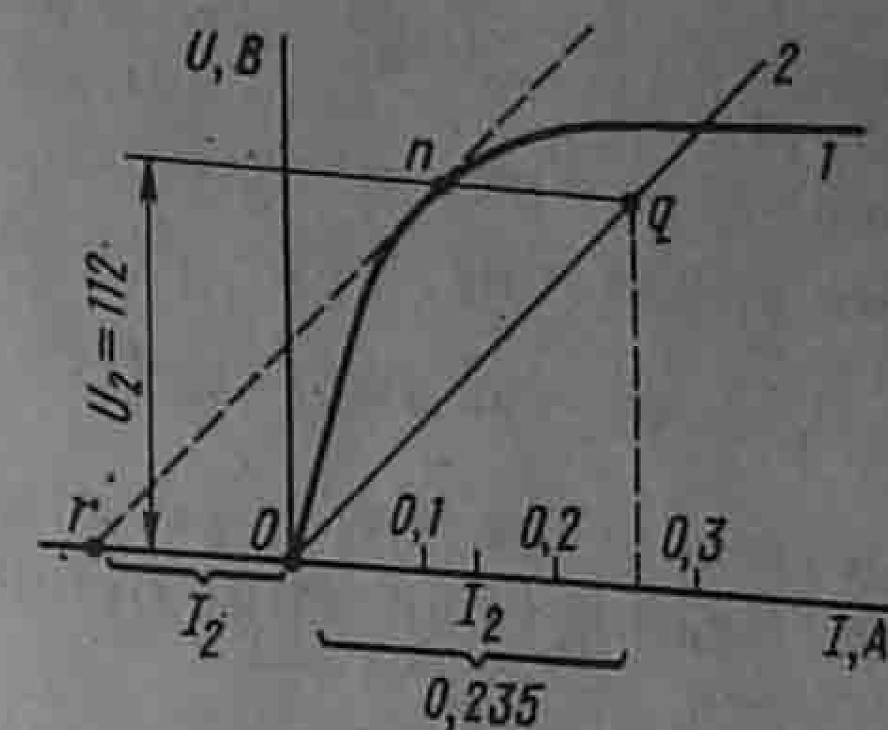



Рис. 15.45

**Пример 158.** ВАХ катушки со стальным сердечником в схеме на рис. 15.44, *а* изображена в виде кривой *1* на рис. 15.45. Пренебрегая резистивным сопротивлением и высшими гармониками, определить емкость конденсатора $C$, который нужно включить в схеме на рис. 15.44, *а*, чтобы триггерный эффект имел место при токе $I_2=0{,}15$ А; $\omega=314\,\text{с}^{-1}$.

Решение. На рис. 15.45 откладываем значение тока $I_2$ влево от точки $O$; получаем точку $r$. Из нее проводим пунктиром касательную к кривой *1* в точке $n$. Через точку $n$ проводим горизонталь. Ордината ее равна напряжению $U_2=112$ В, при котором произойдет триггерный скачок. Из точки $O$ проводим прямую *2*, параллельную касательной $rn$. Прямая *2* представляет собой ВАХ конденсатора. Абсцисса точки $q$ (0,235 А) равна току через конденсатор при напряжении $U_2$. Следовательно, $1/(\omega C)=112/0{,}235=478$ Ом; $C=6{,}68$ мкФ.

**§ 15.61. Частотные характеристики нелинейных цепей.** Под *амплитудно-частотной характеристикой* (АЧХ) понимают зависимость амплитуды какой-либо величины, определяющей работу нелинейного элемента, от изменения угловой частоты $\omega$ при неизменной амплитуде внешнего воздействия.

*Фазочастотная характеристика* (ФЧХ) — зависимость фазы этой величины от $\omega$ при неизменной амплитуде и фазе внешнего воздействия. В отличие от линейных цепей формы АЧХ и ФЧХ нелинейных цепей зависят от амплитуды внешнего воздействия, т. е. можно рассматривать семейства АЧХ и ФЧХ, для которых амплитуда внешнего воздействия является параметром.

Построим АЧХ цепи (рис. 15.46, *а*), полагая, что вебер-амперная характеристика нелинейной индуктивной катушки описывается уравнением $i_2=\alpha\psi^3$, ток источника тока $j_k=I_m\sin\omega t$, $I_m=\text{const}$, $\omega=\text{var}$, $R=0$.

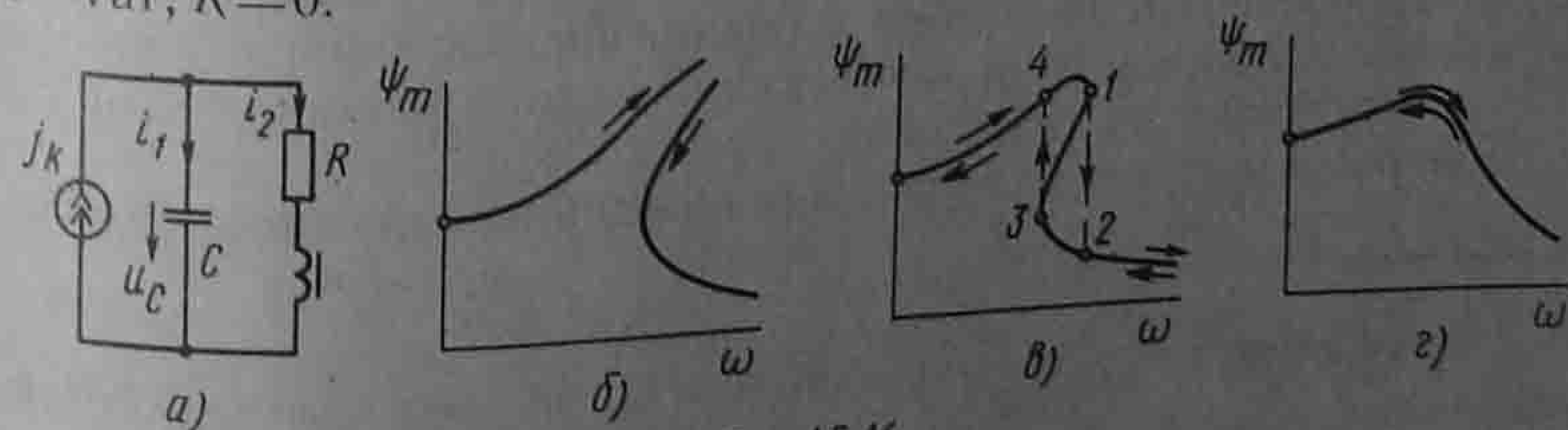



Рис. 15.46

В уравнении $i_1+i_2=j_k$ подставим $i_1=C\frac{du_c}{dt}=C\frac{d^2\psi}{dt^2}$ и $i_2=\alpha\psi^3$. Примем $\psi=\psi_m\sin\omega t$ и в токе $i_2$ удержим[1] только первую гармонику $0,75\alpha\psi_m^3\sin\omega t$. Получим уравнение, в которое входят $\omega$ и $\psi_m$:

$$0,75\alpha\psi_m^3-\omega^2C\psi_m=\pm I_m.$$

Плюс в правой части соответствует режиму до резонанса, минус — после резонанса. Решим уравнение относительно $\omega$:

$$\omega=\sqrt{\frac{3}{4}\frac{\alpha\psi_m^2}{C}\mp\frac{I_m}{C\psi_m}}.$$

При построении зависимости $\psi_m(\omega)$ учтем, что угловая частота $\omega\geqslant0$ и действительна, а также что при $x\ll1$ $\sqrt{1\pm x}\approx1\pm0,5x$.

Если $\omega=0$, то $\psi_m=\sqrt[3]{4I_m/(3\alpha)}$. При $0,75\alpha\psi_m^3\gg I_m$

$$\omega\approx\psi_m\sqrt{\frac{3}{4}\frac{\alpha}{C}}\left(1\mp\frac{2}{3}\frac{I_m}{\alpha\psi_m^3}\right),$$

при $I_m>0,75\alpha\psi_m^3$

$$\omega\approx\sqrt{\frac{I_m}{C\psi_m}}\left(1+\frac{3}{8}\frac{\alpha\psi_m^3}{I_m}\right).$$

Характер зависимости $\psi_m(\omega)$ показан на рис. 15.46, *б*. Если не учитывать резистивное сопротивление $R$ второй ветви, то $\psi_m$ теоретически могла бы возрастать до бесконечности. С учетом небольшого $R$ этой ветви зависимость $\psi_m(\omega)$ имеет $N$-форму (рис. 15.46, *в*).

При плавном увеличении $\omega$ имеет место скачок из точки *1* в точку *2*; при последующем плавном уменьшении $\omega$ — скачок из точки *3* в точку *4*. При значительном $R$ зависимость $\psi_m(\omega)$ приобретает вид кривой на рис. 15.46, *г*.

**§ 15.62. Применение символического метода для расчета нелинейных цепей. Построение векторных и топографических диаграмм.** В § 15.56 — 15.61 были рассмотрены некоторые явления, которые анализировались графически с помощью ВАХ, по действующим значениям или по первым гармоникам. Приближенное исследование режимов работы сложных разветвленных нелинейных цепей переменного тока, особенно когда высшие гармоники выражены слабо, часто производят путем построения векторных или топографических диаграмм.

Диаграммы строят отдельно для каждой из гармоник. Построения производят в принципе так же, как и для линейных цепей (см. § 3.18). Отличие состоит в том, что зависимость первой гармоники напряжения на нелинейном элементе от первой гармоники тока через него является нелинейной и берется из графика или ее подсчитывают, пользуясь аналитическим выражением.

[1] $i_2=\alpha(\psi_m\sin\omega t)^3=\alpha\frac{3}{4}\psi_m^3\sin\omega t-\alpha0,25\psi_m^3\sin\omega t$, так как $\sin^3\beta=0,75\sin\beta-0,25\sin3\beta$.



Если не учитывать потери в ферромагнитном сердечнике и потери от высших гармоник тока, то первая гармоника напряжения на нелинейной индуктивной катушке по фазе на 90° опережает первую гармонику тока через нее. Если же учитывать потери в стали сердечника и (или) потери в резистивных сопротивлениях цепи от высших гармоник тока, то этот угол меньше 90° (см., например, рис. 15.49, *в*). Аналогично, если не учитывать наличие потерь в сегнетодиэлектрике и потерь в цепи от высших гармоник тока, то первая гармоника напряжения на нелинейном конденсаторе на 90° отстает от первой гармоники тока через него.

При учете потерь в сегнетодиэлектрике и потерь от высших гармоник $\dot U_{c1}$ отстает от $\dot I_{c1}$ на угол меньше 90°.

*При построении векторных диаграмм для высших и дробных гармоник на частоте* $\nu f$ следует иметь в виду, что при синусоидальном источнике питания частоты $f$ нелинейный индуктивный (емкостной) *элемент схемы является источником энергии на частоте* $\nu f$, поэтому напряжение $\dot U_{L\nu f}$ на частоте $\nu f$ на нелинейном индуктивном элементе будет опережать протекающий через него ток $\dot I_{\nu f}$ частоты $\nu f$ на угол больше 90° (а на емкостном напряжение $\dot U_{C\nu f}$ будет отставать от $\dot I_{\nu f}$ на угол больше 90°).

Обобщенно можно сказать, что комплексное сопротивление нелинейного элемента НЭ на частоте $\nu f(\nu\neq1)$ при частоте источника питания $f$ равно взятому со знаком минус входному сопротивлению линейного двухполюсника на частоте $\nu f$, к зажимам которого присоединен НЭ.

В случае линейного активного четырехполюсника рис. 4.15, *а*, с внутренними источниками частоты $f$, заменив источник ЭДС частоты $f$ в ветви *1* на нелинейный элемент НЭ1 и линейную нагрузку $Z_н$ в ветви *2* на НЭ2 на любой гармонике $\nu f(\nu\neq1)$ в схеме установится режим, при котором $Z_{вх\,НЭ1}(\nu f)=-Z_{c1}(\nu f)$ и $Z_{вх\,НЭ2}(\nu f)=-Z_{c2}(\nu f)$, где $Z_{c1}(\nu f)$ и $Z_{c2}(\nu f)$ — характеристические сопротивления линейного четырехполюсника по отношению к ветвям *1* и *2* на частоте $\nu f$, определяемые по (4.26).

**Пример 159.** Для цепи (рис. 15.47, *а*) построить топографическую диаграмму по первой гармонике при $I_1=0,2$ А. ВАХ по первой гармонике для нелинейной индуктивной катушки изображен на рис. 15.47, *б*. Емкостное сопротивление по первой гармонике $X_C=229$ Ом; $R_1=250$ Ом; $R_2=407$ Ом; $R_3=122$ Ом.

Р е ш е н и е. Обозначим токи в ветвях и узловые точки схемы в соответствии с рис. 15.47, *а*. На рис. 15.47, *в* направим ток $\dot I_1=0,2$ А по оси +1. Потенциал точки *e* примем равным нулю. Находим $\dot\varphi_d=\dot\varphi_e+\dot U_{L1}$. Напряжение на нелинейной индуктивной катушке $U_{L1}$ при токе $I_1=0,2$ А по модулю равно 110 В (найдено из кривой рис. 15.47, *б*) и по фазе на 90° опережает ток $\dot I_1$; $\dot\varphi_c=\dot\varphi_d+\dot I_1R_1$; $I_1R_1=0,2\cdot250=50$ В и по фазе совпадает с $\dot I_1$.

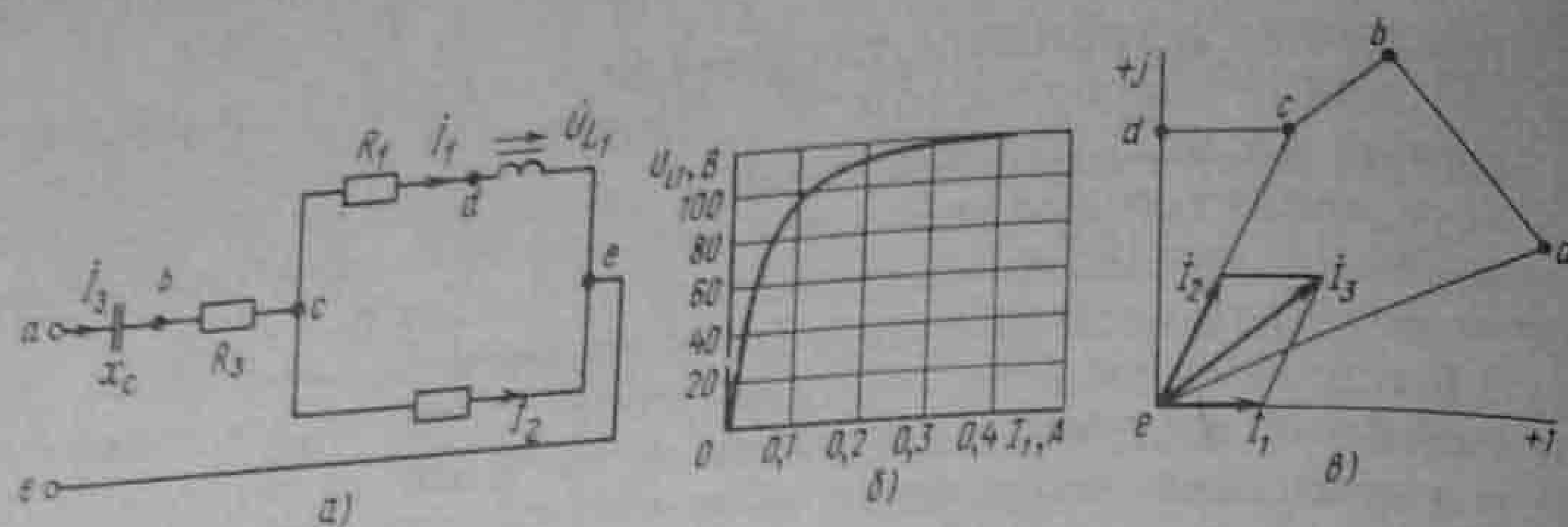



Рис. 15.47

Под действием напряжения $\dot U_{ce}$, по модулю приблизительно равного 122 В, протекает ток $\dot I_2$, численно равный 122/407 ≈ 0,3 А и по фазе совпадающий с $\dot U_{ce}$. Ток $\dot I_3=\dot I_1+\dot I_2$. По модулю ток $I_3\approx$ 0,41 А; $\dot\varphi_b=\dot\varphi_c+\dot I_3R_3$; $I_3R_3=0{,}41\cdot 122 = 50$ В; $\dot\varphi_a=\dot\varphi_b+\dot I_3(-jX_C)$.

Напряжение на конденсаторе $\dot U_{ab}$ численно равно $0{,}41\cdot 229 = 94$ В и по фазе на 90° отстает от тока $\dot I_3$.

Напряжение на входе схемы (рис. 15.47, *а*) в рассматриваемом режиме работы по модулю равно 164 В.

Из рис. 15.47, *в* можно определить углы между любыми токами и напряжениями цепи рис. 15.47, *а*. Проделав аналогичные подсчеты и построения при других значениях тока $I_1$ (например, равных 0,5; 1; 2; 3 А и т. д.), можно определить в этих режимах значения всех токов, напряжений и сдвигов фаз, свести данные в таблицу и затем, пользуясь ею, построить кривую зависимости любого тока, напряжения, сдвига фаз в функции от модуля входного напряжения или от модуля какого-либо другого напряжения (тока).

**§ 15.63. Метод эквивалентного генератора.** Расчет нелинейных цепей переменного тока иногда осуществляют, используя *метод эквивалентного генератора* (МЭГ). Рассмотрим применение этого метода к цепи с управляемым нелинейным элементом.

На рис. 15.48, *а* изображена схема, состоящая из источника синусоидальной ЭДС $E$, двух резисторов $R$ и управляемой индуктивной катушки (УИК), семейство ВАХ которой по первым гармоникам изображено на рис. 15.48, *б*. Ток управления $I_0$ является параметром на этом семействе. Ток через УИК обозначен $I$. В соответствии с МЭГ разомкнем ветвь, по которой течет ток $I$, и определим напряжение $U_{abx}=E/2$ в режиме холостого хода. Определим входное сопротивление $Z_{вх}$ цепи переменного тока относительно зажимов *а* и *в*. В соответствии с рис. 15.48, *в* оно равно $R/2$. На рис. 15.48, *г* показана эквивалентная схема цепи, а на рис. 15.48, *д* изображена векторная диаграмма для этой цепи. Геометрическая сумма вектора $\dot I\,R/2$ и напряжения на индуктивной катушке $\dot U_L$ равна $E/2$. Так как $E/2$ является гипотенузой прямоугольного треугольника, катеты которого равны $U_L$ и $I\,R/2$, то по теореме Пифагора

$$(IR/2)^2+U_L^2=(E/2)^2. \qquad (а)$$

Поделив обе части (а) на $(E/2)^2$, получим уравнение эллипса:



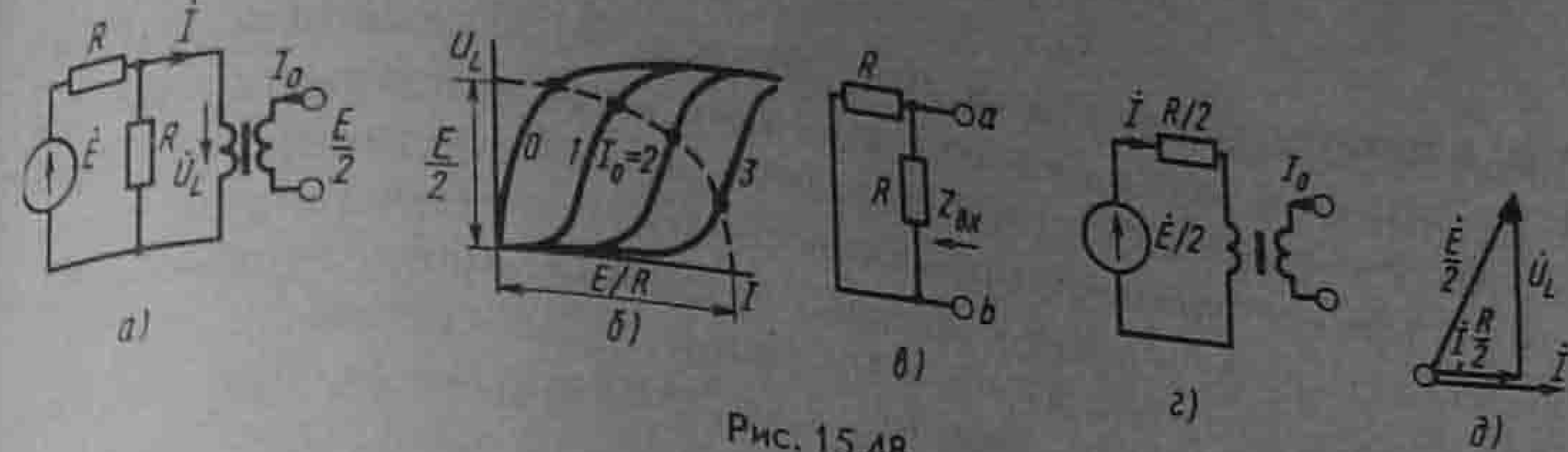



Рис. 15.48

$$\left(\frac{I}{E/R}\right)^2+\left(\frac{U_L}{E/2}\right)^2=1. \qquad (б)$$

Одна полуось эллипса равна $(E/R)$, другая — $E/2$. Нанесем эллипс на семейство ВАХ индуктивной катушки (рис. 15.48, *б*). По точкам пересечения эллипса с ВАХ можно определить ток $I$ и напряжение $U_L$ на индуктивной катушке при любом значении управляющего тока $I_0$.

При рассмотрении характеристик управляемой индуктивной катушки (см. § 15.24), феррорезонансных схем (см. § 15.57 — 15.62) индуктивную катушку полагали идеализированной, а именно: не учитывали потери в ее сердечнике, наличие потока рассеяния и падение напряжения в резистивном сопротивлении обмотки. Это делалось с той целью, чтобы основные свойства упомянутых схем и устройств не были завуалированы относительно второстепенными факторами.

**§ 15.64. Векторная диаграмма нелинейной индуктивной катушки.** Нелинейная индуктивная катушка изображена на рис. 15.49, *а*. Резистивное сопротивление обмотки $w_1$ обозначим $R$.

Проходящий по обмотке ток создает в сердечнике магнитный поток. Большая часть этого потока (поток $\Phi_m$) замыкается по сердечнику, а меньшая часть (поток $\Phi_s$) — по воздуху. Поток $\Phi_m$ называют *основным*, а $\Phi_s$ — *потоком рассеяния*.

Обычно поток $\Phi_s$ составляет всего несколько процентов от потока $\Phi_s$. Однако могут быть и такие режимы работы, в которых поток

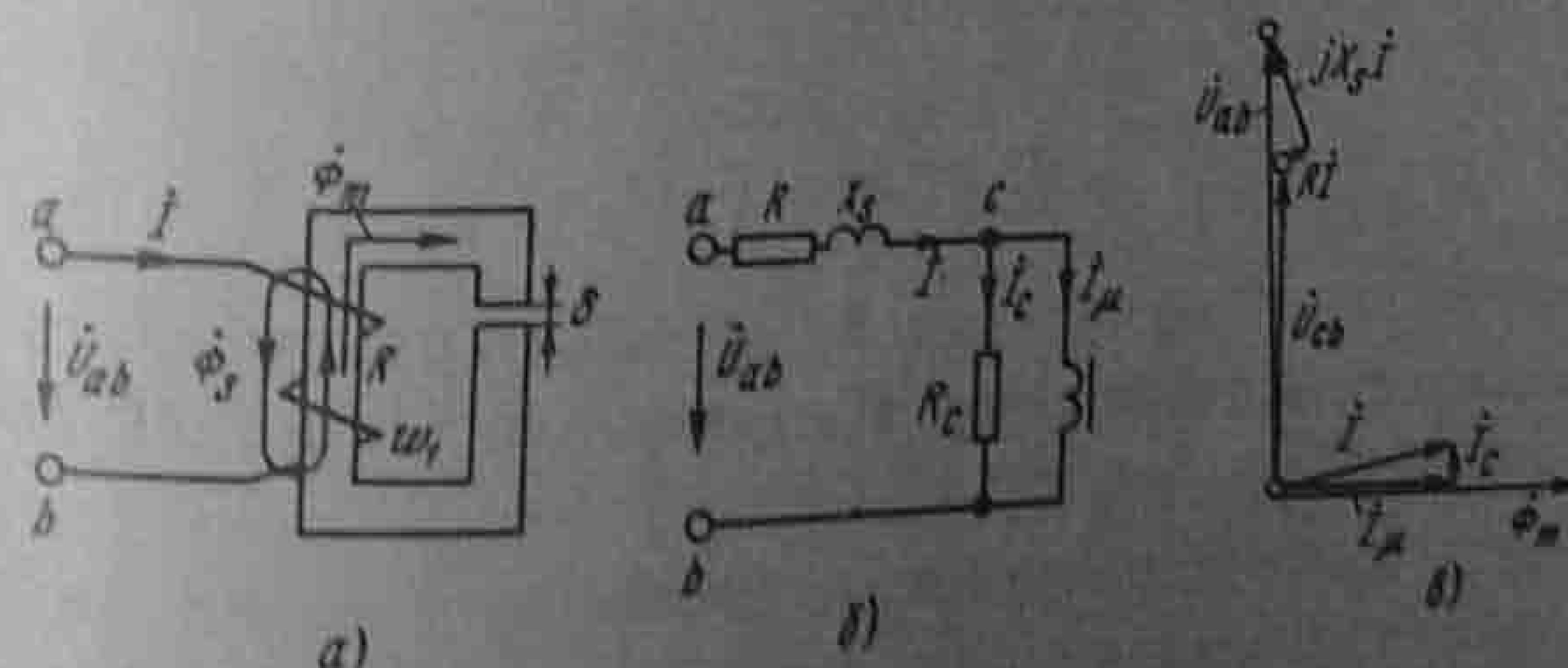



Рис. 15.49

17 Зак. 683

$\Phi_s$ оказывается соизмеримым с потоком $\Phi_m$. Такие режимы имеют место, если сердечник работает при большом насыщении или когда в сердечнике имеется относительно большой воздушный зазор $\delta$.

При построении векторной диаграммы заменим в действительности несинусоидальный ток и несинусоидальный поток эквивалентными синусоидальными величинами.

Отношение потокосцепления рассеяния $\psi_s = w_1\Phi_s$ к току $I$ называют *индуктивностью рассеяния:*

$$L_s = \psi_s / I = w_1\Phi_s / I. \qquad (15.64)$$

Индуктивное сопротивление $X_s = \omega L_s$ называют *индуктивным сопротивлением рассеяния.*

Схема замещения нелинейной индуктивной катушки изображена на рис. 15.49, *б*. Она отличается от схемы рис. 15.3, *а* тем, что в ней добавлено сопротивление $X_s$. В неразветвленной части схемы включены резистивное сопротивление $R$ обмотки $w_1$ и индуктивное сопротивление рассеяния $X_s$.

На участке *cb* есть две ветви. Правую ветвь образует идеализированная нелинейная индуктивность, по которой проходит намагничивающий ток $I_\mu$. Левую ветвь образует активное сопротивление $R_c$, потери в котором равны потерям $P_c$ на гистерезис и на вихревые токи в сердечнике нелинейной индуктивной катушки. По левой ветви течет ток

$$I_c = P_c / U_{cb}. \qquad (15.65)$$

На рис. 15.49, *в* изображена векторная диаграмма нелинейной индуктивной катушки в соответствии со схемой рис. 15.49, *б*. Эта векторная диаграмма строится так же, как и для обычных линейных схем.

Начнем ее построение с потока $\dot{\Phi}_m$.

Потоки $\Phi_m$ и $\Phi_s$ пронизывают обмотку $w_1$ (рис. 15.49, *а*) и наводят в ней ЭДС самоиндукции.

Напряжение $\dot{U}_{ab}$ на зажимах идеализированной нелинейной индуктивной катушки равно по величине и противоположно по знаку ЭДС самоиндукции, возникающей в обмотке $w_1$ схемы (рис. 15.49, *а*) под действием основного потока $\dot{\Phi}_m$:

$$\dot{U}_{cb} = j\omega w_1 \frac{\dot{\Phi}_m}{\sqrt{2}}. \qquad (15.66)$$

Деление $\dot{\Phi}_m$ на $\sqrt{2}$ объясняется переходом от амплитудного значения потока к действующему. Напряжение $\dot{U}_{cb}$ на 90° опережает поток $\dot{\Phi}_m$.

Ток $\dot{I}_\mu$ — это ток через идеализированную нелинейную индуктивную катушку, в сердечнике которой нет потерь энергии; он на 90° отстает от напряжения $\dot{U}_{cb}$ и по фазе совпадает с потоком $\dot{\Phi}_m$. Ток



$\dot{I}_c$ совпадает по фазе с напряжением $\dot{U}_{cb}$. Определение токов $\dot{I}_\mu$ и $\dot{I}_c$ рассмотрено в § 15.65 и 15.66.

По первому закону Кирхгофа,

$$\dot{I} = \dot{I}_\mu + \dot{I}_c. \qquad (15.67)$$

Напряжение $\dot{U}_{ab}$ на входе схемы равно геометрической сумме напряжения $\dot{U}_{cb}$, падения напряжения $\dot{I}R$ в резистивном сопротивлении и падения напряжения $j\dot{I}X_s$ в индуктивном сопротивлении рассеяния.

Токи $I_\mu$ и $I_c$ не пропорциональны напряжению $U_{cb}$, а следовательно, и напряжению $U_{ab}$ на входе схемы, т. е. если напряжение $U_{ab}$ увеличить, например, в 1,3 раза, то токи $I_\mu$ и $I_c$ увеличатся не в 1,3 раза, а в большее число раз.

При построении векторной диаграммы исходили из того, что напряжение $U_{cb}$ известно. По напряжению $U_{cb}$ определили токи $I_\mu$ и $I_c$ и затем нашли напряжение $U_{ab}$ на входных зажимах индуктивной катушки.

Обычно известно напряжение $U_{ab}$, а напряжение $U_{cb}$ неизвестно. Поэтому при построении векторной диаграммы при заданном $U_{ab}$ сначала следует разобраться, может ли напряжение $U_{cb}$ в исследуемом режиме работы схемы значительно отличаться от напряжения $U_{ab}$.

Если падения напряжения в сопротивлениях $R$ и $X_s$ малы по сравнению с $U_{ab}$, например 3 — 8% от $U_{ab}$, то можно в первом приближении считать, что $U_{cb} \approx U_{ab}$. Если же падения напряжения в сопротивлениях $R$ и $X_s$ соизмеримы с напряжением $U_{cb}$, то для расчета напряжения $U_{cb}$ необходимо построить векторные диаграммы для нескольких значений $U_{cb}$, например, равных 1; 0,9; 0,8; 0,7 от $U_{ab}$, для каждого из этих значений $U_{cb}$ находят $U_{ab}$, по полученным результатам строят вспомогательную кривую $U_{cb} = f(U_{ab})$, по которой определяют $U_{cb}$ при заданном $U_{ab}$ и затем строят искомую векторную диаграмму.

## § 15.65. Определение намагничивающего тока.

**§ 15.65. Определение намагничивающего тока.** Ток $\dot{I}$ и его составляющие $\dot{I}_\mu$ и $\dot{I}_c$ находят опытным или аналитическим путем, а также с помощью графических построений.

Рассмотрим их аналитическое определение. Если через $l$ (м) обозначить длину средней магнитной линии на пути в стали (рис. 15.50), $\delta$ (м) — длину "воздушного" зазора в магнитной цепи, $B$ (Тл)— мгновенное значение магнитной индукции, $H$ (А/м) — мгновенное значение напряженности поля в сердечнике, то на основании закона полного тока мгновенное значение намагничивающего тока

$$i_\mu = \frac{Hl + 0{,}8B\delta \cdot 10^6}{w_1}. \qquad (15.68)$$

На векторной диаграмме откладывают действующее значение намагничивающего тока $I_\mu$.

Для определения действующего значения намагничивающего тока нужно в выражении (15.68) подставить $B_m \sin\omega t$ вместо $B$ ($B_m = \Phi_m / S$), $H$ заменить на $\alpha \operatorname{sh}(\beta B_m \sin\omega t)$, разложить гиперболический синус от периодического аргумента в ряд по функциям Бесселя [см. формулу (15.9)]. Воспользовавшись формулой (7.11), с помощью которой определяют действующее значение тока через амплитуды от-

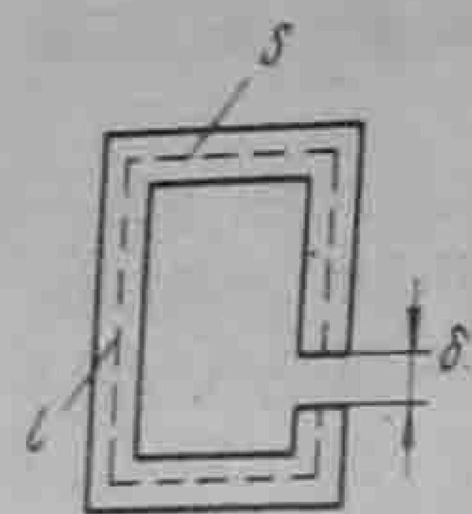



Рис. 15.50

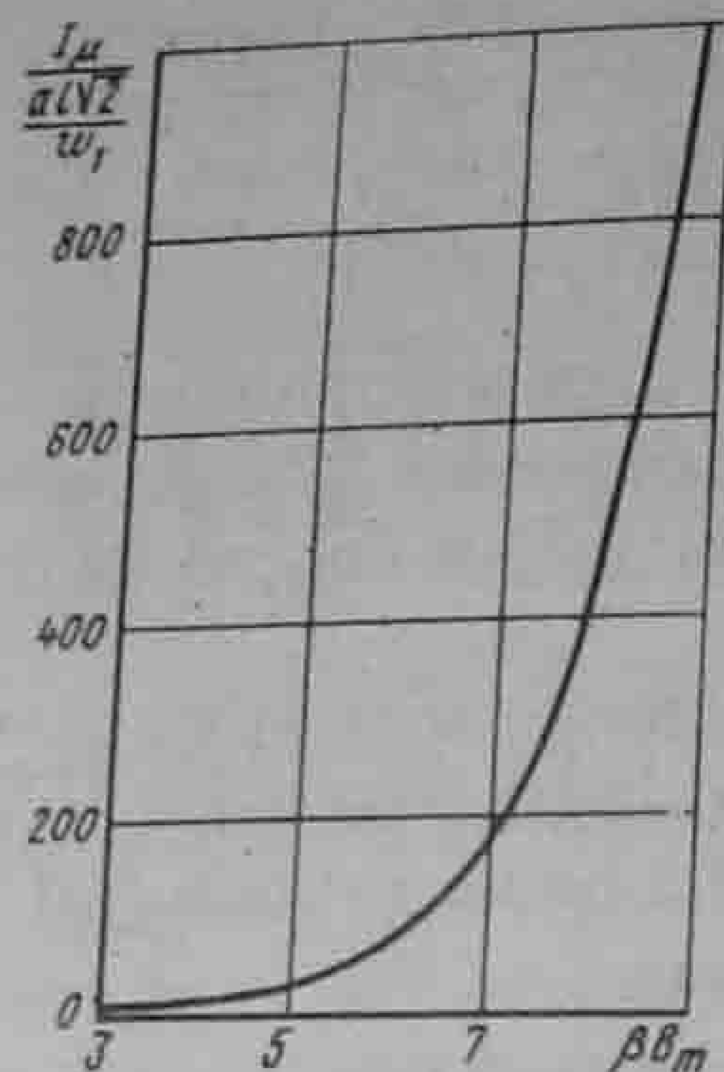



Рис. 15.51

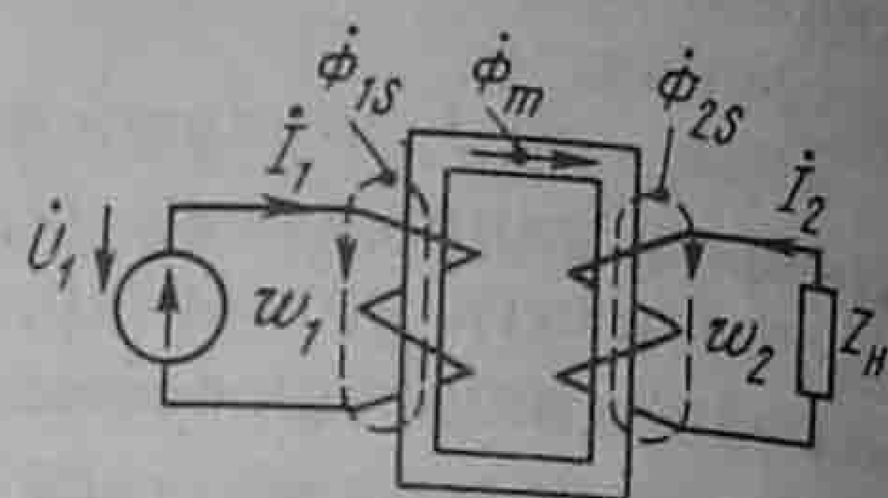



Рис. 15.52

дельных гармоник, получим

$$I_\mu = \frac{al\sqrt{2}}{\omega_1}\sqrt{\left[-jJ_1(j\beta B_m) + \frac{0{,}8\delta\beta B_m \cdot 10^6}{2a l/\beta}\right]^2 + [jJ_3(j\beta B_m)]^2 + [-jJ_5(j\beta B_m)]^2 + \ldots} \quad (15.69)$$

На рис. 15.51 изображена кривая, выражающая зависимость $I_\mu w_1 / (\sqrt{2}\,al) = f(\beta B_m)$ и построенная по (15.69) при $\delta=0$. С помощью этой зависимости по $\beta B_m$ находят $I_\mu w_1 / (\sqrt{2}\,al)$, а затем определяют $I_\mu$ ($w_1$, $a$ и $l$ известны).

**§ 15.66. Определение тока потерь.** Ток $I_c$, обусловленный потерями в стальном сердечнике, находят как частное от деления потерь в сердечнике вследствие вихревых токов и гистерезиса на ЭДС, наведенную рабочим потоком $\Phi_m$ в обмотке $w_1$ и равную напряжению $U_{cb}$:

$$I_c = P_c / U_{cb}, \quad (15.70)$$

$$U_{cb} = \omega w_1 \Phi_m / \sqrt{2} = 4{,}44 f w_1 \Phi_m, \quad (15.71)$$

где $P_c = m p_c$ — полные потери в стали от вихревых токов и гистерезиса, Вт; $m$ — масса сердечника, кг; $p_c$ — потери в 1 кг сердечника, Вт/кг.

Потери в 1 кг электротехнической стали при индукциях 1,0 и 1,5 Тл и частоте 50 Гц нормированы ГОСТом. Обозначим: $p_{1,0}$ — потери в 1 кг стали при $B_m = 1$ Тл и $f = 50$ Гц; $p_{1,5}$ — потери в 1 кг стали при $B = 1{,}5$ Тл и $f = 50$ Гц. Значения $p_{1,0}$ и $p_{1,5}$ приведены в табл. 15.2.

Потери при других индукциях и частотах, мало отличающихся от 50 Гц, определяют с помощью следующей эмпирической формулы: $p_c = p_{1,0} B^n (f/50)^{1,3}$, $n = 5{,}69 \lg \frac{p_{1,5}}{p_{1,0}}$.



Таблица 15.2

| Марка стали | $p_{1,0}$ Вт/кг, при толщине листа, мм | | $p_{1,5}$ Вт/кг, при толщине листа, мм | |
|---|---|---|---|---|
| | 0,5 | 0,35 | 0,5 | 0,35 |
| 1511 | 1,6 | 1,35 | 3,6 | 3,2 |
| 1512 | 1,4 | 1,2 | 3,2 | 2,8 |
| 1513 | 1,25 | 1,05 | 2,9 | 2,5 |

**§ 15.67. Основные соотношения для трансформатора со стальным сердечником.** В § 3.39 рассматривались соотношения, характеризующие работу трансформатора, для которого зависимость между напряженностью поля и потоком в сердечнике была линейной, а потери в сердечнике отсутствовали.

Для улучшения магнитной связи между первичной ($w_1$) и вторичной ($w_2$) обмотками трансформатора его сердечник выполняют из ферромагнитного материала (рис. 15.52)[1].

В данном параграфе рассмотрены соотношения, характеризующие работу трансформатора с учетом того, что зависимость между напряженностью поля и потоком в ферромагнитном (стальном) сердечнике нелинейна и что в сердечнике есть потери, обусловленные гистерезисом и вихревыми токами.

Для уменьшения тока холостого хода сердечник трансформатора стремятся изготовить таким образом, чтобы он имел возможно меньший воздушный зазор, расположенный перпендикулярно магнитному потоку, либо совсем не имел его.

В силу нелинейной зависимости между потоком и напряженностью поля в сердечнике по обмоткам трансформатора протекают несинусоидальные токи[2].

Анализ работы трансформатора будем проводить, заменив несинусоидальные токи и потоки их эквивалентными в смысле действующего значения величинами: $\dot{I}_1$ — комплекс действующего значения тока первичной обмотки; $\dot{I}_2$ — комплекс действующего значения тока вторичной обмотки; $\dot{\Phi}_m$ — комплексная амплитуда основного магнитного потока, проходящего по сердечнику трансформатора, пронизывающего обмотки $w_1$ и $w_2$ и наводящего в них ЭДС.

Вследствие наличия рассеяния небольшой по сравнению с $\dot{\Phi}_m$ поток — *поток рассеяния первичной обмотки* $\dot{\Phi}_{1s}$ — замыкается по воздуху, образуя потокосцепление только с обмоткой $w_1$. Другой,

[1] На рис. 15.52 и 15.53 для большей наглядности обмотки $w_1$ и $w_2$ показаны находящимися на разных стержнях. Практически их располагают обычно на одном и том же стержне.

[2] Несинусоидальность проявляется главным образом в режимах работы, близких к холостому ходу.

также небольшой по сравнению с $\dot{\Phi}_m$ поток — *поток рассеяния вторичной обмотки* $\dot{\Phi}_{2s}$ — замыкается по воздуху, сцепляясь только с обмоткой $w_2$.

Полагают, что потокосцепление потока $\dot{\Phi}_{1s}$ с обмоткой $w_1$ пропорционально току $\dot{I}_1$:

$$\dot{\psi}_{1s}=w_1\dot{\Phi}_{1s}=L_{1s}\dot{I}_1. \qquad (15.72)$$

Коэффициент пропорциональности $L_{1s}$ между потокосцеплением $\dot{\psi}_{1s}$ и током $\dot{I}_1$ называют *индуктивностью рассеяния первичной обмотки*; $L_{1s}$ зависит от числа витков и конструкции обмотки.

Принимают также, что потокосцепление $\dot{\psi}_{2s}$ потока $\dot{\Phi}_{2s}$ с обмоткой $w_2$ пропорционально току вторичной цепи $\dot{I}_2$:

$$\dot{\psi}_{2s}=w_2\dot{\Phi}_{2s}=L_{2s}\dot{I}_2. \qquad (15.73)$$

Коэффициент пропорциональности $L_{2s}$ между потокосцеплением $\dot{\psi}_{2s}$, обусловленным потоком рассеяния $\dot{\Phi}_{2s}$, и током $\dot{I}_2$ называют *индуктивностью рассеяния вторичной обмотки*; $L_{2s}$ зависит от числа витков и конструкции вторичной обмотки.

Индуктивное сопротивление первичной обмотки, обусловленное потоком рассеяния $\dot{\Phi}_{1s}$,

$$X_{1s}=\omega L_{1s}. \qquad (15.74)$$

Аналогично, индуктивное сопротивление вторичной обмотки, обусловленное потоком рассеяния $\dot{\Phi}_{2s}$,

$$X_{2s}=\omega L_{2s}. \qquad (15.75)$$

Пусть $R_1$ — резистивное сопротивление первичной обмотки, $R_2$ — резистивное сопротивление вторичной обмотки, $Z_н$ — сопротивление нагрузки.

На рис. 15.53, *а* изображена схема того же трансформатора, что и на рис. 15.52, но на ней резистивные и индуктивные сопротивления, обусловленные потоками рассеяния, представлены отдельно выделенными $R_1, X_{s1}, R_2, X_{s2}$. Запишем уравнение по второму закону Кирхгофа для обеих цепей.

Для первичной цепи

$$\dot{I}_1R_1+jX_{s1}\dot{I}_1+j\omega w_1\frac{\dot{\Phi}_m}{\sqrt{2}}=\dot{U}_1, \qquad (15.76)$$

для вторичной цепи

$$\dot{I}_2R_2+jX_{s2}\dot{I}_2+j\omega w_2\frac{\dot{\Phi}_m}{\sqrt{2}}+\dot{U}_н=0, \qquad (15.77)$$

где $j\omega w_1\frac{\dot{\Phi}_m}{\sqrt{2}}$ — напряжение, численно равное ЭДС, наводимой в об-



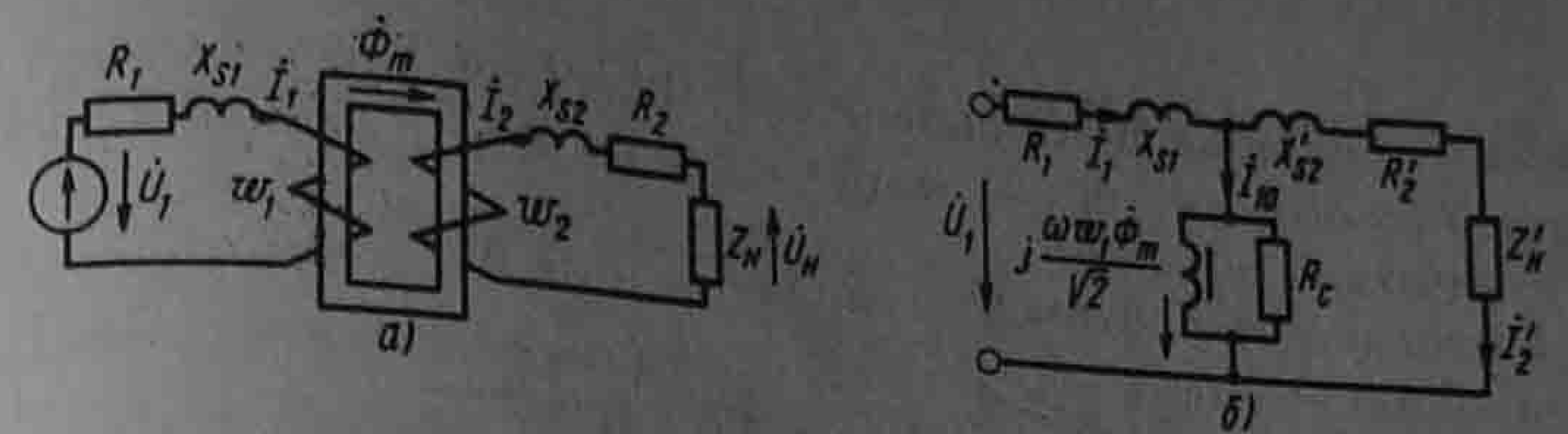



Рис. 15.53

мотке $w_1$ основным рабочим потоком $\dot{\Phi}_m$. Деление $\dot{\Phi}_m$ на $\sqrt{2}$ объясняется переходом от амплитудного значения к действующему. Аналогично, $j\omega w_2\frac{\dot{\Phi}_m}{\sqrt{2}}$ — напряжение, численно равное ЭДС, наводимой в обмотке $w_2$ основным рабочим потоком $\dot{\Phi}_m$.

Обозначим ток $\dot{I}_1$ при холостом ходе трансформатора через $\dot{I}_0$. МДС трансформатора при холостом ходе равна $\dot{I}_0w_1$. МДС трансформатора при наличии тока $\dot{I}_2$ составляет $\dot{I}_1w_1+\dot{I}_2w_2$. Трансформаторы конструируют обычно таким образом, что падения напряжения $\dot{I}_1R_1$ и $j\dot{I}_1X_{s1}$ много меньше, чем падение напряжения $\omega w_1\frac{\dot{\Phi}_m}{\sqrt{2}}$. Если это учесть, то для правильно сконструированных трансформаторов уравнение (15.76) запишем так:

$$j\omega w_1\frac{\dot{\Phi}_m}{\sqrt{2}}\approx\dot{U}_1. \qquad (15.76а)$$

Уравнение (15.76а) справедливо как при холостом ходе, так и при нагрузке, т. е. при переходе от холостого хода к режиму работы при нагрузке поток $\Phi_m$ практически остается неизменным по модулю.

Но если в этих двух режимах поток $\Phi_m$ один и тот же, то должны быть равны и создающие его МДС, т. е.

$$\dot{I}_1w_1+\dot{I}_2w_2=\dot{I}_0w_1. \qquad (15.78)$$

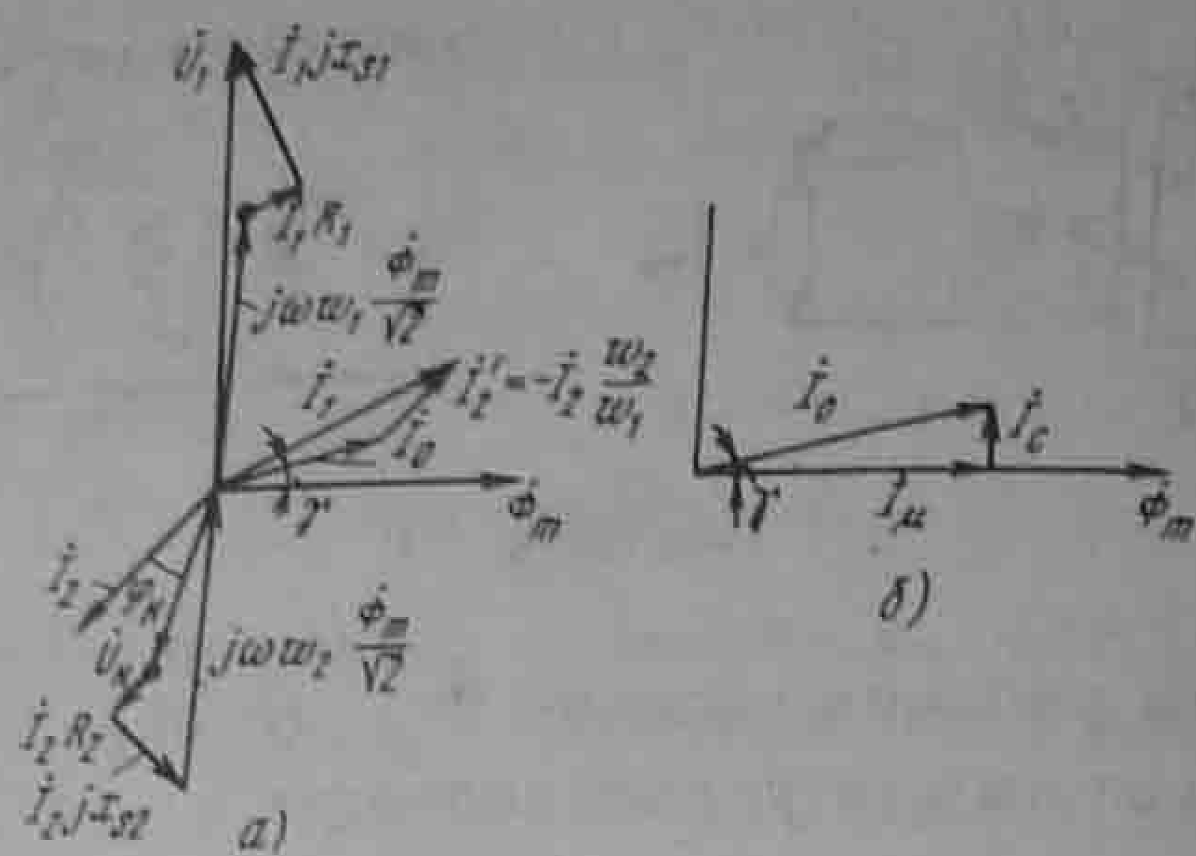
Поделив обе части равенства на $w_1$, получим

$$\dot{I}_1=\dot{I}_0+\dot{I}'_2, \qquad (15.78а)$$

где

$$\dot{I}'_2=-\dot{I}_2\frac{w_2}{w_1}. \qquad (15.78б)$$

Таким образом, ток первичной цепи $\dot{I}_1$ может быть представлен как геометрическая сумма двух токов: тока холостого хода $\dot{I}_0$ и тока $\dot{I}'_2$. Ток $\dot{I}'_2$ называют *приведенным* (к числу витков первичной обмотки) *вторичным током*. Он численно равен току $\dot{I}'_2$, измененному в $w_2/w_1$ раз.


Рис. 15.54

Кроме того, в правильно сконструированных трансформаторах падения напряжений $\dot{I}_2R_2$ и $j\dot{I}_2X_{s2}$ малы по сравнению с $j\omega w_2\frac{\Phi_m}{\sqrt{2}}$, поэтому из уравнения (15.77) следует, что

$$j\omega w_2\frac{\dot{\Phi}_m}{\sqrt{2}} \approx -\dot{U}_н. \qquad (15.79)$$

Если почленно разделить (15.76а) на (15.79) и перейти к модулям, то

$$U_1/U_н \approx w_1/w_2, \qquad (15.80)$$

т. е. отношение напряжения на входе трансформатора к напряжению на его выходе (на нагрузке) приблизительно равно отношению числа витков первичной обмотки к числу витков вторичной обмотки.

В правильно сконструированных трансформаторах при нагрузке, близкой к номинальной, ток $I_0$ составляет 1 — 10% от тока $I_1$, поэтому уравнение (15.78) можно приближенно представить так:

$$\dot{I}_1w_1 \approx -\dot{I}_2w_2.$$

Между модулями токов $I_1$ и $I_2$ при нагрузке, близкой к номинальной, имеет место следующее приближенное соотношение:

$$I_1/I_2 \approx w_2/w_1, \qquad (15.81)$$

т. е. ток $I_1$ почти пропорционален току $I_2$. Эта пропорциональность немного нарушается за счет тока холостого хода $I_0$.

В резистивных сопротивлениях вторичной цепи выделяется энергия, которая переносится магнитным потоком из первичной цепи во вторичную и восполняется источником питания схемы. На рис. 15.53,б изображена схема замещения трансформатора со стальным сердечником. Для ее обоснования уравнение (15.77) умножим на $w_1/w_2$, заменим в нем ток $\dot{I}_2$ на $-\dot{I}'_2(w_1/w_2)$ в соответствии с (15.78б) и у всех слагаемых уравнения изменим знаки. В результате получим

$$\dot{I}_2R'_2 + \dot{I}_2jX'_{s2} + \dot{I}_2Z'_н - j\omega w_1\frac{\dot{\Phi}_m}{\sqrt{2}} = 0. \qquad (15.81а)$$

Приведенные сопротивления

$$R'_2 = R_2(w_1/w_2)^2;\ X'_{s2} = X_{s2}(w_1/w_2)^2;\ Z'_н = Z_н(w_1/w_2)^2.$$

Схема (рис 15.53, б) удовлетворяет уравнениям (15.76), (15.78) и (15.81а).

**§ 15.68. Векторная диаграмма трансформатора со стальным сердечником.** На рис. 15.54, *а* изображена векторная диаграмма при индуктивной нагрузке $Z_н=R_н+jX_н$.

Построение диаграммы начнем с тока $\dot{I}_2$, расположив его произвольно. Под углом $\varphi_н=\operatorname{arctg}X_н/R_н$ к нему расположим вектор напряжения на нагрузке $\dot{U}_н$. Прибавим к вектору $\dot{U}_н$ векторы $\dot{I}_2R_2$ и $\dot{I}_2jX_{s2}$. Сумма падений напряжения во вторичной цепи равна нулю, что дает возможность построить вектор $j\omega w_2\frac{\dot{\Phi}_m}{\sqrt{2}}$. Далее строим вектор $\dot{\Phi}_m$ (он на 90° отстает от вектора $j\omega w_2\frac{\dot{\Phi}_m}{\sqrt{2}}$).

В ферромагнитном сердечнике трансформатора, как и в сердечнике нелинейной индуктивной катушки, есть потери, обусловленные гистерезисом и вихревыми токами. Вследствие этого ток холостого хода $\dot{I}_0$ состоит из геометрической суммы намагничивающего тока $\dot{I}_\mu$ и тока потерь $\dot{I}_c$ (рис. 15.54, *б*): $\dot{I}_0=\dot{I}_\mu+\dot{I}_c$.

Ток $\dot{I}_\mu$ совпадает по фазе с потоком $\dot{\Phi}_m$, а ток $\dot{I}_c$ опережает поток $\dot{\Phi}_m$ на 90°. Токи $\dot{I}_\mu$ и $\dot{I}_c$ определяют так же, как для нелинейной индуктивной катушки с ферромагнитным сердечником.

Ток холостого хода $\dot{I}_0$ опережает поток $\dot{\Phi}_m$ на некоторый угол $\gamma$.

В соответствии с уравнением (15.78) ток $\dot{I}_1$ равен геометрической сумме тока $\dot{I}_0$ и тока $\dot{I}'_2=-\dot{I}_2\frac{w_2}{w_1}$. Геометрическая сумма падений напряжений $\dot{I}_1R_1$, $\dot{I}_1jX_{s1}$ и $j\omega w_1\frac{\dot{\Phi}_m}{\sqrt{2}}$ дает напряжение на входе первичной цепи $\dot{U}_1$.

С целью удобочитаемости на рис. 15.54, *а* не выдержаны имеющие место в действительности соотношения между модулями напряжений, а также между модулями токов.

**Пример 160.** Повышающий трансформатор имеет сердечник из трансформаторной стали 1511 при толщине листов 0,5 мм. Кривая намагничивания $H=0{,}71\ \mathrm{sh}(5{,}75\ B)$. Сердечник выполнен из пластин, имеющих кольцевую форму без воздушного зазора; $w_1=250$, $w_2=1750$, $S=2{,}2$ см², $l=25$ см. Пренебрегая $R_1$ и $X_{s1}$, определить ток холостого хода $I_0$ при $U_1=15$ В и $f=50$ Гц.

Решение. Амплитуда индукции $B_m=\dfrac{U}{4{,}44 f w_1 S}=1{,}22$ Тл. Произведение $\beta B_m=5{,}75\cdot 1{,}22=7{,}02$.

По кривой (рис. 15.51) при $\beta B_m=7{,}02$ находим $w_1 I_\mu/(al\sqrt{2})=185$. Но $al\sqrt{2}/w_1=0{,}7\cdot 0{,}25\cdot\sqrt{2}/250=10^{-3}$. Следовательно, $I_\mu=0{,}185$ А.

Масса сердечника при плотности 7,8 г/см$^2$=7,8·2,2 см$^2$ · 25 см=0,428 кг. Из табл. 15.2 находим: $p_{1,0}=1{,}6$ Вт/кг; $p_{1,5}=3{,}6$ Вт/кг; $n=5{,}69\lg(3{,}6/1{,}6)\approx 1{,}13$.

Удельные потери в стали при $B_m=1{,}22$ Тл $p_c=1{,}6\cdot 1{,}22^{1,13}\cdot 1=2{,}1$ Вт/кг. Полные потери в сердечнике массой 0,428 кг $P_c=0{,}428\cdot 2{,}1=0{,}9$ Вт. Ток, обусловленный потерями в стали, $I_c\approx\dfrac{P_c}{U_1}=0{,}9/15=0{,}06$ А. Ток холостого хода $I_0$ практически равен току $I_\mu$.

**§ 15.69. Субгармонические колебания. Многообразие типов движений в нелинейных цепях.** *Субгармоническими* называют колебания, период которых $T_{ск}$ больше периода $T=2\tau$ вынуждающей силы $e(t)$. Число $k=T_{ск}/T$ характеризует порядок субгармонических колебаний (СК). В цепи рис. 15.55, *а* с нелинейной индуктивной катушкой и нелинейным конденсатором, имеющими идеально прямоугольные характеристики (рис. 15.55, *б*, *в*), при воздействии ЭДС $e(t)=\pm E$ в виде меандра (рис. 15.55, *г*) (а в дальнейшем также еще и постоянной ЭДС $E_0$) возникают СК нечетного порядка.

Обозначим $a=2\psi_m/(\tau E)$ и $b=2Rq_m/(\tau E)$. Сначала рассмотрим работу схемы при замкнутом $K_1$ и разомкнутом $K_2$, когда действует только $e(t)=\pm E$. При $b>1$ и $a<1$ возникает тип движений, показанный на рис. 15.55, *г* (для этого рисунка $a=0{,}25$ и $b=1{,}5$), когда $T=2\tau$ и $u_C=0$ в течение всего периода $T$.

При $b<1$ и $a+b<1$ тип движений (назовем его тип $H$) иллюстрируется рис. 15.55, *д* (для этого рисунка $a=0{,}25$ и $b=0{,}5$), период $T=2\tau$. Для существования СК в цепи (рис. 15.55, *а*) необходимо, чтобы $a>1$, $b<1$. Порядок $k$ равен сумме смежных чисел натурального ряда, в интервале между которыми находится сумма $a+b$.

Так, для существования колебаний третьего порядка необходимо, чтобы $1<a+b<2$. Физически СК возникают потому, что за время $\tau$ потокосцепление $\psi$ нелинейной индуктивной катушки не успевает измениться на величину $2\psi_m$. Условие $b<1$ означает, что перезарядка нелинейного конденсатора на $2q_m$ должна происходить за время, меньшее $\tau$.

Графики ЭДС $e(t)$, заряда $q$, напряжения на конденсаторе $u_C$, тока $i$ и потокосцепления $\psi$ при СК третьего порядка ($k=3$, $a=1{,}25$, $b=0{,}5$) изображены на рис. 15.55, *е*. При построении кривых учтено, что увеличение заряда может иметь место только после того, как $\psi$ достигло значения $\psi_m$, а уменьшение заряда — только после того, как $\psi$ достигло значения $-\psi_m$.

Дадим пояснения к кривым на рис. 15.55, *е*. Период СК третьего порядка составляет шесть интервалов длительностью $\tau$. К началу первого интервала $e(t)=E$, заряд $q=-q_m$ и потокосцепление



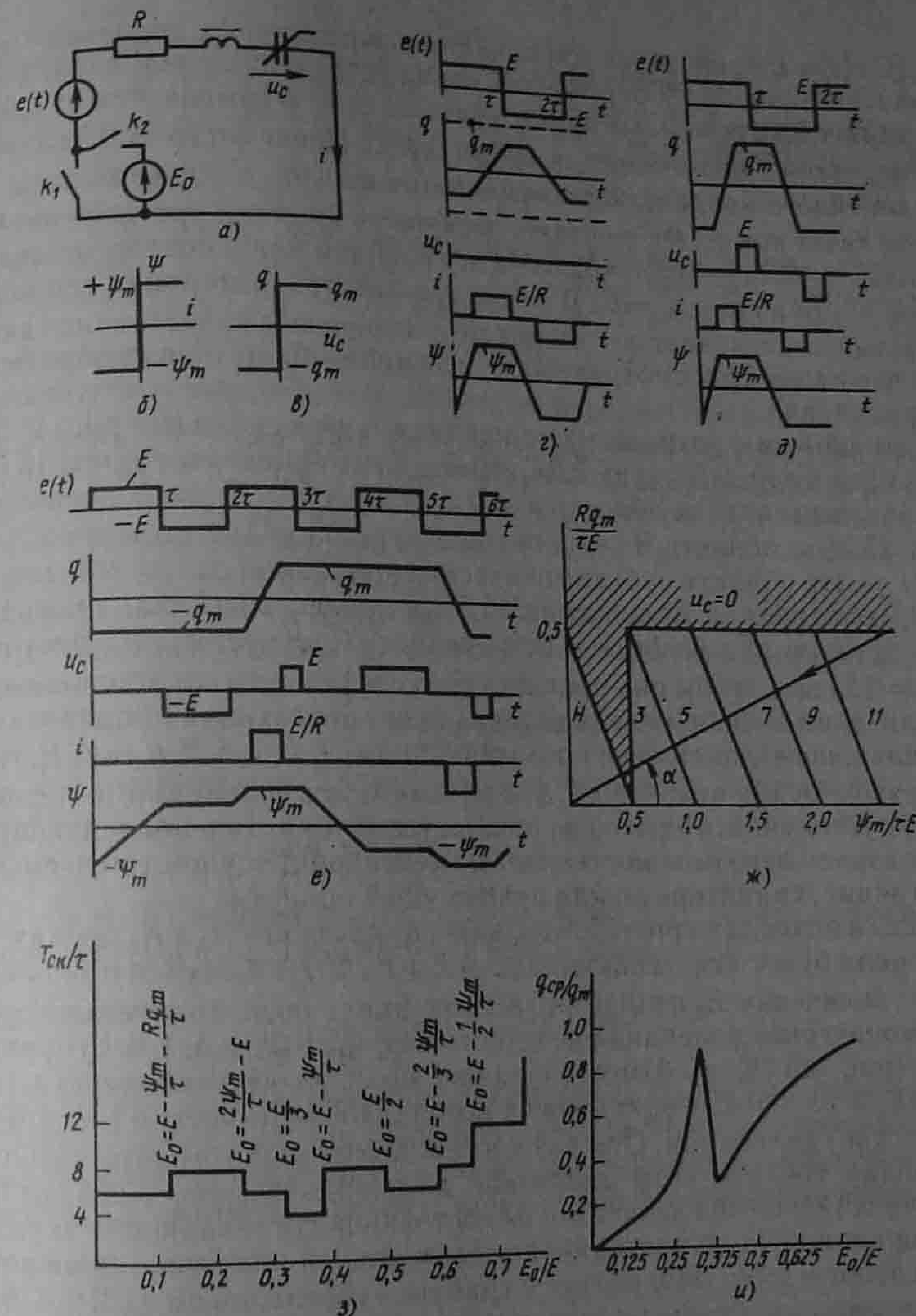



Рис. 15.55

$\psi=-\psi_m$. За первый интервал времени длительностью $\tau$ $\psi$ изменяется от $-\psi_m$ до $0{,}6\psi_m$. Так как $\psi$ не достигло значения $\psi_m$, то перемагничивание сердечника осталось незаконченным. Во второй интервал времени $e(t)=-E$ оказывается приложенной к нелинейному конденсатору $u_C=-E$. В третий интервал времени под действием

ЭДС $e(t)=E$ происходит три качественно различных процесса. Сначала заканчивается перемагничивание сердечника нелинейной индуктивной катушки, когда потокосцепление $\psi$ изменяется от $0{,}6\psi_m$ до $\psi_m$ (на это затрачивается время $0{,}25\tau$). После этого за $0{,}5\tau$ заряд нелинейного конденсатора изменяется от $-q_m$ до $q_m$ (при этом по цепи течет ток $E/R$); в оставшуюся часть времени третьего интервала $(1-0{,}25-0{,}5)\tau=0{,}25\tau$ на нелинейном конденсаторе появляется напряжение $u_C=E$. В последующие три интервала времени каждый длительностью $\tau$ имеют место процессы качественно такие же, что и в трех рассмотренных, но движения происходят в обратном направлении.

Диаграммы возможных типов движений в схеме (на рис. 15.55, *а*), когда в ней действует ЭДС $e(t)=\pm E$, изображены на рис. 15.55, *ж*. Заштрихованная область $u_C=0$ соответствует типу движения по рис. 15.55, *г*, область $H$ — движению по рис. 15.55, *д*, области *3, 5, 7, 9, 11* — это области субгармонических колебаний соответственно 3 — 11-го порядков. Если на рис. 15.55, *ж* провести из начала координат прямую под углом $\alpha$ к оси абсцисс ($\operatorname{tg}\alpha=Rq/\psi_m$; на рисунке $\operatorname{tg}\alpha=0{,}2$) так, чтобы она прошла через все области, то при плавном увеличении $E$ изображающая точка будет двигаться в направлении стрелки, последовательно проходя области *11, 9, 7, 5, 3*, $u_C=0$, $H$, т. е. при этом будут получены 7 различных типов движений и все они будут устойчивы. Переход из предыдущей области в последующую обусловлен невозможностью при измененной $E$ осуществить смену состояний, характерную для предыдущей области.

Если в схеме (на рис. 15.55, *а*) ключ $K_1$ разомкнуть, а $K_2$ замкнуть, то в цепи будет действовать ЭДС $\pm E+E_0$. В этом случае при плавном увеличении $E_0$ от 0 до $\approx 0{,}8E$ возникнут последовательно субгармонические колебания нечетного и четного (3, 4, 3, 4, 3, 6) порядков (рис. 15.55, *з*). Имеется также область неустойчивости (от $E_0=E/3$ до $E_0=E-\psi_m/\tau$), когда возникают хаотические (непериодические) колебания. Они возникают вследствие того, что изображающая точка в этом диапазоне $E_0$ попадает (рис. 15.55, *и*) на падающий участок зависимости постоянной составляющей заряда $q_{c0}$ за период $T_{c0}$ от постоянной составляющей напряжения на конденсаторе $u_{c0}=E_0$. Подробнее о границах переходов см. [20] § 15.6.

**§ 15.70. Автомодуляция. Хаотические колебания (странные аттракторы).** *Автомодуляцией* называют режим работы нелинейной электрической цепи, находящейся под воздействием периодической вынуждающей силы частотой $\omega$, при которой амплитуды токов и напряжений в цепи периодически изменяются без воздействия внешнего модулирующего фактора. Автомодуляция возникает вследствие неустойчивости периодического режима работы на частоте вынуждающей силы $\omega$. Процесс оказывается периодическим



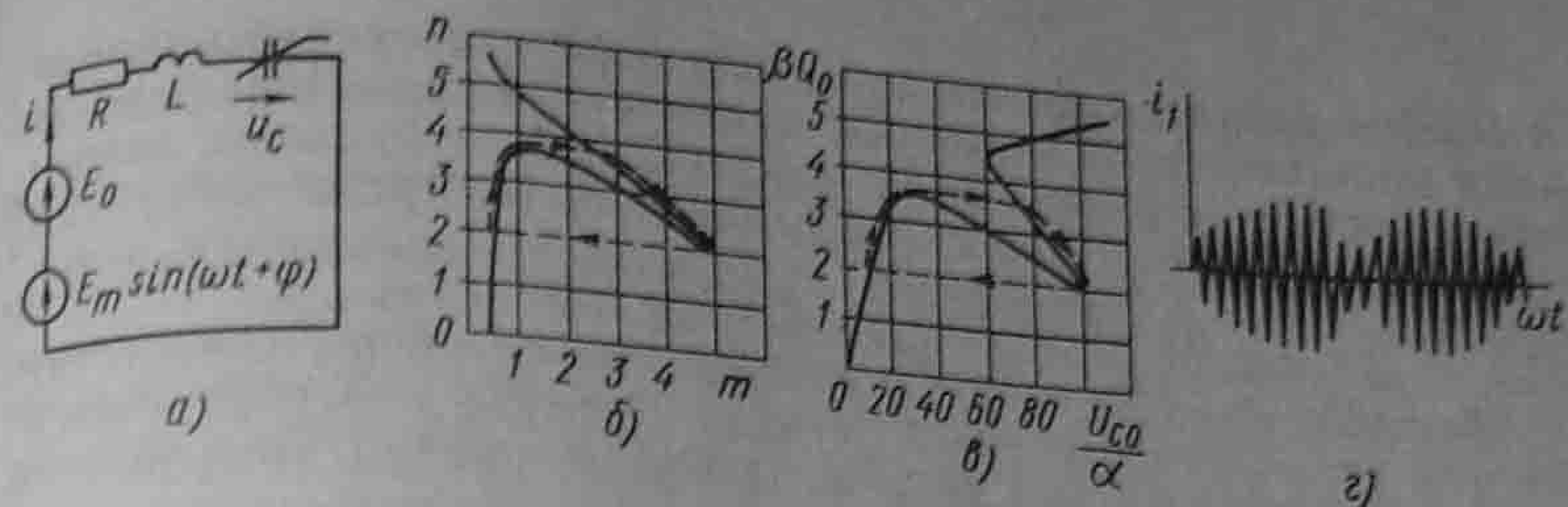



Рис. 15.56

или почти периодическим для огибающих амплитуд первых гармоник и непериодическим (хаотическим) для мгновенных значений.

Выведем основные зависимости, описывающие процесс автомодуляции в схеме (на рис. 15.56, *а*) с нелинейным конденсатором, кулон-вольтную характеристику которого в соответствии с § 15.26 выразим в виде $u_C=\alpha\operatorname{sh}\beta q$.

Так как в цепи действуют постоянная $E$ и синусоидальная $E_m\sin(\omega t+\varphi)$ ЭДС, то заряд $q$ имеет постоянную и синусоидальную компоненты:

$$q=Q_0+Q_m\sin\omega t.$$

Постоянная составляющая напряжения на конденсаторе (см. § 15.16)

$$U_{C0}=\alpha\operatorname{sh}\beta Q_0 J_0(j\beta Q_m).$$

Первая гармоника $u_{C1}=2\alpha\operatorname{ch}\beta Q_0[-jJ_1(j\beta Q_m)]\sin\omega t$, первая гармоника тока $i_1=\omega Q_m\cos\omega t$. Если в уравнение цепи

$$iR+L\frac{di}{dt}+u_C=E_0+E_m\sin(\omega t+\varphi)$$

подставить записанные выражения для $i_1$, $U_{C0}+u_C$ и разбить его в соответствии с методом гармонического баланса на уравнения для постоянной составляющей, а также для синусной и косинусной компонент, а затем два последних уравнения возвести в квадрат и сложить для устранения угла $\varphi$, то, введя обозначения $a=\frac{\beta E_m}{\omega^2 L}$, $b=\frac{R}{\omega L}$, $c=\frac{2\alpha\beta}{\omega^2 L}$, $\beta Q_0=n$, $\beta Q_m=m$, получим два следующих уравнения:

$$\alpha\operatorname{sh}nJ_0(jm)=E_0=U_{C0}, \tag{а}$$

$$b^2m^2+\left\{c[-jJ_1(jm)\operatorname{ch}n-m\right\}^2=a^2. \tag{б}$$

Решим (б) относительно ch $n$:

$$\operatorname{ch}n=\frac{m\pm\sqrt{a^2-b^2m^2}}{c[-jJ_1(jm)]}. \tag{в}$$

Уравнение (в) дает связь между $n$ и $m$, обусловленную параметрами цепи по первой гармонике частоты $\omega$, а уравнение (а) — по постоянной составляющей. На рис. 15.56, *б* изображена зависимость $n$ от $m$, построенная по соотношению (в) при $a=0{,}5$; $b=0{,}1$; $c=0{,}054$. Верхний участок кривой соответствует знаку плюс, а нижний — знаку минус перед радикалом в формуле (в).

Задаваясь значениями $n$ в интервале 0 — 6 и беря соответствующие им значения $m$ из рис. 15.56, *б*, по формуле (а) строим зависимость $\beta Q_0=f(U_{C0}/a)$ (рис. 15.56, *в*). Из рисунка видно, что в области значений $U_{C0}/a=35\div60$ имеется падающий участок, не прикрытый восходящими участками.

Если $E_0=U_{C0}$ будет такова, что изображающая точка окажется на падающем участке характеристики (рис. 15.56, *в*), то режим вынужденных колебаний окажется неустойчивым и в системе начнется процесс автомодуляции. Последний будет процессом устойчивым, так как для него имеется единственный предельный цикл.

На рис. 15.56, *б*, *в* пунктиром показано, как движется изображающая точка при автомодуляции. Стрелки указывают направление движения. На рис. 15.56, *г* показан характер изменения во времени тока $i_1$ (первой гармоники тока).

Для более обстоятельного ознакомления с теорией автомодуляции и некоторыми другими динамическими явлениями в различных электротехнических устройствах рекомендуем обратиться к [21].

Из рис. 15.56, *в* видно, что *дифференциальная емкость для медленно изменяющихся* $Q_0$ *и* $U_{C0}$ $\left(C_{диф0}=\dfrac{dQ_0}{dU_{C0}}\right)$ *на падающем участке отрицательна.*

Если в схеме (рис. 15.56, *а*) заменить линейную $L$ на управляемую нелинейную, а нелинейный конденсатор на линейный, то при определенных условиях также возникнут автомодуляция и появится *отрицательная дифференциальная индуктивность* для медленно изменяющихся составляющих потокосцепления и тока $\left(L_{диф0}=\dfrac{d\psi_0}{dI_0}\right)$.

В заключение заметим, что непериодические (хаотические) процессы для мгновенных значений токов и напряжений в нелинейных цепях, находящихся под воздействием периодических вынуждающих сил, в особенности когда нет явно выраженной огибающей, называют еще *странными аттракторами* (аттрактор — это путь от одного типа движения к другому). Возникновение хаотического движения можно рассматривать как "катастрофу" ожидаемого периодического движения. Как правило, "катастрофа" происходит тогда, когда теоретически единственно возможный периодический процесс в цепи при данных сочетаниях параметров оказывается неустойчивым и в окрестности единственной неустойчивой точки равновесия нет устойчивого предельного цикла. Если падающий



участок на характеристике мал и (или) почти плоский, то вместо автомодуляции возникает хаос.

**Вопросы для самопроверки**

1. Охарактеризуйте известные вам типы нелинейных резистивных, индуктивных и емкостных элементов. 2. Как понять выражение "нелинейные элементы являются генераторами высших гармоник тока (напряжения)"? 3. Какие преобразования можно осуществить с помощью нелинейных электрических цепей? 4. Какие физические явления могут наблюдаться в нелинейных и не могут в линейных цепях с постоянными параметрами? 5. Как из характеристик для мгновенных значений можно получить ВАХ для первых гармоник и ВАХ для действующих значений величин? 6. Проанализируйте зависимость индуктивного сопротивления для нелинейной индуктивной катушки от амплитуды приложенного напряжения при неизменной частоте $\omega$. 7. Качественно начертите семейство ВАХ управляемой индуктивной катушки и управляемого нелинейного конденсатора и сопоставьте их. 8. Чем объяснить, что ВАХ управляемой нелинейной индуктивной катушки (см. рис. 15.14, *б*) имеют насыщение по напряжению, а ВАХ управляемого нелинейного конденсатора (см. рис. 15.14, *в*) — по току? 9. Чем можно объяснить, что постоянная составляющая заряда $Q_0$ на нелинейном конденсаторе зависит от амплитуды $Q_m$ первой гармоники заряда? 10. Начертите схемы замещения электронной лампы и биполярного и полевого транзисторов для малых переменных составляющих. 11. Охарактеризуйте основные положения известных вам методов расчета периодических процессов нелинейных цепей. 12. Сформулируйте условия нахождения моментов времени открытия и закрытия диодов. 13. Покажите, что для перемагничивания сердечника нелинейной индуктивной катушки от $-\psi_m$ до $+\psi_m$ под действием напряжения $u(t)$ необходимо выполнить условие $2\psi_m=\int_0^{t_1} u(t)dt$, а для перезарядки нелинейного конденсатора от $-q_m$ до $+q_m$ под действием протекающего через него тока $i(t)$ необходимо выполнить условие $2q_m=\int_0^{t_1} i(t)dt$, где $\psi_m$ — амплитуда потокосцепления; $q_m$ — заряд; $t_1$ — время перемагничивания (перезарядки). 14. Что понимают под автоколебаниями? Как выявить условия, когда они возникают? 15. В чем причина возникновения субгармонических колебаний? 16. В чем причина возникновения автомодуляции? 17. В чем отличие субгармонических колебаний от автомодуляционных? 18. В чем принципиальное отличие феррорезонанса напряжений и токов от соответствующих резонансов в линейных цепях? 19. При каких условиях в электрических цепях могут возникать триггерные явления? 20. Возможны ли триггерные явления в схеме (см. рис. 15.42, *а*), если источником питания схемы будет не источник ЭДС, а источник тока? 21. Можно ли ожидать возникновения триггерных явлений в схеме (см. рис. 15.44, *а*), если на входе ее будет источник ЭДС? 22. Что понимают под частотными характеристиками нелинейных цепей? 23. Чем принципиально отличаются частотные характеристики нелинейных цепей от частотных характеристик аналогичных линейных? 24. В чем сходство и в чем различие в построении векторных диаграмм по первым гармоникам для линейных и нелинейных цепей? 25. Дайте определение понятий "индуктивность рассеяния", "намагничивающий ток", "ток потерь". 26. Постройте векторную диаграмму трансформатора со стальным сердечником при активно-емкостной нагрузке. 27. Составьте алгоритм расчета нелинейной цепи с учетом первой и одной из высших гармоник. 28. К нелинейному резистору с симметричной характеристикой приложено периодическое напряжение без постоянной составляющей. Можно ли утверждать, что протекающий через него ток не может содержать постоянную составляющую? 29. Решите задачи 10.9; 10.10; 10.20; 10.23; 10.37; 10.38; 10.39; 10.41; 10.48; 10.58; 10.61.

# ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

**§ 16.1. Общая характеристика методов анализа и расчета переходных процессов.** Методы анализа и расчета переходных процессов в нелинейных цепях могут быть классифицированы: а) по виду основных операций, которые необходимо выполнять для интегрирования нелинейных дифференциальных уравнений, — на графические (графоаналитические) и аналитические; б) по характеру величины, для которой производится расчет (по мгновенным значениям токов и напряжений), по мгновенным значениям огибающих токов и напряжений (их первых гармоник) либо по мгновенным значениям медленно меняющихся средних за период внешнего воздействия значений.

Под *графическими* (*графоаналитическими*) понимают такие методы, в которых основными операциями при определении зависимости от времени искомых токов и напряжений являются графические построения, нередко сопровождаемые и некоторыми вспомогательными числовыми подсчетами.

В графических методах характеристики нелинейных элементов обычно не требуется выражать аналитически (см. § 16.2).

*Аналитическими* называют такие методы, в которых основной операцией при определении зависимости искомых токов и напряжений от времени является точное (приближенное) аналитическое интегрирование дифференциальных уравнений цепи путем использования аналитических выражений характеристик нелинейных элементов.

Рассмотрены следующие аналитические методы: 1) метод интегрируемой нелинейной аппроксимации (см. § 16.3); 2) метод кусочно-линейной аппроксимации (см. § 16.4); 3) метод медленно меняющихся амплитуд (см. § 16.6); 4) метод малого параметра (см. § 16.7); 5) метод интегральных уравнений (см. § 16.8).

Графические методы имеют следующие преимущества перед аналитическими: а) нет необходимости выражать характеристики нелинейных элементов аналитически, что позволяет избавиться от погрешностей, связанных с аналитическим представлением характеристик; б) простота учета гистерезиса и других сложных нелинейных зависимостей.

В свою очередь, аналитические методы также имеют перед графическими преимущества. Из них основным является то, что они дают возможность получить решение в общем виде, а не для какого-то одного конкретного сочетания параметров. Получить решение в общем виде желательно потому, что анализ его позволяет выяснить все особенности процесса при изменении всех параметров.

Как упоминалось, все методы расчета могут быть подразделены



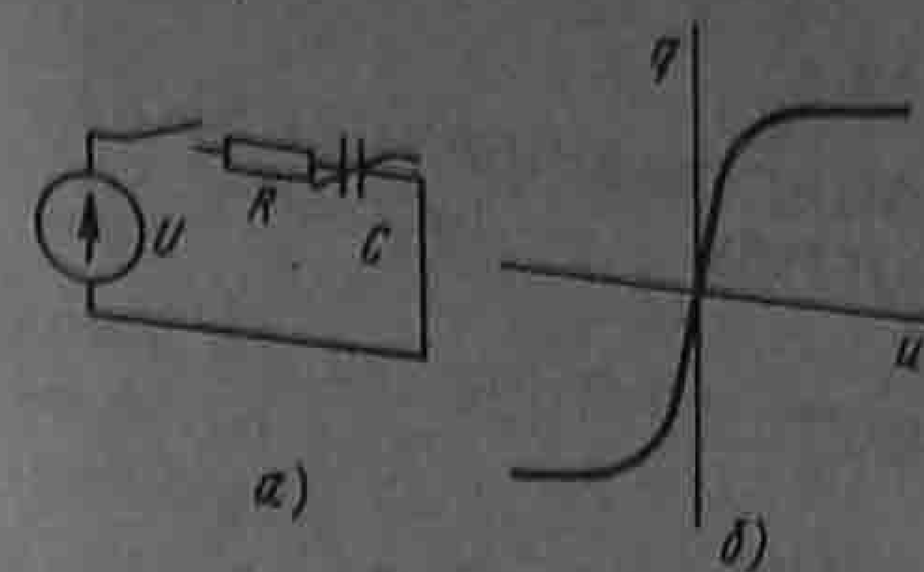



Рис. 16.1

на две подгруппы: 1) расчет по мгновенным значениям токов и напряжений; 2) расчет по мгновенным значениям огибающих токов и напряжений.

Расчет по огибающим важен, потому что он дает возможность, не вдаваясь в мелкие детали процесса внутри каждого периода действующей в схеме периодической ЭДС (внутри каждого периода автоколебаний в автоколебательной системе), судить о макроструктуре процесса. Он возможен не только для нелинейных цепей, он представляет существенный интерес и для линейных цепей.

Точность расчета по огибающим уступает точности расчета по мгновенным значениям. Однако возможность судить о макроструктуре процесса часто является решающим фактором.

Там, где это необходимо, целесообразно дополнять расчет по огибающим расчетам по мгновенным значениям. Метод расчета по огибающим представлен методом медленно меняющихся амплитуд (см. § 16.6). Остальные методы относятся к подгруппе расчета по мгновенным значениям.

Теория переходных процессов в электрических цепях с управляемыми нелинейными индуктивными, емкостными и резистивными элементами, а также в электромеханических системах и цепях с управляемыми источниками с учетом их нелинейных и частотных свойств рассмотрена в § 16.9 — 16.12.

**§ 16.2. Расчет, основанный на графическом подсчете определенного интеграла.** Метод применим к нелинейным электрическим цепям, описываемым дифференциальными уравнениями первого порядка, допускающим разделение переменных. Последняя оговорка свидетельствует о том, что метод применим к цепям постоянного и, как правило, неприменим к цепям переменного тока. Основные этапы и последовательность расчета проиллюстрируем на примере.

Нелинейный конденсатор через резистор подключается к источнику напряжения $U$ (рис. 16.1, *а*). Кулон-вольтная характеристика (КВХ) конденсатора задана графически (рис. 16.1, *б*). Полагая, что в схеме нулевые начальные условия, построить кривые изменения заряда $q$, напряжения на конденсаторе $u_C$ и тока $i$ в функции времени. Составим дифференциальное уравнение:

$$u_C(q)+R\frac{dq}{dt}=U. \qquad (16.1)$$

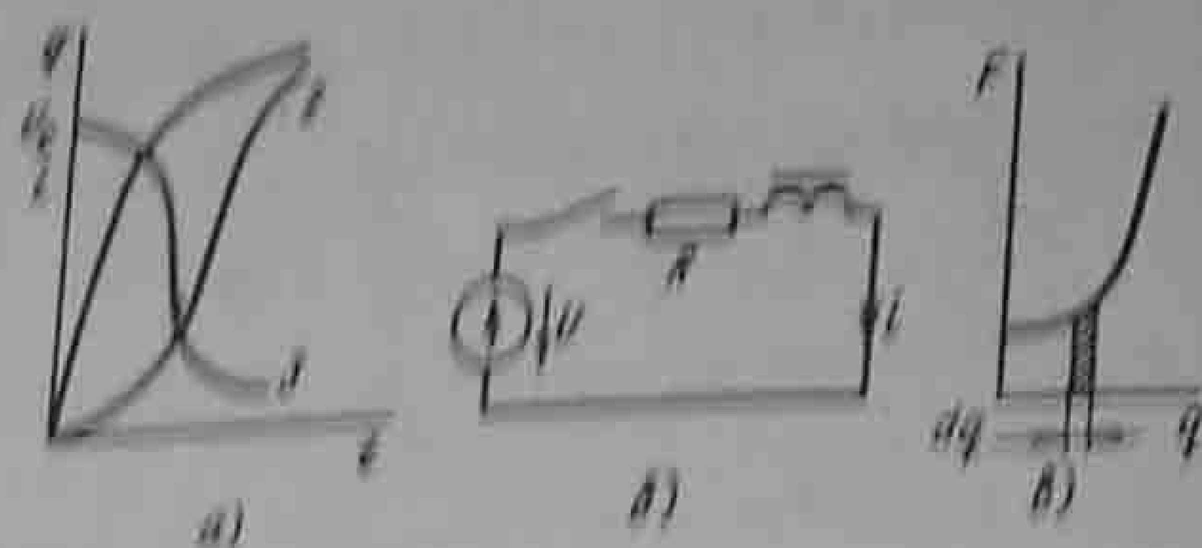


Рис. 16.2

Разделим переменные:

$$dt = R\frac{dq}{U - u_C(q)} \text{ или } dt = RF(q)dq, \quad (16.1а)$$

где

$$F(q) = \frac{1}{U - u_C(q)}. \quad (16.2)$$

Для построения кривой $F(q)$ (рис. 16.1, в) используем КВХ.

Левую часть уравнения (16.1а) проинтегрируем по $t$ от 0 до текущего значения $t$, а правую по $q$ — от $q=0$ до текущего значения $q$. В результате получим

$$t = R\int_0^q F(q)dq. \quad (16.3)$$

Графически подынтегральное выражение $F(q)dq$ представляет собой заштрихованную площадку (рис. 16.1, в).

Кривая 1 на рис. 16.2, а качественно представляет собой зависимость $q$ от $t$. С помощью кривой $q=f(t)$ и КВХ нелинейного конденсатора строят зависимость $u_C(t)$ (кривая 2).

Ток в цепи для произвольного момента времени определяется по формуле $i=(U-u_C)/R$ (кривая 3).

**§ 16.3. Расчет методом интегрируемой нелинейной аппроксимации.** Данный метод основан на аппроксимации характеристики нелинейного элемента такой нелинейной функцией, которая, во-первых, достаточно точно отображает его характеристику в предполагаемом интервале перемещения изображающей точки по ней и, во-вторых (и это главное), дает возможность точно проинтегрировать уравнение в известных функциях.

Ценность метода заключается в том, что в результате интегрирования получают зависимость исследуемой величины от времени и всех параметров схемы.

Метод применим к дифференциальным уравнениям первого порядка, а также к уравнениям, сводящимся к уравнениям первого порядка путем замены переменных.

**Пример 161.** Определить закон нарастания во времени тока при замыкании ключа в схеме (рис. 16.2, б). Зависимость тока от потокосцепления $\psi$ выражена формулой $i=k\psi^4$. В схеме нулевые начальные условия.



Р е ш е н и е. Из уравнения цепи $\frac{d\psi}{dt}+Ri=U$ следует, что $dt=\frac{d\psi}{U-Ri}$. Вынесем из знаменателя множитель $R$ и заменим $i$ на $k\psi^4$:

$$dt = \frac{1}{R}\cdot\frac{d\psi}{I_у - k\psi^4},$$

где $I_у=U/R$.

Обозначим $I_у=a^2$ и заменим $k\psi^4$ на $\psi_1^4$; $d\psi$ на $d\psi_1/\sqrt[4]{k}$. В результате получим

$$dt = \frac{1}{R\sqrt[4]{k}}\frac{d\psi_1}{a^2-\psi_1^4}; \quad \frac{1}{a^2-\psi_1^4} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{a-\psi_1^2}+\frac{1}{a+\psi_1^2}\right);$$

$$t = \frac{1}{2I_у^{0,75}Rk^{0,25}}\left(0,5\ln\frac{1+\sqrt[4]{i/I_у}}{1-\sqrt[4]{i/I_у}} + \operatorname{arctg}\sqrt[4]{i/I_у}\right). \quad (16.4)$$

С помощью (16.4) можно определить время, которое необходимо, чтобы отношение $i/I_у$ достигло заданного значения.

**§ 16.4. Расчет методом кусочно-линейной аппроксимации.** При расчете этим методом осуществляется замена характеристики нелинейного элемента отрезками прямых линий, что позволяет перейти от нелинейного дифференциального уравнения к нескольким линейным уравнениям, отличающимся друг от друга лишь значениями коэффициента.

Каждое из линейных уравнений справедливо для того интервала времени, в течение которого рабочая точка перемещается по соответствующему линеаризованному участку. Метод применим к цепям, содержащим источники постоянной и (или) синусоидальной ЭДС, а также к цепям первого и более высоких порядков.

Для сложных нелинейных цепей с источником (источниками) синусоидальной ЭДС основная трудность расчета данным методом заключается в определении постоянных интегрирования, исходя из законов коммутации и времени работы на каждом линейном участке. В сложных цепях неизвестные находят обычно из трансцендентных уравнений, часто применяют ЭВМ. Впервые идея этого метода была высказана русским физиком Н. Д. Папалекси в 1912 г.

Рассмотрим основные этапы расчета на простейшем примере.

**Пример 162.** Конденсатор емкостью $C$ заряжается через НР от источника постоянного напряжения $U$ (рис. 16.3, а). Определить закон изменения тока в цепи при зарядке.

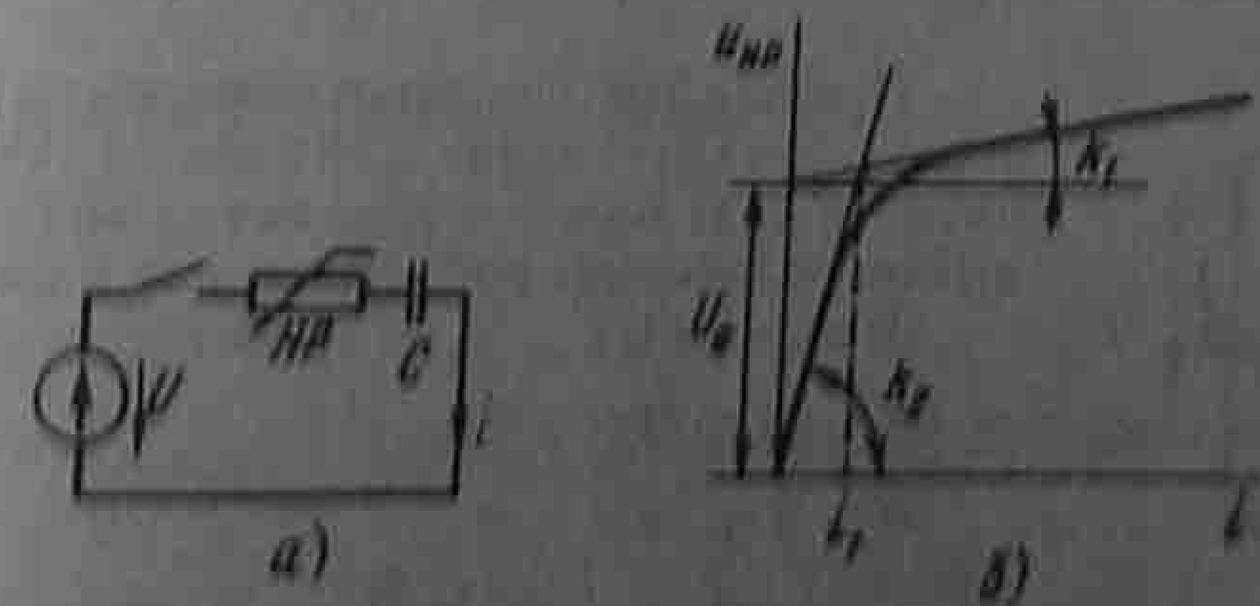


Рис. 16.3

Решение. ВАХ НР заменим двумя отрезками прямых линий (рис. 16.3, б). Пусть на участке от $i=0$ до $i=i_1$ $u_{нр}=k_2 i$, где $u_{нр}$ — напряжение на нелинейном резисторе; $k_2$ — коэффициент. На участке $i>i_1$ $u_{нр}=U_0+k_1 i$.

Размерность коэффициентов $k_1$ и $k_2$ соответствует размерности сопротивления. В уравнение цепи $u_C+u_{нр}=U$ вместо $u_C$ подставим $\frac{1}{C}\int i\,dt$, заменим $u_{нр}$ для первого участка на $U_0+k_1 i$, а для второго — на $k_2 i$.

При зарядке конденсатора ток постепенно уменьшается от максимального значения до нуля. Поэтому изображающая точка перемещается сначала по первому участку, а затем по второму.

Для первого участка $\frac{1}{C}\int i\,dt+U_0+k_1 i=U$;

для второго $\frac{1}{C}\int i\,dt+k_2 i=U$.

Для первого участка $i=i_{пр}+i_{св}=0+A_1 e^{-t/k_1C}$.

Постоянную интегрирования A1 найдем из начального условия: $t=0$, $u_C=0$. Поэтому $U_0+k_1 i(0_+)=U$ и $i(0_+)=A_1=(U-U_0)/k_1$. Следовательно, при работе на первом участке

$$i=\frac{U-U_0}{k_1}e^{-t/k_1C}. \qquad (16.5)$$

Пусть при $t=t_1$ ток $i=i_1$. Подставим в (16.5) $i_1$ вместо $i$ и $t_1$ вместо $t$ и решим полученное уравнение относительно $t_1$:

$$t_1=k_1C\ln\frac{U-U_0}{k_1 i_1}. \qquad (16.6)$$

При работе на втором участке $i=A_2 e^{-\frac{(t-t_1)}{k_2C}}$, причем $A_2=i_1$.

**§ 16.5. Расчет переходных процессов в нелинейных цепях методом переменных состояния на ЭВМ.** Рассмотрим методику расчета, используя понятия дифференциальной индуктивности индуктивной катушки $L_{диф}(i)=\frac{d\psi}{di}$ и дифференциальной емкости $C_{диф}(u_C)=\frac{dq}{du_C}$ нелинейного конденсатора.

Если вебер-амперная характеристика индуктивной катушки $i=\alpha \operatorname{sh}\beta\psi$, то $L_{диф}(i)=\frac{1}{\alpha\beta\sqrt{1+(i/\alpha)^2}}$. Если кулон-вольтная характеристика конденсатора $u_C=a\operatorname{sh}bq$, то $C_{диф}(u_C)=\frac{1}{ab\sqrt{1+\left(\frac{u_C}{a}\right)^2}}$.

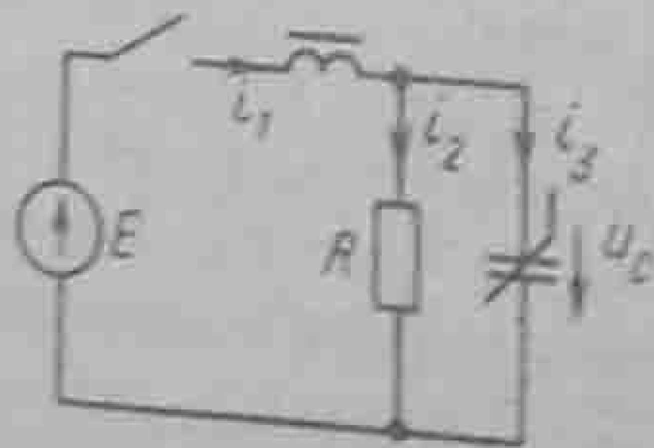


Рис. 16.4

Пример 163. Составить систему уравнений по методу переменных состояния для схемы (рис. 16.4) при нулевых начальных условиях и указанных на рисунке положительных направлениях отсчетов токов и напряжений.

Решение. Из уравнения $i_1=i_2+i_3$ следует $i_1=\frac{u_C}{R}+\frac{dq}{du_C}\frac{du_C}{dt}=\frac{u_C}{R}+C_{диф}(u_C)\frac{du_C}{dt}$. Из уравнения $\frac{d\psi}{dt}+u_C=E$ имеем $\frac{d\psi}{di}\frac{di}{dt}+u_C=E$ или $L_{диф}(i)\frac{di}{dt}+u_C=E$.



Искомая система уравнений:

$$\frac{du_C}{dt}=-\frac{1}{RC_{диф}(u_C)}u_C+\frac{1}{C_{диф}(u_C)}i+0E; \qquad (16.7)$$

$$\frac{di}{dt}=-\frac{1}{L_{диф}(i)}U_C+0\cdot i+\frac{1}{L_{диф}(i)}E. \qquad (16.8)$$

Значения $L_{диф}(i)$ и $C_{диф}(u_C)$ на $(k+1)$-шаге интегрирования подсчитывают по значениям $i$ и $u_C$ на $k$-м шаге.

**§ 16.6. Метод медленно меняющихся амплитуд.** В электро- и радиотехнике для расчета переходных процессов широко применяют метод медленно меняющихся амплитуд. Этот метод был предложен в 1921 г. голландским ученым Ван-дер-Полем.

Рассмотрим основы этого метода на примере нелинейной цепи второго порядка, находящейся под воздействием периодической возмущающей силы.

Пусть уравнение этой цепи записано следующим образом:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+f(x)\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=A\sin\omega t. \qquad (16.9)$$

Под действием периодической силы с частотой $\omega$ в цепи устанавливается вынужденное колебание, первая гармоника которого имеет частоту $\omega$. Полагаем, что высшие гармоники выражены слабо.

Искомая функция $x(t)$ может быть представлена как

$$x=a\sin\omega t+b\cos\omega t, \qquad (16.10)$$

где $a$ и $b$ — медленно меняющиеся во времени амплитуды искомого колебания.

Медленность изменения $a$ и $b$ во времени определяется тем, что их производные по времени являются величинами первого порядка малости по сравнению с произведениями $\omega a$ и $\omega b$:

$$\frac{da}{dt}\ll\omega a,\quad \frac{db}{dt}\ll\omega b. \qquad (16.11)$$

Если это учесть, то, вместо того чтобы взять

$$\frac{dx}{dt}=a\omega\cos\omega t-b\omega\sin t+\sin\omega t\frac{da}{dt}+\cos\omega t\frac{db}{dt}, \qquad (16.12)$$

можно в первом приближении принять

$$\frac{dx}{dt}\approx a\omega\cos t-b\omega\sin\omega t. \qquad (16.13)$$

Аналогично, вместо того чтобы вторую производную брать в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2}\approx-\omega^2a\sin\omega t-\omega^2b\cos\omega t+\omega\cos\omega t\frac{da}{dt}-$$

$$-\omega\sin\omega t\frac{db}{dt}+\frac{d^2a}{dt^2}\sin\omega t+\frac{d^2b}{dt^2}\cos\omega t+$$

$$+\omega\cos\omega t\frac{da}{dt}-\omega\sin\omega t\frac{db}{dt},$$

пренебрежем в ней слагаемыми второго порядка малости (учтем, что $\frac{d^2a}{dt^2}\ll\omega\frac{da}{dt}$ и $\omega\frac{d^2b}{dt^2}\ll\frac{db}{dt}$) и оставим слагаемые первого порядка малости. В результате получим

$$\frac{d^2x}{dt^2}\approx-\left(\omega^2a+2\omega\frac{db}{dt}\right)\sin\omega t+\left(-\omega^2b+2\omega\frac{da}{dt}\right)\cos\omega t. \quad (16.14)$$

Обратим внимание на то, что слагаемые первого порядка малости оставлены в выражении для $d^2x/dt^2$ и их не учитывают в выражении для $dx/dt$. Объясняется это тем, что исследуемая цепь обладает малыми потерями, поэтому амплитуда второго слагаемого левой части (16.9) относительно мала по сравнению с амплитудами первого и третьего слагаемых левой части (16.9).

В функцию $f(x)$ вместо $x$ подставим (16.10) и разложим $f(x)$ в ряд Фурье. Затем умножим ряд Фурье, которым выразилось $f(x)$ на $dx/dt$ [на правую часть (16.13)]. Таким образом,

$$f(x)\frac{dx}{dt}=F_0(a,b)+F_1(a,b)\sin\omega t+F_2(a,b)\cos\omega t+$$

$$+F_3(a,b)\sin 2\omega t+F_4(a,b)\cos 2\omega t+\ldots \quad (16.15)$$

Так как расчет ведется по первой гармонике, то постоянной составляющей $F_0(a,b)$ и высшими гармониками ряда Фурье [$F_3(a,b)$, $F_4(a,b)$ и др.] в дальнейшем пренебрегаем.

В (16.9) подставим правую часть (16.14) вместо $d^2x/dt^2$, $F_1(a,b)\sin\omega t+F_2(a,b)\cos\omega t$ вместо $f(x)dx/dt$ и $\omega_0^2(a\sin\omega t+b\cos\omega t)$ вместо $\omega_0^2x$.

Тогда (16.9) можно разбить на два уравнения. Одно из них [уравнение (16.9)] будет выражать собой равенство коэффициентов при $\cos\omega t$ в левой и правой частях (16.9), другое [уравнение (16.17)] — равенство коэффициентов при $\sin\omega t$ в левой и правой частях (16.9):

$$-2\omega\frac{db}{dt}+F_1(a,b)+a(\omega_0^2-\omega^2)=A; \quad (16.16)$$

$$2\omega\frac{da}{dt}+F_2(a,b)+b(\omega_0^2-\omega^2)=0. \quad (16.17)$$

Система уравнений (16.16) и (16.17) представляет собой два совместных дифференциальных уравнения, составленных относительно мгновенных значений медленно меняющихся амплитуд $a$ и $b$.

В общем случае решение этой системы может производиться методом малого параметра или методами численного интегрирования. В частном случае, когда внешняя периодическая сила равна нулю ($A=0$) и функция $F_1(a,b)=0$, система сводится к одному дифференциальному уравнению первого порядка

$$\frac{da}{dt}=-\frac{F_2(a)}{2\omega}\;(b=0). \quad (16.18)$$



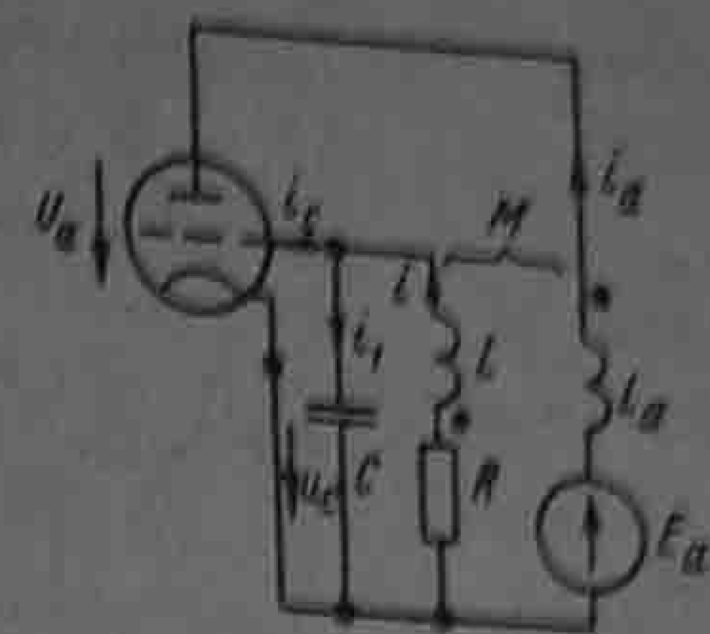


Рис. 16.5

Ранее были рассмотрены основные этапы перехода от дифференциального уравнения для мгновенных значений [уравнение (16.9)] к дифференциальным уравнениям для медленно меняющихся амплитуд. Метод применим и к уравнениям более высоких порядков.

В заключение необходимо отметить, что если максимальное значение слагаемого $f(x)dx/dt$ в (16.9) (и подобных ему), выражающее собой падение напряжения в активном сопротивлении контура (контуров), соизмеримо с максимальными значениями остальных слагаемых (16.9), то в выражении $dx/dt$ должны быть сохранены слагаемые первого порядка малости, которыми ранее пренебрегли. Огибающая колебаний определяется уравнением

$$f(t)=\sqrt{a^2(t)+b^2(t)}.$$

**Пример 164.** Определить закон нарастания амплитуды напряжения на сетке в ламповом автогенераторе (рис. 16.5).

В соответствии с обозначениями на рис. 16.5 составим уравнение по второму закону Кирхгофа для сеточной цепи:

$$L\frac{di}{dt}-M\frac{di_a}{dt}+Ri+u_C=0. \quad (а)$$

Подставим в него $i=C\frac{du_C}{dt}$. Получим

$$LC\frac{d^2u_C}{dt^2}-M\frac{di_a}{dt}+RC\frac{du_C}{dt}+u_C=0.$$

Анодный ток $i_a$ выразим через сеточное напряжение [см. (15.40)]: $i_a=i_{a0}+a'u_C-bu_C^3$.

Но $\frac{di_a}{dt}=(a'-3bu_C^2)\frac{du_C}{dt}$. Подставим $\frac{di_a}{dt}$ в (а):

$$LC\frac{d^2u_C}{dt^2}+(RC-a'M+3bMu_C^2)\frac{du_C}{dt}+u_C=0.$$

Поделим последнее уравнение на $LC=1/\omega_0^2$, где $\omega_0$ — угловая частота автоколебаний, и обозначим

$$k_1=\frac{Ma'-RC}{LC};\quad k_2=\frac{3bM}{Ma'-RC}, \quad (16.19)$$

Получим

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} - k_1(1 - k_2u_C^2)\frac{du_C}{dt} + \omega_0^2u_C = 0. \quad (16.20)$$

Примем

$$x = u_C\sqrt{k_2}; \quad \frac{du_C}{dt} = \frac{1}{\sqrt{k_2}}\frac{dx}{dt}; \quad \frac{d^2u_C}{dt^2} = \frac{1}{\sqrt{k_2}}\frac{d^2x}{dt^2}.$$

Тогда

$$\frac{d^2x}{dt^2} - k_1(1 - x^2)\frac{dx}{dt} + \omega_0^2x = 0. \quad (16.21)$$

Множитель $-k_1(1 - x^2)$ и представляет собой функцию $f(x)$ уравнения (16.9). Так как на систему не действует внешняя периодическая сила и частота автоколебаний равна $\omega_0$, а не $\omega$, то примем

$$x = a\sin\omega_0t, \quad \frac{dx}{dt} \approx a\omega_0\cos\omega_0t; \quad (16.22)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} \cong 2\omega_0\frac{da}{dt}\cos\omega_0t - \omega_0^2a\sin\omega_0t. \quad (16.23)$$

Подставим (16.22) и (16.23) в (16.21) и учтем, что

$$\sin^2\omega_0t\cos\omega_0t = 0{,}25(\cos\omega_0t - \cos3\omega_0t);$$

$$2\omega_0\cos\omega_0t\frac{da}{dt} - a\omega_0^2\sin\omega_0t + a\omega_0^2\sin\omega_0t - k_1a\omega_0\cos\omega_0t +$$

$$+ 0{,}25k_1\omega_0a^3(\cos\omega_0t - \cos3\omega_0t) = 0.$$

Так как расчет ведем по медленно изменяющейся по амплитуде первой гармонике, то слагаемое с $\cos3\omega_0t$ не учитываем. Следовательно,

$$2\frac{da}{dt} = ak_1(1 - 0{,}25a^2). \quad (16.24)$$

Введя новую переменную $y = 0{,}25a^2$, получим

$$\frac{dy}{dt} = k_1y(1 - y). \quad (16.25)$$

Уравнение (16.25) — это уравнение с разделяющимися переменными

$$k_1t = \int\frac{dy}{y(1 - y)}; \quad k_1t = -\ln C_0 + \ln\frac{y}{1 - y};$$

где $\ln C_0$ — постоянная интегрирования: $\frac{y}{1 - y} = C_0e^{k_1t}$; $y = \frac{C_0e^{k_1t}}{1 + C_0e^{k_1t}} = \frac{1}{1 + C_1e^{-k_1t}}$; $C_1 = 1/C_0$; $a = 2\sqrt{y} = \frac{2}{\sqrt{1 + C_1e^{-k_1t}}}$; $x = a\sin\omega_0t = \frac{2}{\sqrt{1 + C_1e^{-k_1t}}}\sin\omega_0t$.

Амплитуда напряжения на конденсаторе изменяется во времени следующим образом:



$$U_C = \frac{a}{\sqrt{k_2}} = \frac{2}{\sqrt{1 + C_1e^{-k_1t}}}\sqrt{\frac{a'M - RC}{3bM}}. \quad (16.26)$$

Постоянную интегрирования $C_1$ определим по начальному значению. Если при $t = 0$ $U_C = U_C(0_-)$, то

$$C_1 = \frac{4}{U_C^2(0_-)}\cdot\frac{a'M - RC}{3bM} - 1.$$

Мгновенное значение напряжения на конденсаторе

$$u_C = U_C\sin\omega_0t. \quad (16.27)$$

## § 16.7. Метод малого параметра.

Нелинейные дифференциальные уравнения иногда решают путем последовательных приближений, представляя искомую величину $x$ в виде ряда по степеням некоторого коэффициента $\mu$, который называют *малым параметром*:

$$x = x_0 + \mu x_1 + \mu^2x_2 + \ldots, \quad (16.28)$$

где $x_0$ — решение уравнения нулевого приближения (последнее получают из исходного, полагая, что все нелинейные члены в исходном уравнении отсутствуют); $x_1$ — решение уравнения первой поправки, которая учитывает влияние нелинейных членов в первом приближении; $x_2$ — решение уравнения второй поправки, и т. д.

Если исходное уравнение является дифференциальным уравнением второго или более высокого порядка, а принужденный режим представляет собой колебательный процесс, то квадрат угловой частоты первой гармоники $\omega^2$ или первую степень $\omega$ также разлагают в ряд по малому параметру:

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \mu f_1 + \mu^2f_2,$$

где $\omega_0^2$ — квадрат угловой частоты в нулевом приближении, когда всеми нелинейными членами пренебрегают; $\mu f_1$ — поправка первого приближения, вызванная нелинейными членами уравнения; $\mu^2f_2$ — поправка второго приближения, и т. д.

Последовательность решения рассмотрим на двух примерах.

1. При $x(0) = 0$ решить уравнение

$$\frac{dx}{dt} + x^2 = 1. \quad (16.29)$$

К такому уравнению, например, сводится задача о переходном процессе в цепи, состоящей из индуктивной катушки с нелинейной ВАХ и линейного резистивного сопротивления, при подключении ее к источнику постоянного напряжения и при квадратичной аппроксимации зависимости потокосцепления от тока.

Линейные члены уравнения переносим в левую часть, а нелинейные, умножив на некоторый малый параметр $\mu$, — в правую (в примере $\mu = 1$):

$$\frac{dx}{dt} - 1 = -\mu x^2. \qquad (16.30)$$

Представим решение (16.29) в виде ряда по степеням $\mu$:

$$x = x_0 + \mu x_1 + \mu^2 x_2 + \dots . \qquad (16.31)$$

Подставим (16.31) в (16.30):

$$\frac{dx_0}{dt} + \mu\frac{dx_1}{dt} + \mu^2\frac{dx_2}{dt} - 1 = -\mu x_0^2 - \mu^2 2x_0x_1 - \mu^3(x_1^2 + 2x_0x_2). \qquad (16.32)$$

Из (16.32) образуем систему уравнений, приравняв члены левой и правой частей его при одинаковых степенях $\mu$:

$$\frac{dx_0}{dt} - 1 = 0 \text{ — уравнение нулевого приближения;} \qquad (16.33)$$

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_0^2 \text{ — уравнение для первой поправки;} \qquad (16.34)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -2x_0x_1 \text{ — уравнение для второй поправки.} \qquad (16.35)$$

Проинтегрируем (16.33): $x_0 = t + C_0$.

Постоянную $C_0 = 0$ определили из начальных условий.

Подставим $x_0 = t$ в уравнение (16.34) и проинтегрируем его:

$$x_1 = -\frac{t^3}{3} + C_1.$$

Для первой поправки начальные условия также нулевые, поэтому $C_1 = 0$; $x_1 = -\frac{t^3}{3}$. Подставим значения $x_0$ и $x_1$ в (16.35):

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{2t^4}{3}, \quad x_2 = \frac{2t^5}{15} + C_2, \quad C_2 = 0.$$

В соответствии с (16.31)

$$x = t - \frac{t^3}{3} + \frac{2t^5}{15}. \qquad (16.36)$$

Аналогичным путем можно было бы получить и последующие члены ряда (16.31). Так как уравнение (16.29) имеет точное решение $x = \mathrm{th}\,t$, то, взяв в разложении $\mathrm{th}\,t$ три первых члена ряда, можно убедиться, что они совпадают с правой частью (16.36).

2. Решить уравнение для лампового генератора (вывод уравнения см. в примере 164 при начальных условиях $x(0) = A_0$ $x'(0) = 0$):

$$\frac{d^2x}{dt^2} - k_1(1 - x^2)\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0. \qquad (16.37)$$

Коэффициент $k_1$ при нелинейном члене в дальнейшем будем считать малым параметром и обозначим $\mu$. В соответствии с предыдущим

$$x = x_0 + \mu x_1 + \mu^2 x_2 + \dots,$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \mu f_1 + \mu^2 f_2 + \dots . \qquad (16.38)$$



В уравнении (16.37) вместо $x$ подставим правую часть (16.38) и $\omega^2 - \mu f_1 - \mu^2 f_2$ вместо $\omega_0^2$:

$$\frac{d^2x_0}{dt^2} + \mu\frac{d^2x_1}{dt^2} + \mu^2\frac{d^2x_2}{dt^2} - \mu[1 - (x_0 + \mu x_1 + \mu^2 x_2 + \dots)^2]\left(\frac{dx_0}{dt} + \mu\frac{dx_1}{dt} + \mu^2\frac{dx_2}{dt} + \dots\right) + (\omega^2 - \mu f_1 - \mu^2 f_2)(x_0 + \mu x_1 + \mu^2 x_2 + \dots) = 0. \qquad (16.39)$$

Образуем из (16.39) три уравнения, соответствующие $\mu$ в нулевой, первой и второй степенях:

$$\frac{d^2x_0}{dt^2} + \omega_0^2 x_0 = 0; \qquad (16.40)$$

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + \omega^2 x_1 = (1 - x_0^2)\frac{dx_0}{dt} + x_0 f_1; \qquad (16.41)$$

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} + \omega^2 x_2 = (1 - x_0^2)\frac{dx_1}{dt} - 2x_0x_1\frac{dx_0}{dt} + f_1x_1 + f_2x_0. \qquad (16.42)$$

Проинтегрируем (16.40): $x_0 = A_0\cos\omega t$.

Подставив $x_0$ в (16.41) и учтя, что $\sin\alpha\cos^2\alpha = 0{,}25\sin\alpha + 0{,}25\sin 3\alpha$, получим

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + \omega^2 x_1 = -\omega A_0(1 - 0{,}25A_0^2)\sin\omega t + A_0 f_1\cos\omega t + 0{,}25\omega A_0^3\sin 3\omega t. \qquad (16.43)$$

Уравнение (16.43) можно трактовать следующим образом: на колебательный $LC$-контур без потерь [левая часть уравнения (16.43)] воздействуют вынуждающая сила с угловой частотой $\omega$, равной собственной частоте колебательного контура, и сила с угловой частотой, в три раза большей.

Известно, что если подключить колебательный $LC$-контур, имеющий активное сопротивление $R \to 0$, к источнику синусоидальной ЭДС $E_m\sin\omega t$ при оговоренных условиях, то амплитуда тока в цепи будет нарастать до бесконечности. Действительно,

$$i = i_{\text{пр}} + i_{\text{св}} = \frac{E_m}{R}\sin\omega t - \frac{E_m}{R}e^{-\delta t}\sin(\omega t + \nu).$$

При $R \to 0$ $\nu \to 0$ и $\delta = R/(2L) \to 0$.

Разложим $e^{-\delta t}$ в ряд и, учитывая малость $\delta$, возьмем два первых члена ряда. В результате получим $i \approx \frac{E}{2L}t\sin\omega t$.

Такие члены в решении дифференциальных уравнений, амплитуды которых нарастают теоретически до бесконечности при увеличении времени $t$, называют *вековыми*. При дальнейшем решении уравнения (16.43) необходимо помнить о том, что амплитуды вековых членов должны оказаться равными нулю при любом $t > 0$.

Решение (16.43) запишем следующим образом:

$$x_1 = A_1\sin\omega t + B_1\cos\omega t + (C_1\sin\omega t + D_1\cos\omega t)t + E_1\sin 3\omega t + F_1\cos 3\omega t. \qquad (16.44)$$

Первое и второе слагаемые представляют собой полное решение однородного уравнения; четвертое и пятое — частное решение неоднородного уравнения. Третье

слагаемое представляет собой вековой член. Его можно было бы не вводить в дальнейшие выкладки по определению коэффициентов $A_1, B_1, E_1, F_1, C_1, D_1$, однако введем его, чтобы показать, что его присутствие выкладкам не помешает.

Дважды продифференцируем (16.44) по времени:

$$\ddot{x}_1 = -A_1\omega^2\sin\omega t - B_1\omega^2\cos\omega t + C_1\omega\cos\omega t - D_1\omega\sin\omega t + \omega(C_1\cos\omega t - D_1\sin\omega t) - t\omega^2(C_1\sin\omega t + D_1\cos\omega t) - 9\omega^2E_1\sin3\omega t - 9\omega^2F_1\cos3\omega t. \quad (16.45)$$

Подставим (16.44) и (16.45) в (16.43), выделим из левой и правой частей (16.43) слагаемые соответственно с $\sin\omega t$ [формула (16.46)], $\cos\omega t$ [формула (16.47)], $\sin3\omega t$ [формула (16.48)], $\cos3\omega t$ [формула (16.49)]:

$$D_1 = 0{,}5A_0(1 - 0{,}25A_0^2); \quad (16.46)$$

$$2\omega C_1 = A_0 f_1; \quad (16.47)$$

$$-8\omega^2E_1 = 0{,}25\omega A_0^3; \quad (16.48)$$

$$8\omega^2F_1 = 0. \quad (16.49)$$

Слагаемые (16.43) с вековыми членами дают нуль:

$$t(C_1\sin\omega t + D_1\cos\omega t)(\omega^2 - \omega^2) = 0. \quad (16.50)$$

Используем также заданные начальные условия для определения $A_1, B_1, C_1, D_1, F_1, E_1$. Так как начальные условия уже были удовлетворены при определении $x_0$, то для всех последующих приближений начальные условия нулевые. Имея это в виду, из (16.44) находим $x_1(0) = B_1 + F_1 = 0$.

В соответствии с (16.49) $F_1 = 0$, поэтому $B_1 = 0$. Из уравнения (16.44), используя условие $x_1'(0) = 0$, получим

$$\omega A_1 + D_1 + 3\omega E_1 = 0.$$

Но $D_1$ и $F_1$ известны из (16.44) и (16.48), поэтому

$$A_1 = -3E_1 = \frac{3}{32\omega}A_0^3.$$

Поправку на угловую частоту $f_1$, а вместе с тем и значение $A_0$ найдем исходя из того, что амплитуда векового члена должна быть равна нулю при любом $t > 0$. Отсюда $C_1 = 0$ и $D_1 = 0$.

Из (16.47) следует, что $f_1 = 0$, а из (16.46) — что $A_0 = 2$:

$$A_1 = \frac{3}{32\omega}A_0^3, B_1 = 0, C_1 = D_1 = 0, E_1 = -\frac{A_0^3}{32\omega}, F_1 = 0, \omega = \omega_0.$$

Ограничившись первым приближением и перейдя от $\mu$ к $k_1$, получим

$$x = x_0 + \mu x_1 = A_0\cos\omega t + k_1\left(\frac{3}{32\omega}A_0^3\sin\omega t - \frac{A_0^3}{32\omega}\sin3\omega t\right).$$

Первое приближение привело к изменению амплитуды первой гармоники с $A_0 = 2$ до $2\sqrt{1 + \left(\frac{0{,}75k_1}{2\omega}\right)^2}$ и к появлению третьей гармоники.

Угловая частота первой гармоники в первом приближении не изменилась и равна угловой частоте $\omega_0$ нулевого приближения. Аналогичным образом производится и второе приближение. Однако каждое последующее приближение по сравнению с предыдущим более трудоемко.



В основу данного метода положены работы французского математика Пуанкаре по небесной механике. Метод называют методом малого параметра потому, что в нем производят разложение решения в ряд по степеням малого параметра. Насколько этот параметр должен быть мал в каждом примере, заранее сказать нельзя. Важно, чтобы ряды для $x$ и для $\omega^2$ или $\omega$ сходились. Если ряды будут сходиться медленно или вообще не будут сходиться, то пользоваться этим методом не имеет смысла.

**§ 16.8. Метод интегральных уравнений.** От нелинейного дифференциального уравнения можно перейти к интегральному, используя одну из форм записи интеграла Дюамеля. Поясним идею этого перехода. Решение линейного дифференциального уравнения, например уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a_1\frac{dx}{dt} + a_0x = f(t), \quad (а)$$

может быть записано в виде

$$x(t) = f(t)g(0) + \int_0^t f(\tau)g'(t-\tau)\,d\tau. \quad (б)$$

Под $g(t)$ понимают переходную проводимость, либо переходную функцию в зависимости от того, чем является $x$ по отношению к вынуждающей силе $f(t)$; $g(t)$ определим как решение (а) при $f(t) = 1$.

Если исходное уравнение нелинейно, например

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a_1\frac{dx}{dt} + a_0x + bx^2 = f(t),$$

то нелинейный член $bx^2$ можно перенести в правую часть и рассматривать как внутреннюю вынуждающую силу:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a_1\frac{dx}{dt} + a_0x = f(t) - bx^2. \quad (в)$$

Используя (б), запишем решение уравнения (в):

$$x = [f(t) - bx^2(t)]g(0) + \int_0^t [f(\tau) - bx^2(\tau)]g'(t-\tau)\,d\tau. \quad (г)$$

Переходная функция $g(t)$ определяется по линейной части исходного нелинейного дифференциального уравнения при воздействии на нее $1(t)$. Уравнение (г) является интегральным уравнением по типу Вольтерра второго рода. Его можно решать методом последовательных приближений, полагая $x_0(t) = x(0)$ и пользуясь таким соотношением для $k$-го приближения:

$$x_k(t) = [f(t) - bx_{k-1}^2(t)]g(0) + \int_0^t [f(\tau) - bx_{k-1}^2(\tau)]g'(t-\tau)\,d\tau.$$

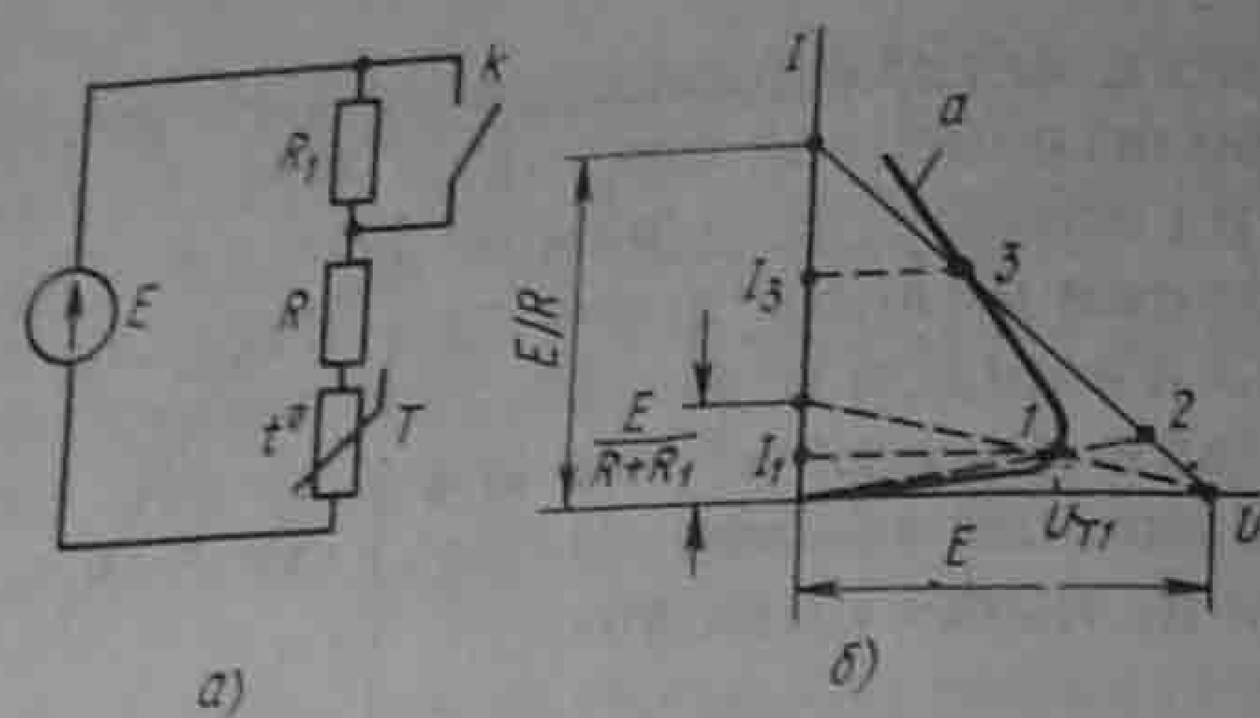



Рис. 16.6

Метод имеет смысл применять только в том случае, когда процесс последовательных приближений является сходящимся.

**Пример 165.** Решить уравнение $\frac{dx}{dt} + x^2 = 1$ при $x(0) = 0$.

Р е ш е н и е. Для определения $g(t)$ на линейную часть системы воздействуем единичным напряжением $\frac{dx}{dt} = 1$; $g(t) = t$; $g'(t) = 1$; $g(0) = 0$; $g'(t - \tau) = 1$. Записываем рекуррентное соотношение:

$$x_k(t) = \int_0^t [1 - x_{k-1}^2(\tau)]d\tau;$$

$$x_1 = \int_0^t d\tau = t; \quad x_2 = \int_0^t (1 - \tau^2)d\tau = t - \frac{t^3}{3};$$

$$x_3 = \int_0^t [1 - (\tau - \frac{\tau^3}{3})^2]d\tau = t - \frac{t^3}{3} + \frac{2t^5}{15} - \frac{t^7}{63}.$$

**§ 16.9. Переходные процессы в цепях с терморезисторами.** Методику рассмотрим на примере схемы (рис. 16.6, *а*). Переходный процесс вызван замыканием ключа *K*. Полагаем, что температура окружающей среды $\Theta$ неизменна. ВАХ термистора при температуре $\Theta$ представлена на рис. 16.6, *б* кривой *а*. Установившийся режим до коммутации определяется точкой *1*, после коммутации — точкой *3*. Сразу после коммутации сопротивление термистора (он обладает большой постоянной времени) остается равным его сопротивлению до коммутации $R_{T1} = \frac{U_{T_1}}{I_1}$. При коммутации изображающая точка скачком перемещается из положения *1* в положение *2*. После этого она по некоторой траектории перемещается из *2* в *3*. Режим в точке *3* будем полагать устойчивым (в § 3.10 [20] разобрано, как исследовать устойчивость этого режима). Переходный процесс описывается уравнением теплового баланса



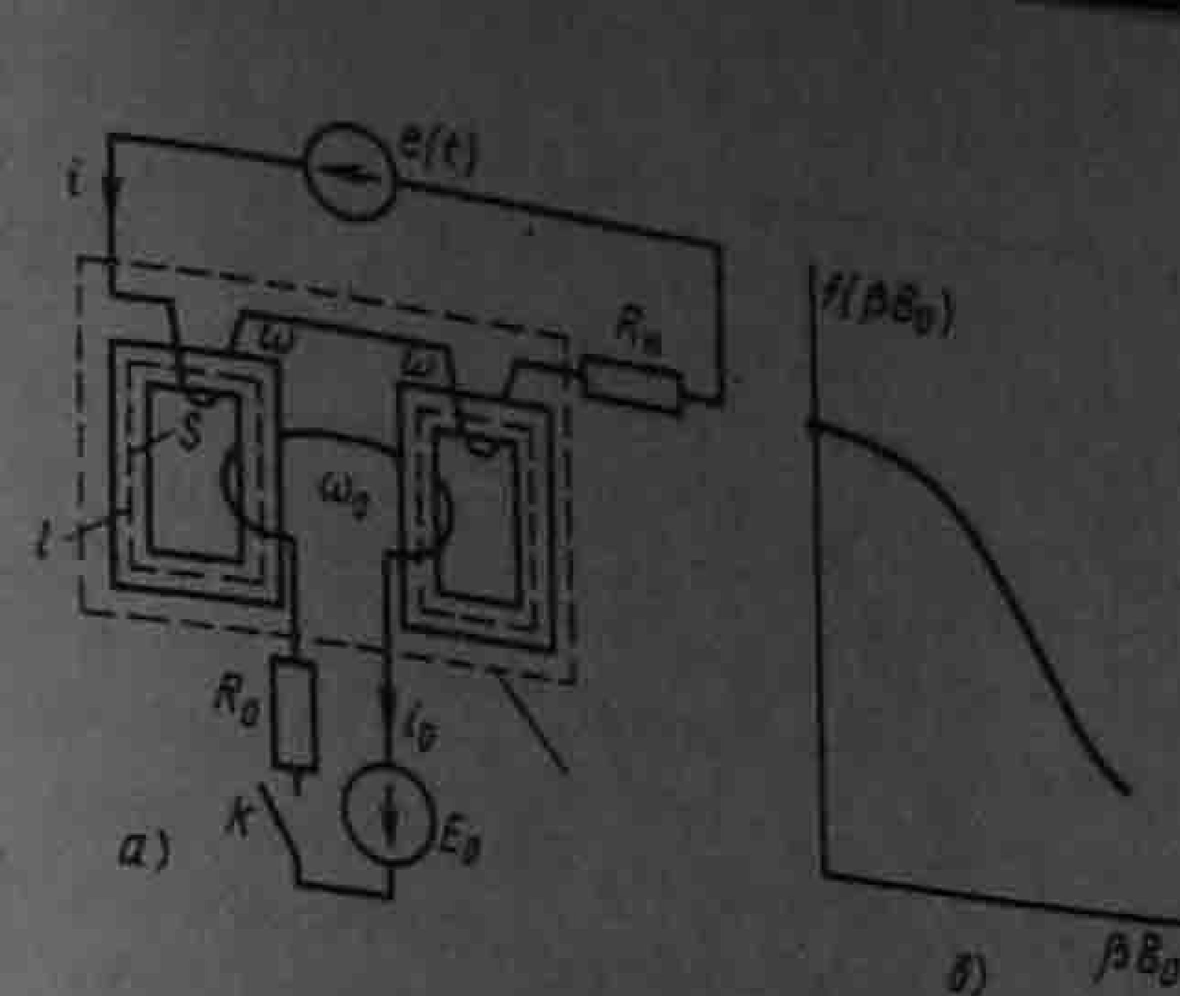



Рис. 16.7

$$C_T \frac{dT}{dt} + k(T - \Theta) = I^2 R_T, \qquad (а)$$

где $C_T \frac{dT}{dt}$ — теплота, идущая на увеличение теплосодержания тела термистора; $C_T$ — удельная теплоемкость; $T$ — среднеобъемная абсолютная температура тела термистора; $k(T - \Theta)$ — теплота, отдаваемая в окружающее пространство; $I^2 R_T$ — теплота, выделяемая в термисторе.

Полагаем, что за время переходного процесса $k$ и $C_T$ практически неизменны. Сопротивление термистора $R_T = R_\infty e^{B/T}$ (см., например, [20]); $R_\infty$ — сопротивление термистора при $T \to \infty$; $B = \frac{\Delta E}{2k_1}$, где $\Delta E$ — усредненная энергия активации, $k_1$ — постоянная Больцмана. Например, для термистора ММТ-1 $B = 4600k$ и $R_\infty = 5{,}5$ Ом. Из уравнения (а) следует, что

$$t = C_T \int_{T_1}^{T} \frac{dT}{F(T)}. \qquad (б)$$

Здесь

$$F(T) = \left(\frac{E}{R + R_\infty e^{B/T}}\right)^2 R_\infty e^{B/T} - k(T - \Theta). \qquad (в)$$

Верхний предел интеграла в (б) изменяется от $T_1$ до $T_3$:

$$T_1 = \frac{B}{\ln(R_{T_1}/R_\infty)}; \; T_3 = \frac{B}{\ln(R_{T_3}/R_\infty)}; \; R_{T_3} = \frac{U_{T_3}}{I_3}.$$

**§ 16.10. Переходные процессы в цепях с управляемыми нелинейными индуктивными элементами.**

Типичный представитель такого класса цепей представлен на рис. 16.7, *а*. Управляемая цепь образована источником синусои-

дальной ЭДС $e(t) = E_m\sin(\omega t + \varphi)$, двумя обмотками $w$ нелинейного индуктивного элемента, расположенными на двух одинаковых магнитных сердечниках (сечением $S$, длиной средней магнитной линии $l$), и резистором сопротивлением $R_н$.

Управляющая цепь образована источником постоянной ЭДС $E_0$, резистором сопротивлением $R_0$ и двумя обмотками $w_0$, расположенными на тех же сердечниках. Переходный процесс вызывается замыканием ключа $K$. При замкнутом $K$ магнитная индукция в левом сердечнике равна $B_m\sin\omega t + B_0$, а в правом $B_m\sin\omega t - B_0$ (высшие гармоники не учитываем). Амплитуда синусной компоненты $B_m$ и «постоянная» составляющая $B_0$ являются медленно изменяющимися функциями времени, влияющими друг на друга.

Учитывая направления намотки катушек, замечаем, что потокосцепление двух обмоток $w$ равно $2wSB_m\sin\omega t$, а потокосцепление двух обмоток $w_0$ равно $2w_0SB_0$.

Выразим кривую намагничивания ферромагнитного материала сердечников гиперболическим синусом $H = \alpha\mathrm{sh}\beta B$. Используя закон полного тока и формулы (15.13) и (15.12), запишем первую гармонику тока: $i = \frac{2\alpha l}{w}\mathrm{ch}\beta B_0[-jJ_1(j\beta B_m)]\sin\omega t$. Мгновенное значение медленно изменяющегося «постоянного» тока в цепи управления $i_0 = \frac{\alpha l}{w_0}\mathrm{sh}\beta B_0 J_0(j\beta B_m)$. Запишем дифференциальное уравнение для мгновенных значений первых гармоник управляемой цепи

$$\frac{2Sw}{\beta}\frac{d}{dt}\beta B_m\sin\omega t + \frac{2\alpha l}{w}R_н\mathrm{ch}\beta B_0[-jJ_1(j\beta B_m)]\sin\omega t = E_m\sin(\omega t + \varphi) \qquad (а)$$

и дифференциальное уравнение для мгновенных значений цепи управления

$$\frac{2Sw_0}{\beta}\frac{d\beta B_0}{dt} + \frac{\alpha lR_0}{w_0}\mathrm{ch}\beta B_0 J_0(j\beta B_m) = E_0. \qquad (б)$$

Учитывая медленность изменения $\beta B_m$ во времени $\left(\frac{d\beta B_m}{dt} \ll \omega\beta B_m\right)$, из уравнения (а) получим уравнение (в):

$$m\beta B_m\cos\omega t + n\mathrm{ch}\beta B_0[-jJ_1(j\beta B_m)]\sin\omega t = E_m\cos\varphi\sin\omega t + E_m\sin\varphi\cos\omega t; \qquad (в)$$

$$m = \frac{2wS\omega}{\beta}, n = \frac{2\alpha lR_н}{w}.$$

Равенство косинусных компонент уравнения (в) дает уравнение (г), а синусных компонент — уравнение (д):

$$m\beta B_m = E_m\sin\varphi, \qquad (г)$$

$$n\mathrm{ch}\beta B_0[-jJ_1(j\beta B_m)] = E_m\cos\varphi. \qquad (д)$$



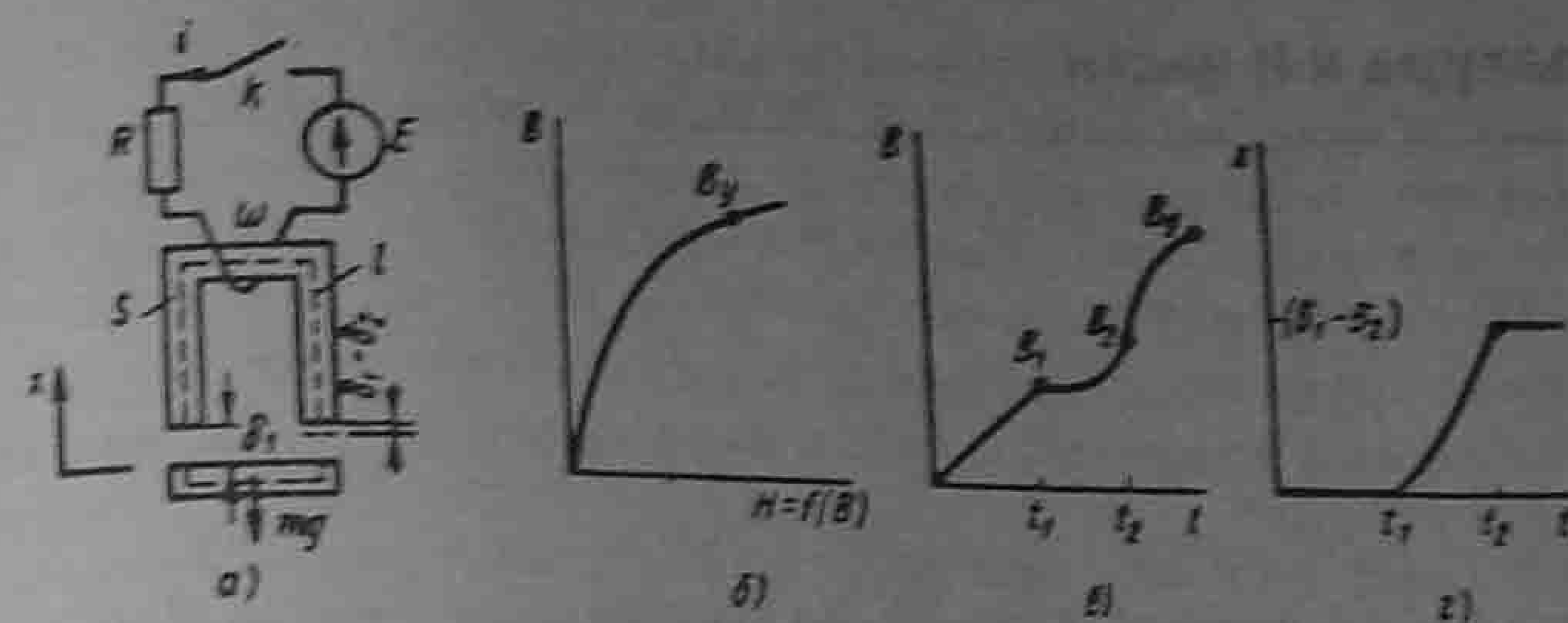



Рис. 16.8

Возведем (г) и (д) в квадрат, сложим и разрешим относительно $\mathrm{ch}\beta B_0$. Получим

$$\mathrm{ch}\beta B_0 = \frac{\sqrt{E_m^2 - (m\beta B_m)^2}}{n[-jJ_1(j\beta B_m)]}. \qquad (е)$$

По формуле (е) строим зависимость $\beta B_m = f(\beta B_0)$ при переходном процессе (рис. 16.7, *б*).

Обозначим $k_0 = \frac{2w_0S}{\beta}$ и перепишем уравнение (б) в виде

$$k_0\frac{d\beta B_0}{dt} = F(\beta B_0). \qquad (ж)$$

Здесь $F(\beta B_0) = E_0 - \frac{\alpha lR_0}{w_0}\mathrm{ch}\beta R_0 J_0(j\beta B_m)$. Из уравнения (ж) определим время $t$, необходимое для нарастания $\beta B_0$ от 0 до текущего значения $\beta B_0$:

$$t = k_0\int_0^{\beta B_0}\frac{d\beta B_0}{F(\beta B_0)}. \qquad (з)$$

Располагая зависимостью $\beta B_0 = f_1(t)$, с помощью рис. 16.7, *б* получим $\beta B_m = f_2(t)$, а затем, используя формулу $I_m = \frac{2\alpha l}{w}\mathrm{ch}\beta B_0[-jJ_1(j\beta B_m)]$, строим огибающую амплитуд первой гармоники тока $i$ управляемой цепи $I_m = f_3(t)$ от времени. По формуле $i_0 = \frac{\alpha l}{w_0}\mathrm{sh}\beta B_0 J_0(j\beta B_m)$ определяем зависимость $i_0 = f_4(t)$.

**§ 16.11. Переходные процессы в нелинейных электромеханических системах.** В качестве примера рассмотрим переходный процесс в электромагните постоянного тока (рис. 16.8, *а*). Сердечник и подвижная часть (якорь) электромагнита имеют площадь поперечного сечения $S$, длину средней магнитной линии по пути в стали $l$.

Масса якоря и груза $m$, кривая намагничивания сердечника и якоря $H = f(B)$ известны (рис. 16.8, *б*). Через $x$ обозначим изменяющееся расстояние между верхней частью якоря и сердечником. В исходном состоянии $x = 0$. В процессе движения якоря зазор равен $\delta_1 - x$. При притянутом якоре $x = \delta_1 - \delta_2$ ($\delta_2$ — толщина тонкой немагнитной прокладки; она может и отсутствовать, тогда $\delta_2 = 0$).

Переходный процесс после замыкания ключа $K$ при $t = 0$ состоит из трех стадий:

1. От $t = 0$ до $t = t_1$ при неподвижном якоре ($x = 0$) сила тяги возрастает от 0 до величины, равной весу якоря и груза, а индукция — от 0 до $B_1$ (рис. 16.8, *в* и *г*).

2. За время от $t = t_1$ до $t = t_2$ якорь притягивается к сердечнику, зазор изменяется от $x = 0$ до $x = \delta_1 - \delta_2$, а индукция — от $B_1$ до $B_2$.

3. При $t \geqslant t_2$ и неизменном $x$ индукция $B$ возрастает от $B_2$ до установившегося значения $B_у$.

Сила тяги электромагнита может быть определена как произведение удельного продольного тяжения вдоль магнитных силовых линий в воздушном зазоре [оно равно плотности магнитной энергии в единице объема $B^2/(2\mu_0)$] на площадь поперечного сечения двух воздушных зазоров $2S$:

$$F_{эм} = \frac{B^2}{2\mu_0} 2S = \frac{B^2 S}{\mu_0}.$$

По закону полного тока, $Hl + H_B 2(\delta_1 - x) = iw$, но $H = f(B)$, а $H_B = \frac{B}{\mu_0}$, поэтому ток $i = \frac{l}{w} f(B) + \frac{2B}{w\mu_0}(\delta_1 - x)$.

Процесс описывается двумя совместными уравнениями: для электрической части системы

$$wS\frac{dB}{dt} + R\left[\frac{l}{w}f(B) + \frac{2B}{w\mu_0}(\delta_1 - x)\right] = E, \tag{а}$$

для механической части

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + mg = \frac{B^2 S}{\mu_0}. \tag{б}$$

В первой стадии якорь неподвижен, $x = 0$ и нарастание $B$ от 0 до $B_1$ определяем по уравнению (а), причем $\frac{B_1^2 S}{\mu_0} = mg$ и $B_1 = \sqrt{\frac{\mu_0 mg}{S}}$. Во второй стадии уравнения (а) и (б) должны быть решены совместно на ЦВМ. Стадия закончится, когда $x$ станет равным $\delta_1 - \delta_2$. В третьей стадии процесс описывается уравнением (а) при



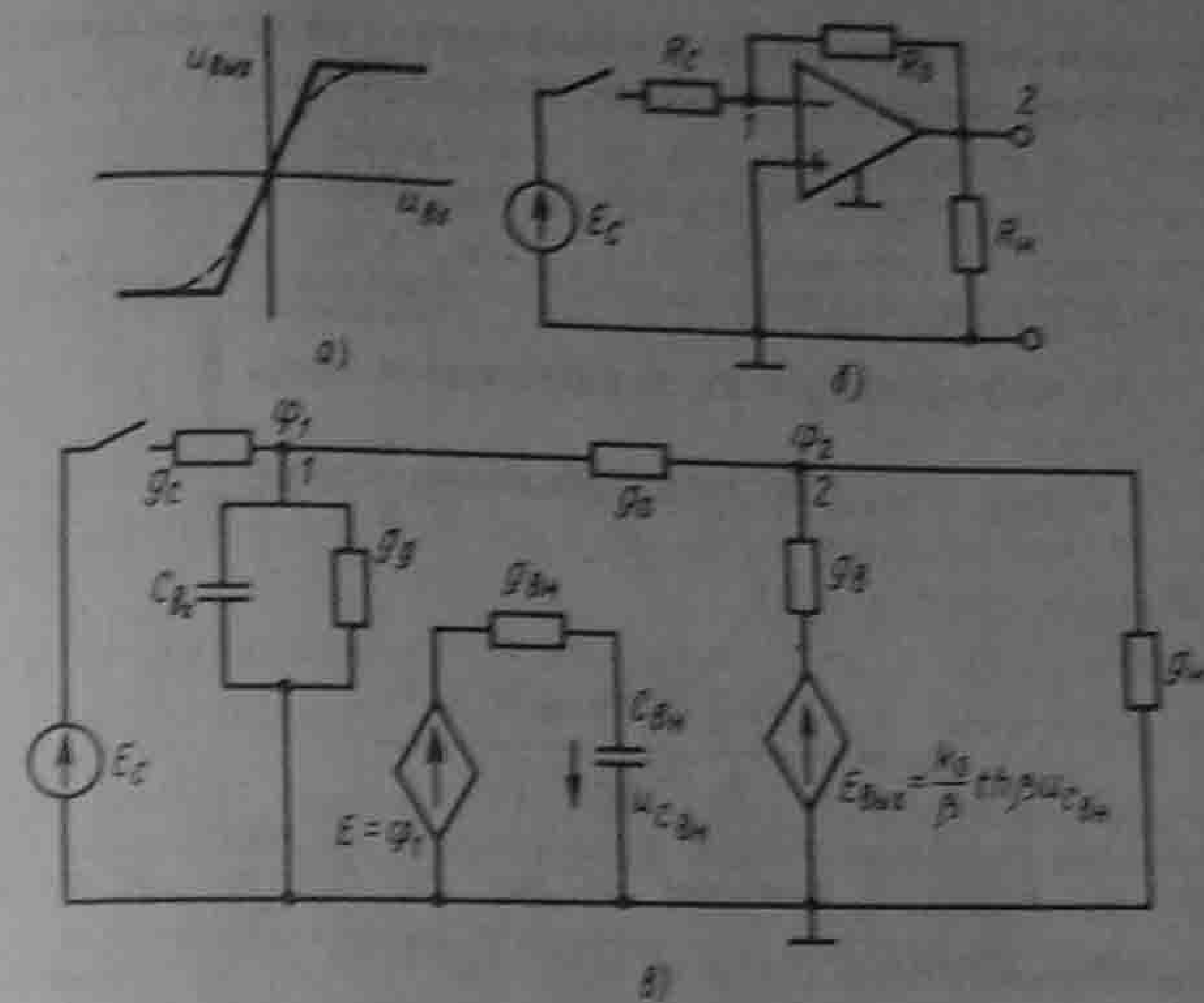



Рис. 16.9

$x = \delta_1 - \delta_2$; $B_у$ определяем из уравнения

$$f(B_у)l + \frac{B_у}{\mu_0}2\delta_2 = \frac{Ew}{R}.$$

**§ 16.12. Переходные процессы в схемах с управляемыми источниками с учетом их нелинейных и частотных свойств.** Схемы с управляемыми источниками осуществляют очень часто на ОУ. Выходное напряжение ОУ нелинейно зависит от входного напряжения (рис. 16.9, *а*). Эту зависимость можно аппроксимировать гиперболическим тангенсом $u_{вых} = \frac{k_0}{\beta}\,\mathrm{th}\,\beta u_{вх}$ (пунктир на рис. 16.9, *а*). Частотные свойства самого ОУ определяются его частотной характеристикой $K(j\omega)$. Если учитывать в первом приближении только первый доминантный полюс, то $K(j\omega) = \frac{k_0}{1 + j\omega\tau_{вн}}$. Через $\omega_1 = \frac{1}{\tau_{вн}}$ обозначим частоту, при которой модуль $K(j\omega)$ уменьшается до $\frac{k_0}{\sqrt{2}}$ (затухание в 3 дБ). Инерционные свойства ОУ будем описывать некоторой вспомогательной цепью, состоящей из источника управляемого напряжения, резистора $R_{вн}$ и конденсатора емкостью $C_{вн}$ ($\tau_{вн} = R_{вн}C_{вн}$).

Макрометод описания переходных процессов проиллюстрируем на схеме инвертирующего повторителя напряжения (рис. 16.9, *б*). Сигнал $E_C$ поступает на инвертирующий вход ОУ, сопротивление которого по отношению к заземленному входу ОУ $R_g$, а емкость $C_{вх}$. Неинвертирующий вход заземлен, поэтому параметры его не учитываем. Расчетная схема изображена на рис. 16.9, *в*. Вместо сопротивлений на ней указаны проводимости. Потенциалы узлов *1* и *2* обозначены $\varphi_1$ и $\varphi_2$. ЭДС на выходе ОУ $E_{вых} = -\frac{k_0}{\beta}\,\mathrm{th}\,\beta u_{C\,вн}$, где $u_{C\,вн}$ — напряжение на конденсаторе $C_{вн}$ вспомогательной цепи.

Переменными состояния являются напряжения на конденсаторах $u_{C\,\text{вх}} = \varphi_1$ и $u_{C\,\text{вн}}$. Запишем уравнение для вспомогательной цепи:

$$\frac{d\beta u_{C\,\text{вн}}}{dt} = -\frac{1}{\tau_{\text{вн}}}\beta u_{C\,\text{вн}} + \frac{1}{\tau_{\text{вн}}}\beta\varphi_1. \qquad (а)$$

Составим два уравнения по методу узловых потенциалов относительно $\varphi_1$ и $\varphi_2$:

$$\varphi_1(pC_{\text{вх}} + g_g + g_C + g_0) - \varphi_2 g_0 = E_C g_C, \qquad (б)$$

$$-\varphi_1 g_0 + \varphi_2(g_0 + g_B + g_H) = -g_B\frac{k_0}{\beta}\,\text{th}\beta u_{C\,\text{вн}}. \qquad (в)$$

Из (в) определим

$$\varphi_2 = \frac{-g_B\dfrac{k_0}{\beta}\,\text{th}\beta u_{C\,\text{вн}} + g_0\varphi_1}{g_0 + g_B + g_H}. \qquad (г)$$

Подставим $\varphi_2$ в (б) и заменим $pC_{\text{вх}}\varphi_1$ на $C_{\text{вх}}\dfrac{d\varphi_1}{dt}$. Затем запишем $\text{th}\beta u_{C\,\text{вн}} = \beta u_{C\,\text{вн}} f(\beta u_{C\,\text{вн}})$, где

$$f(\beta u_{C\,\text{вн}}) = 1 - \frac{1}{3}(\beta u_{C\,\text{вн}})^2 + \frac{2}{15}(\beta u_{C\,\text{вн}})^4 - \frac{17}{315}(\beta u_{C\,\text{вн}})^6 + \ldots .$$

В результате совместно с (а) получим два уравнения относительно $\beta u_{C\,\text{вн}}$ и $\beta\varphi_1$:

$$\frac{d\beta u_{C\,\text{вн}}}{dt} = -\frac{1}{\tau_{\text{вн}}}\beta u_{C\,\text{вн}} + \frac{1}{\tau_{\text{вн}}}\beta\varphi_1,$$

$$\frac{d\beta\varphi_1}{dt} = -a\beta u_{C\,\text{вн}} - b\beta\varphi_1 + \frac{\beta g_C}{C_{\text{вх}}}E_C.$$

Здесь

$$a = \frac{k_0 g_0 g_B}{(g_0 + g_B + g_H)C_{\text{вх}}} f(\beta u_{C\,\text{вн}}),\ b = \frac{1}{C_{\text{вх}}}\left[g_g + g_C + g_0 - \frac{g_0^2}{g_0 + g_B + g_H}\right].$$

При числовых подсчетах $\dfrac{d\varphi_2}{dt}$ и ток во вспомогательной цепи схемы не должны превышать максимальных паспортных значений ОУ, в противном случае параметры схемы должны быть скорректированы.

**§ 16.13. Перемагничивание ферритовых сердечников импульсами тока.** В устройствах вычислительной техники в качестве запоминающих элементов применяют миниатюрные ферритовые сердечники различной формы, в частности кольцевые с внешним диаметром порядка 1 мм из материала с прямоугольной петлей гистерезиса (ППГ). Через отверстия в них пропускают проводники, являющиеся одновитковыми обмотками (на рис. 16.10, *а* показан только один проводник). При записи информации по одному из проводников пропускают прямоугольный или почти прямоугольный импульс тока (рис. 16.10, *б*) длительностью в несколько десятков наносекунд или микросекунд. Под действием этого импульса сердечник перемагничивается. Хотя в ферритовом сердечнике и отсутствуют макроскопические вихревые токи (в нем нет замкнутых токопроводящих контуров, выполняющих функции вторичных обмоток трансформатора), перемагничивается он все же не мгновенно.

На длительность процесса перемагничивания сердечника при высоких скоростях перемагничивания решающее влияние оказывает магнитная вязкость, которая



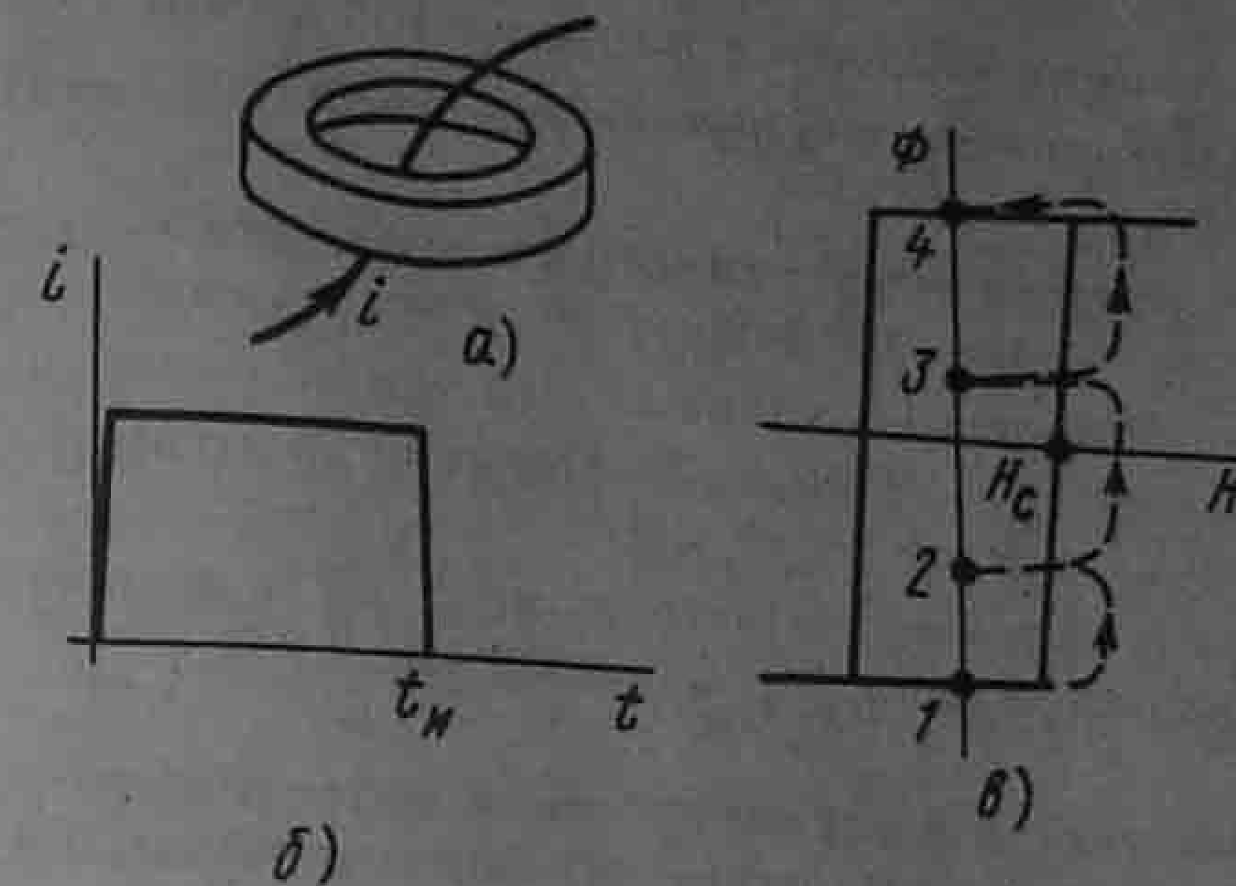



Рис. 16.10

создает внутреннее поле трения. Последнее зависит от значения и скорости изменения намагниченности, а также от превышения воздействующей напряженности поля над коэрцитивной силой.

При математическом описании тормозящего действия магнитной вязкости исходят из уравнения

$$H_0 = H_{\text{вн}} - a\frac{dJ}{dt}, \qquad (а)$$

где $H_0$ — напряженность поля, при котором происходит перемагничивание феррита с ППГ ($H_0$ несколько больше коэрцитивной силы $H_c$ по статической петле гистерезиса); $H_0$ находят опытным путем для каждого типа феррита); $H_{\text{вн}} = iw/l$ — напряженность внешнего поля, вызванная током $i$ ($w$ — число витков; $l$ — длина средней магнитной линии).

Член $a\dfrac{dJ}{dt}$ учитывает тормозящее действие магнитной вязкости. Множитель $a = \dfrac{1}{k(1 - J^2/J_s^2)}$, где $k$ — некоторый коэффициент; $J$ — текущее значение намагниченности; $J_s$ — намагниченность насыщения.

Решим уравнение (а) относительно $dF/dt$, заменив $J$ на индукцию $B$, а $J_s$ — на индукцию насыщения $B_s$. Получим уравнение относительно $B$:

$$\frac{dB}{dt} = k\left(1 - \frac{B^2}{B_s^2}\right)(H_{\text{вн}} - H_0). \qquad (б)$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Из (б) следует, что для перехода из точки *1* в точку *4* (рис. 16.10, *в*) под действием импульса тока $i$ длительностью $t_{\text{и}}$ должно выполняться соотношение

$$\int_0^{t_{\text{и}}}(H_{\text{вн}} - H_0)dt \geqslant \int_{-B_s}^{B_s}\frac{dB}{k\left(1 - \dfrac{B^2}{B_s^2}\right)} = M.$$

Если же $\int_0^{t_{\text{и}}}(H_{\text{вн}} - H_0)dt < M$, то изображающая точка из положения *1* после прекращения действия импульса перейдет в точку *2* или *3* или им подобную (конечное

состояние зависит от $\int_0^{t_и}(H_{вн} - H_0)dt$ и амплитуды импульса тока). Из состояния 1 в состояние 4 сердечник может быть переведен и иным путем — путем воздействия на него несколькими следующими друг за другом импульсами одинаковой полярности, для каждого из которых $\int_0^{t_и}(H_{вн} - H_0)dt < M$. После первого импульса рабочая точка перейдет из положения 1, например, в положение 2, после второго из положения 2 — в положение 3, затем из положения 3 — в положение 4.

**§ 16.14. Фазовая плоскость и характеристика** областей ее применения. Качественное исследование процессов в нелинейных электрических цепях, описываемых дифференциальными уравнениями первого и особенно второго порядков, в ряде случаев производят с помощью фазовой плоскости.

*Фазовой плоскостью* (ФП) называют плоскость, по оси абсцисс которой откладывают исследуемую величину (например, $x$), а по оси ординат — производную от исследуемой величины $dx/dt$ (обозначим ее $y$).

В литературе можно встретить и другие виды фазовых плоскостей, когда: 1) по оси абсцисс откладывают какую-либо одну величину (например, ток первой ветви), а по оси ординат — другую (например, напряжение на конденсаторе во второй ветви); 2) по оси абсцисс откладывают амплитуду синусной составляющей колебания, а по оси ординат — амплитуду косинусной составляющей колебания и т. д.

В каждой конкретной задаче под $x$ понимают ток, напряжение, заряд или индукцию. Любому сочетанию значений $x$ и $y$ исследуемой цепи соответствует вполне определенная точка ФП.

Для качественного исследования процессов в электрических цепях, описываемых уравнениями третьего порядка, применяют трехмерное фазовое пространство. На одной оси декартовой системы этого пространства откладывают значение функции $x$, на другой — $dx/dt$, на третьей — $d^2x/dt^2$.

Качественное исследование — это выявление общих свойств исследуемой цепи без интегрирования нелинейного дифференциального уравнения. Под общими свойствами понимают обычно зависимость характера переходного процесса от начальных условий, возможность возникновения в схеме автоколебаний, резонансных явлений, автомодуляции, а также устойчивости перечисленных режимов и режимов равновесия.

Эти вопросы в ряде случаев можно решить и иным путем, без привлечения ФП. Применение последней делает исследование более наглядным и оправдано в тех случаях, когда объем работы соизмерим или меньше объема работы при решении тех же задач иными методами.

Обычно ФП применяют для исследования процессов в электрических цепях, содержащих источники постоянной ЭДС и не содержащих источники периодической ЭДС. Однако ее можно использовать и для изучения процессов в цепях, содержащих источники синусоидальной (и постоянной) ЭДС, если предварительно перейти от уравнений, составленных для мгновенных значений, к уравнениям для медленно меняющихся составляющих.

**§ 16.15. Интегральные кривые, фазовая траектория и предельный цикл.** Зависимость $y = f(x)$, получаемая из решения дифференциального уравнения системы, представляет собой семейство кривых на ФП, соответствующих различным значениям постоянных интегрирования. Кривые $y = f(x)$, соответствующие различным начальным условиям, называют *интегральными*.

Начальное положение изображающей точки на ФП определяется значениями $x$ и $y = dx/dt$ при $t = 0$.

Интегральную кривую, проходящую через точку ФП с заданными начальными условиями, называют *фазовой траекторией*.



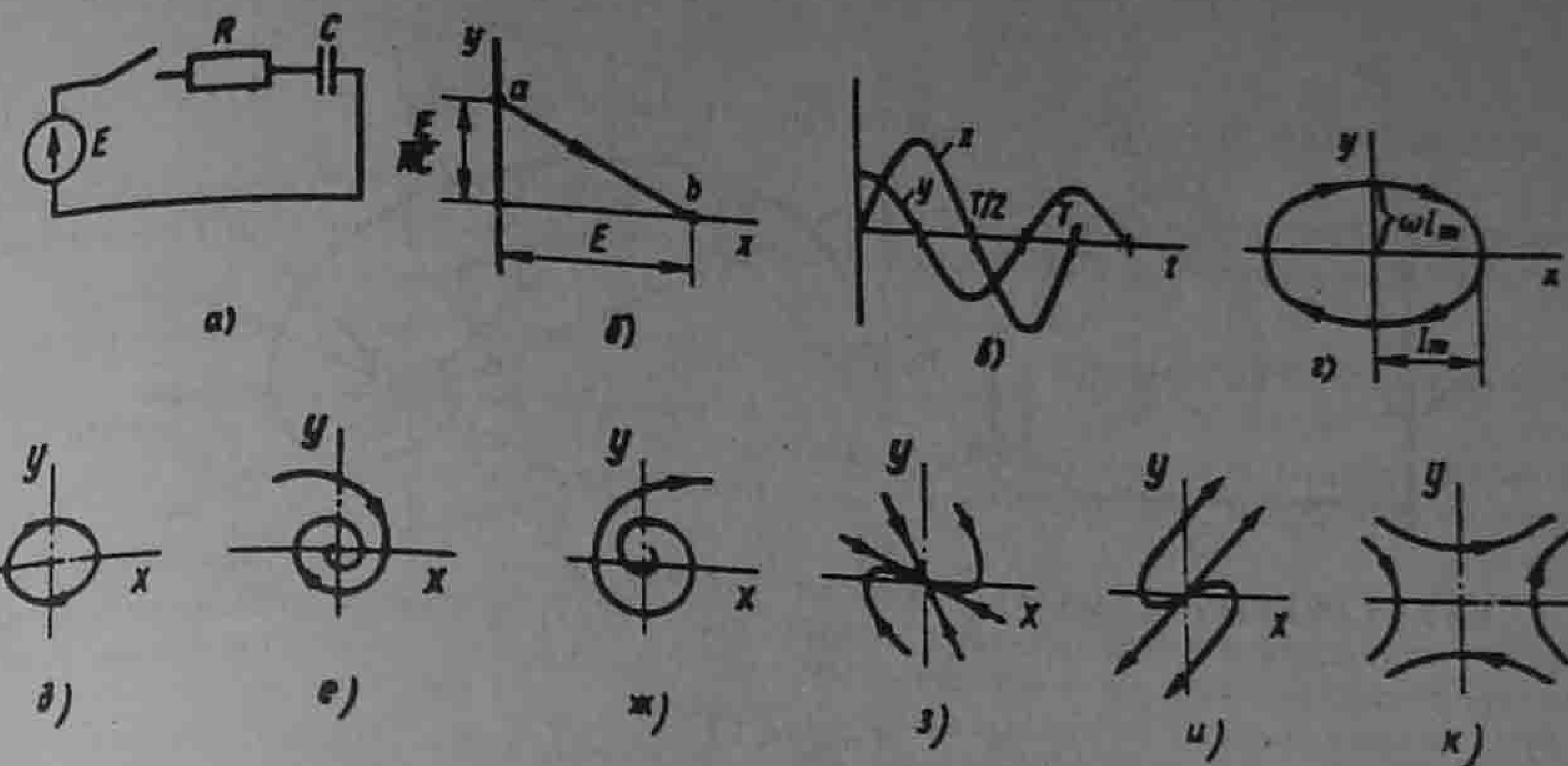



Рис. 16.11

Вид фазовой траектории зависит от конфигурации схемы, характера нелинейности и соотношения между параметрами.

Если процесс в цепи является периодическим, то через интервалы времени, равные периоду процесса, соответствующие друг другу значения $x$ и $y$ повторяются и фазовая траектория в этом случае является замкнутой кривой. Замкнутую фазовую траекторию называют *предельным циклом*.

Если интегральные кривые и снаружи и изнутри навиваются на предельный цикл, то его называют *устойчивым*, если удаляются от него — *неустойчивым*. Если же процесс непериодический, то фазовая траектория представляет собой незамкнутую кривую.

Фазовую траекторию можно наблюдать на экране электронно-лучевого осциллографа. С этой целью на одну пару отклоняющих пластин его подают исследуемую величину $x$, а на другую пару — производную от $x$.

**§ 16.16. Изображение простейших процессов на фазовой плоскости.** Рассмотрим несколько простейших примеров.

Требуется изобразить на ФП переходный процесс в схеме на рис. 16.11, *а*, вызываемый при нулевых начальных условиях замыканием ключа. Обозначим: $i$ — ток в цепи, $u_C$ — напряжение на конденсаторе. В уравнение цепи $Ri + u_C = E$ вместо $i$ подставим $C\frac{du_C}{dt}$:

$$RC\frac{du_C}{dt} + u_C = E.$$

Положим $u_C = x$, $du_C/dt = y$, тогда $y = (E - x)/(RC)$.

Последнее уравнение описывает прямую $ab$ (рис. 16.11, *б*), которая является фазовой траекторией рассматриваемого процесса (точка $b$ — точка равновесия).

Рассмотрим изображение на ФП синусоидального колебания $i = I_m \sin\omega t$ (рис. 16.11, *в*).

Обозначим $i = x$, тогда $y = \frac{dx}{dt} = \omega I_m \cos\omega t$, т. е. $x = I_m \sin\omega t$,

$$y = \omega I_m \cos\omega t.$$

Разделив первое уравнение на $I_m$, второе — на $\omega I_m$, возведя в квадрат получен-

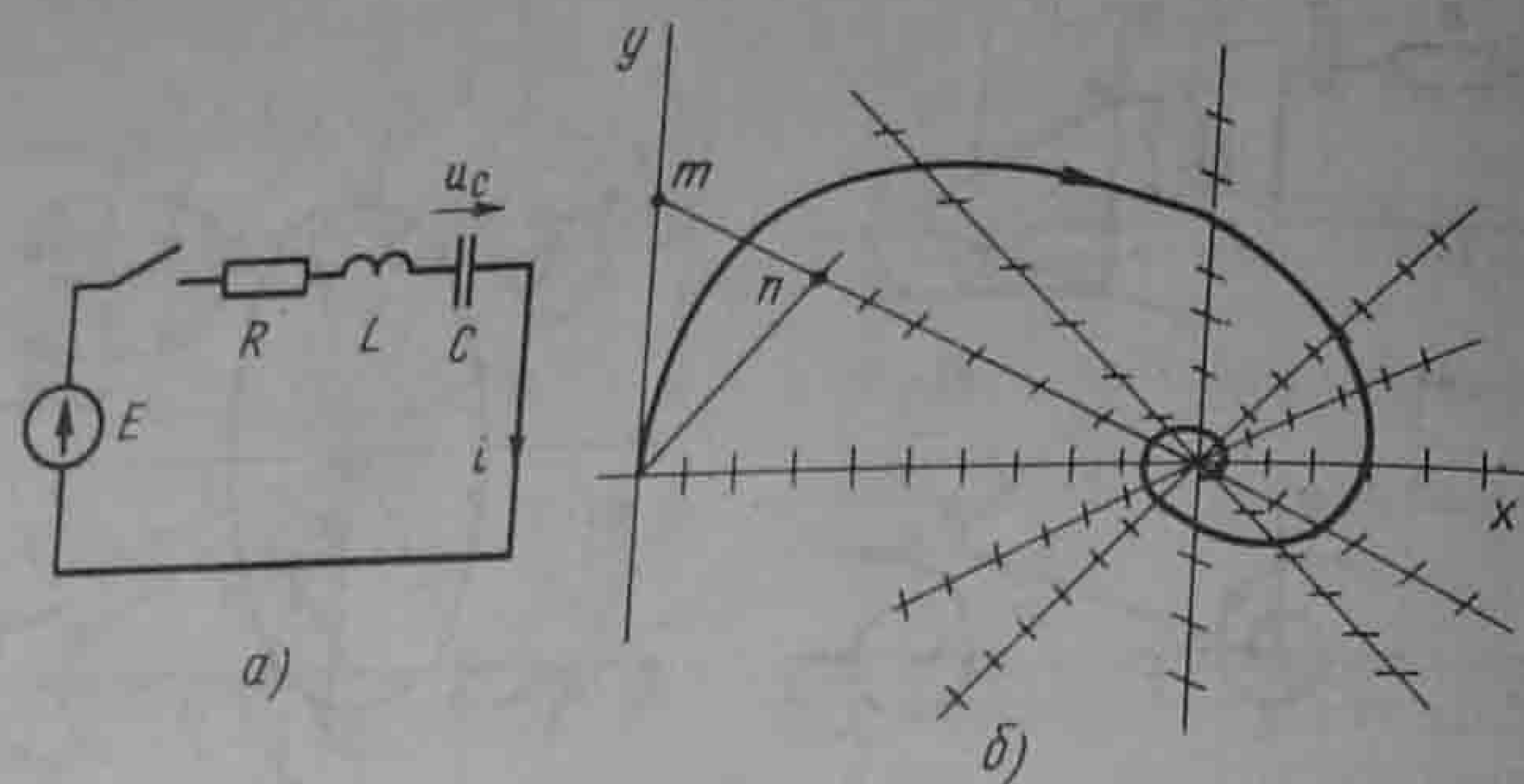



Рис. 16.12

ные выражения и сложив их, получим уравнение эллипса

$$\left(\frac{x}{I_m}\right)^2 + \left(\frac{y}{\omega I_m}\right)^2 = 1.$$

Следовательно, изображением синусоидального процесса (фазовой траекторией) на ФП является эллипс (рис. 16.11, г).

Направление движения изображающей точки показано стрелкой. В верхней полуплоскости $y = \frac{dx}{dt} > 0$; следовательно, изображающая точка движется в сторону увеличения координаты $x$. В нижней полуплоскости $\frac{dx}{dt} < 0$, поэтому изображающая точка движется в сторону уменьшения координаты $x$. В целом перемещение изображающей точки на ФП происходит всегда по часовой стрелке.

**§ 16.17. Изоклины. Особые точки. Построение фазовых траекторий**. Тангенс угла наклона, образованного касательной к интегральной кривой в некоторой точке ФП и осью абсцисс, определяет значение $dy/dx$ в этой точке. Совокупность точек ФП, для которых $dy/dx = \text{const}$, называют *изоклиной*. На ФП можно провести множество изоклин, каждой из которых соответствует свое значение.

Для всех точек ФП, отражающей процессы в цепи второго порядка (кроме особых точек), $dy/dx$ имеет вполне определенное значение. В особых точках (ОТ) $dy/dx = 0/0$, т. е. не определено. Через эти точки может быть проведено множество изоклин с различными значениями $dy/dx$.

ОТ классифицируют по виду интегральных кривых, окружающих эти точки.

Если ОТ окружена эллипсами (рис. 16.11, д), то ее называют *ОТ типа центр*; она соответствует двум мнимым корням характеристического уравнения.

Если ОТ окружена свертывающейся спиралью, то ее называют *устойчивым фокусом* (рис. 16.11, е); ей соответствуют комплексно-сопряженные корни с отрицательной действительной частью.

Если ОТ окружена раскручивающейся спиралью, то ее называют *неустойчивым фокусом* (рис. 16.11, ж); ей соответствуют комплексно-сопряженные корни с положительной действительной частью.

Если корни отрицательные и действительные, то ОТ называют *устойчивым узлом* (рис. 16.11, з). При положительных действительных корнях получают ОТ типа *неустойчивого узла* (рис. 16.11, и). Когда один корень положителен, а другой отрицателен, имеем ОТ типа *седла* (рис. 16.11, к).

Рассмотрим переходный процесс в схеме на рис. 16.12, а, вызываемый замыканием ключа при нулевых начальных условиях: $E = 1$ В; $R = 1$ Ом; $L = 1$ Гн; $C = 1$ Ф.



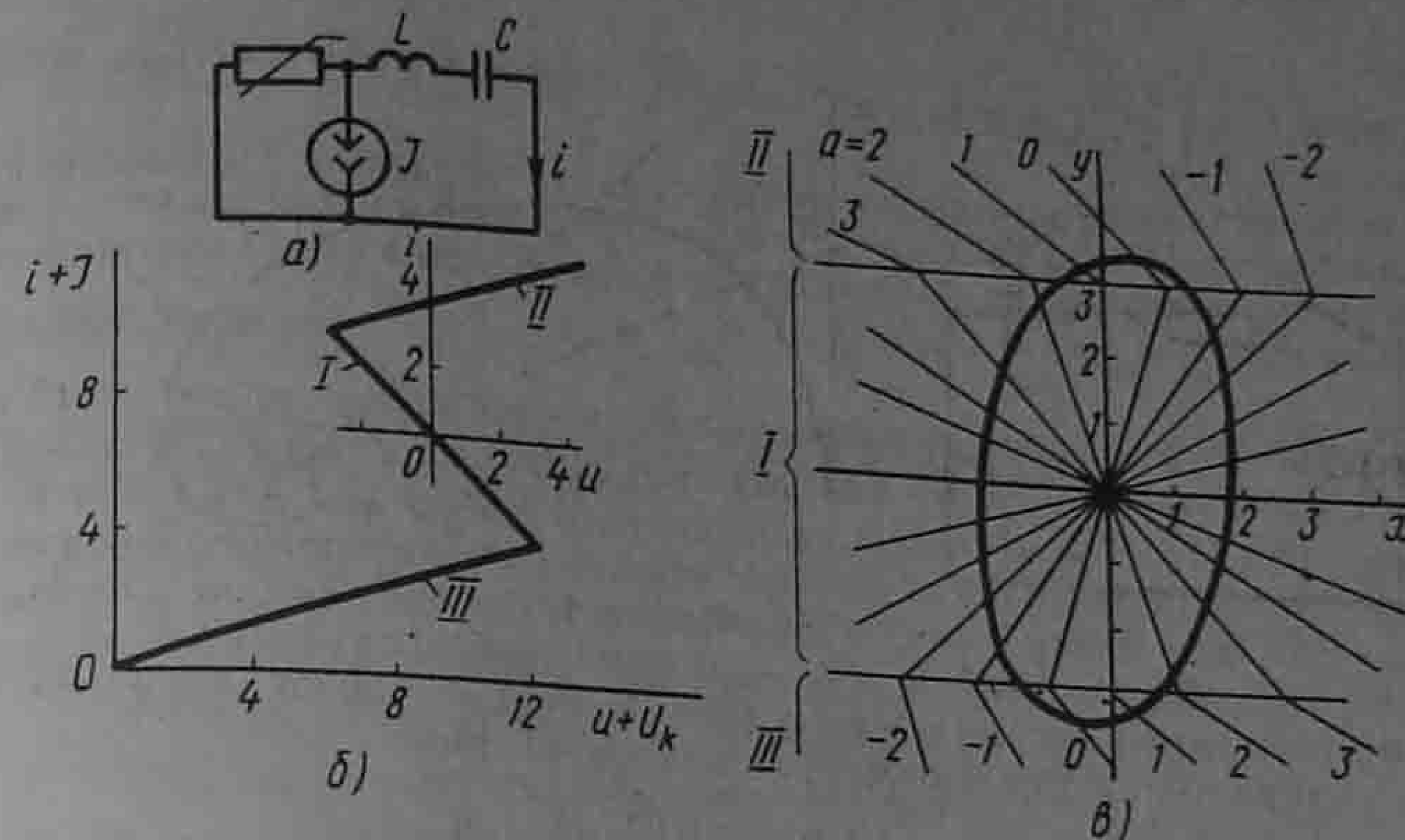



Рис. 16.13

Построим семейство изоклин для напряжения на конденсаторе $u_C$. Определим положение и тип ОТ. Построим фазовую траекторию переходного процесса.

В уравнении цепи $LC\frac{d}{dt}\left(\frac{du_C}{dt}\right) + RC\frac{du_C}{dt} + u_C = E$ заменим $u_C$ на $x$, $\frac{du_C}{dt}$ на $y$, $\frac{d}{dt}y$ на $\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = y\frac{dy}{dx}$ и учтем, что $L = R = C = E = 1$. Решим уравнение $y\frac{dy}{dx} + y + x = 1$ относительно $y$ и $dy/dx$:

$$y = \frac{1 - x}{1 + dy/dx}; \qquad \text{(а)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - x - y}{y}. \qquad \text{(б)}$$

Из уравнения (б) следует, что координаты особой точки $y = 0$, $x = 1$. Последовательно придавая $dy/dx$ значения 0, 1, 2, ..., −1, −2, ∞, строим семейство изоклин (рис. 16.12, б). Все изоклины проходят через ОТ и представляют собой прямые линии (цепь линейна). Масштабы по осям $x$ и $y$ приняты одинаковыми. Черточки на каждой изоклине характеризуют значение $dy/dx$ для нее.

Так как $x(0) = u_C(0) = 0$ и $y(0) = \left(\frac{du_C}{dt}\right)_0 = 0$, то к началу процесса изображающая точка находится в начале координат. В установившемся режиме $x = 1$ и $y = 0$.

Для построения интегральной кривой из исходной точки $x = y = 0$ проводим два луча до пересечения с изоклиной $dy/dx = 1$ в точках $m$ и $n$. Первый луч соответствует значению $dy/dx = \infty$ той изоклины, с которой начинается движение, второй — значению $\frac{dy}{dx} = 1$ следующей изоклины, на которую точка перейдет. Делим расстояние $mn$ пополам и проводим через исходную и полученную точки плавную кривую — кусочек фазовой траектории. Продолжаем аналитический процесс далее и строим всю фазовую траекторию в виде свертывающейся спирали.

ОТ в примере является устойчивым фокусом. Время в явном виде на фазовой плоскости не отражено.

Временны́е зависимости $x = f(t)$ по фазовой траектории $y = \frac{dx}{dt} = \varphi(x)$ получа-

ют по формуле $t=\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\varphi(x)}$, где $x_0$ — начальное значение, а $x$ — текущее. В окрестности точки пересечения кривой с осью абсцисс подынтегральное выражение стремится к бесконечности. Чтобы избежать планиметрирования площади под кривой, уходящей в бесконечность при $\varphi(x)\to 0$, подсчет времени $\Delta t$ на этом участке производят по средней скорости $\varphi_{ср}(x)=\Delta x/\varphi_{ср}(x)$.

**Пример 166.** Рассмотреть колебательный процесс в схеме на рис. 16.13, *а*. В этой схеме $L = 1$ Гн; $C = 1/3$ Ф. ВАХ нелинейного резистора $i + J = f(u + U_к)$ изображена на рис. 16.13, *б*. Ток источника постоянного тока $J = 7$ А. ВАХ относительно переменных составляющих тока $i$ и напряжения $u$ на резисторе получена переносом начала координат в точку $J = 7$ А. Эта ВАХ состоит из трех участков. На участке $I$ $u=-i\,(|i|\leqslant 3)$, на участке $II$ $u = 3i - 12\,(i>3)$, на участке $III$ $u = 3i + 12\,(i>3)$. Обозначим переменную составляющую заряда конденсатора $q = x$. Учтем, что сумма падений напряжений для переменных составляющих

$$u_R+u_L+u_C=u_R+L\frac{di}{dt}+\frac{q}{C}=0, \qquad (а)$$

ток

$$i=\frac{dq}{dt}=y;\ \frac{di}{dt}=\frac{d}{dt}y=\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}=ay;\ a=\frac{dy}{dx}.$$

Подставим соответствующие эквиваленты в (а) и запишем уравнение изоклин на каждом из участков: на участке $I$ $y=\frac{3x}{1-a}$, на участке $II$ $y=\frac{12}{3+a}-\frac{3x}{3+a}$, на участке $III$ $y=-\frac{12}{3+a}-\frac{3x}{3+a}$.

В соответствии с этими уравнениями строим на рис. 16.13, *в* семейство изоклин для каждого из участков. Изоклины являются отрезками прямых. Значения $a$ написаны рядом с соответствующей изоклиной. Жирной линией показан предельный цикл.

#### Вопросы для самопроверки

1. Охарактеризуйте известные вам группы методов расчета переходных процессов в нелинейных цепях. 2. Укажите, в чем положительные и в чем отрицательные стороны расчетов по мгновенным значениям и по огибающим первых гармоник, графоаналитических и аналитических методов. 3. Почему метод расчета, основанный на графическом подсчете определенного интеграла, неприменим даже для цепей первого порядка, если вынуждающая сила является функцией времени? 4. Почему метод интегрируемой нелинейной аппроксимации не удается применить к электрическим цепям, описываемых уравнениями второго и более высоких порядков? 5. Чем физически можно объяснить, что при подключении линейной $RL$-цепи к источнику синусоидальной ЭДС максимальное значение тока при переходном процессе не может превысить удвоенного значения амплитуды тока установившегося режима, тогда как при подключении цепи резистор — индуктивная катушка с нелинейной ВАХ к источнику синусоидальной ЭДС это превышение может быть во много раз больше? 6. Сформулируйте особенности расчета переходных процессов в нелинейных системах не чисто электрических, например электромеханических. 7. На примере цепи с термистором покажите, что бывает полезно подразделить переходный процесс на быстро и на медленно протекающие стадии и рассматривать их раздельно. 8. В чем идея метода малого параметра? 9. Запишите и прокомментируйте рекуррентное соотношение, являющееся решением нелинейного интегрального уравнения. 10. Охарактеризуйте идею метода медленно изменяющихся амплитуд. 11. Как расчетным путем учитывают магнитную вязкость при перемагничивании ферритовых сердечников импульсами тока? 12. Дайте определение фазовой плоскости, интегральной кривой, фазовой траектории, предельного цикла, изоклины, особой точки. 13. По какому признаку классифицируют особые точки? 14. Как по фазовой траектории $y = f(x)$ построить временную зависимость $x(t)$?



## Глава семнадцатая

# ОСНОВЫ ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ РЕЖИМОВ РАБОТЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ

**§ 17.1. Устойчивость «в малом» и «в большом». Устойчивость по Ляпунову.** Режим работы электрической цепи, содержащей нелинейные элементы, может быть устойчивым или неустойчивым. Как правило, режим работы большинства электрических цепей является устойчивым и в значительно меньшем числе случаев — неустойчивым.

Различают устойчивость «в малом» и устойчивость «в большом».

Под *устойчивым режимом работы «в малом»* понимают такой, при котором достаточно малое отклонение режима работы от исходного (установившегося) — независимо от того, какими причинами оно вызвано, — с течением времени уменьшается и система возвращается в исходное состояние.

При неустойчивом режиме работы «в малом» достаточно малое отклонение с течением времени увеличивается и система не возвращается в исходное состояние.

*Устойчивым режимом работы «в большом»* называют такой режим работы, при котором система, получив достаточно большое начальное отклонение, возвращается в исходное состояние после прекращения действия возмущения.

Если при достаточно большом отклонении от исходного состояния после прекращения действия возмущения система не возвращается в исходное состояние, то ее называют системой, неустойчивой «в большом».

Различие между устойчивостью «в малом» и устойчивостью «в большом» можно проиллюстрировать с помощью рис. 17.1, *а*. На этом рисунке изображены желоб с помещенным в нем шариком. Если шарик толкнуть так, что он переместится из положения *1* в

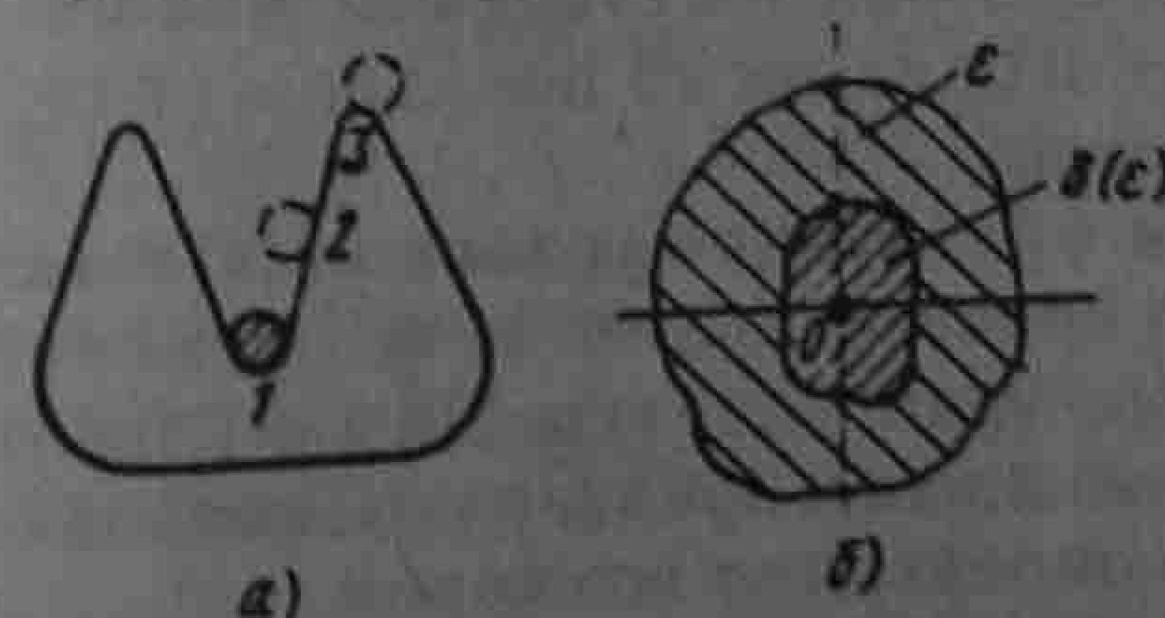


Рис. 17.1

положение 2, а затем предоставить его себе самому, то под действием силы тяжести шарик возвращается в исходное положение (положение равновесия). Если шарик толкнуть с большей силой, то он пройдет через положение 3 и выскочит из желоба. Таким образом, система (рис. 17.1, *а*) устойчива «в малом» и неустойчива «в большом».

В литературе можно встретить также термин «устойчивость по Ляпунову». Системой, устойчивой по Ляпунову, называют систему, для которой можно указать область допустимых отклонений [область $\delta(\varepsilon)$ на рис. 17.1, *б*] от состояния равновесия (точки 0), для которой ни одно из движений, начинающихся внутри области $\delta$, никогда не достигнет границ некоторой заданной области $\varepsilon$.

Размер и форма области $\delta$ зависит от размера и формы области $\varepsilon$.

В нелинейных электрических цепях в общем случае возможны следующие режимы (типы движения): 1) состояние равновесия; 2) периодическое движение при отсутствии в системе источников периодической ЭДС (тока) — автоколебания; 3) периодическое движение с частотой источника периодической ЭДС (тока) — вынужденные колебания; 4) резонансные явления на высших, низших и дробных гармониках; 5) квазипериодические (как бы периодические) процессы по типу автомодуляции, а также ряд других, более сложных типов движений. Каждый из этих режимов (типов движений) может быть исследован на устойчивость.

В большинстве практических задач производят исследование устойчивости «в малом». Исследование устойчивости «в большом» производят путем анализа хода интегральных кривых на фазовой плоскости или путем использования второго метода Ляпунова. Основы теории устойчивости были разработаны крупнейшим русским математиком А. М. Ляпуновым в 1892 г. и изложены в его книге «Общая задача об устойчивости движения».

**§ 17.2. Общие основы исследования устойчивости «в малом».** Общие основы исследования устойчивости «в малом» применимы ко всем или почти ко всем известным в настоящее время типам движения. В каждом конкретном случае возможны некоторые особенности при применении общих принципов.

Для исследования устойчивости исследуемой величине $x$ (величинам) дают малое приращение $\Delta x$, развертывают уравнение, описывающее процесс, в ряд по степеням малого приращения $\Delta x$ и ввиду малости $\Delta x$ отбрасывают все члены ряда, содержащие $\Delta x$ в степенях выше первой.

В полученном уравнении (уравнениях) выделяют слагаемые, содержащие $\Delta x$ и производные от $\Delta x$ по времени, и образуют из них дифференциальное уравнение (уравнения) относительно $\Delta x$. Уравнение относительно $\Delta x$ алгебраизируют, получают характеристическое уравнение и определяют его корни.

Если хотя бы один корень характеристического уравнения положителен или положительна действительная часть комплексно-сопряженных корней, то это свидетельствует о том, что возникшее приращение $\Delta x$ будет не убывать, а возрастать во времени, т. е. исследуемое движение является неустойчивым.

Если же все действительные корни характеристического уравнения отрицательны, а все комплексно-сопряженные корни имеют отрицательную действительную часть, то исследуемое движение является устойчивым.

Характеристическое уравнение, составленное относительно приращения $\Delta x$:

для системы второго порядка

$$a_0 p^2 + a_1 p + a_2 = 0;$$

для системы третьего порядка

$$a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = 0.$$

Для суждения о характере корней характеристического уравнения разработано несколько математических критериев. Воспользуемся критерием Гурвица (Рауса — Гурвица).

Критерий (теорема) Гурвица состоит в следующем: для того чтобы действительные части корней характеристического уравнения были отрицательными, необходимо и достаточно, чтобы все диагональные миноры ($\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_{n-1}$) определителя Гурвица ($\Delta_n$) были больше нуля.

Определитель Гурвица

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \ldots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \ldots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & a_n \end{vmatrix}.$$

Следовательно, условия отрицательности действительных частей корней характеристического уравнения выражают следующим образом:

$$\Delta_1 = a_1 > 0; \; \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0 \text{ и т. д.}$$

Определитель Гурвица $\Delta_n$ составляют так:

1) по главной диагонали определителя в порядке возрастания индексов вписывают коэффициенты от $a_1$ до $a_n$;

2) в ту часть каждого столбца, которая расположена выше главной диагонали, записывают коэффициенты в порядке возрастания индексов;

3) в ту часть каждого столбца, которая расположена ниже глав-

ной диагонали, вписывают коэффициенты в порядке уменьшения индексов (до $a_0$ включительно).

Следствием теоремы Гурвица является лемма: *все коэффициенты характеристического уравнения ($a_0$, $a_1$, $a_2$,...,$a_n$) устойчивой системы положительны.*

Из изложенного вытекает, что для системы с характеристическим уравнением второго порядка положительные вещественные корни (или комплексно-сопряженные с положительной действительной частью) имеют место в том случае, если какой-либо из коэффициентов уравнения ($a_0$, $a_1$, $a_3$) окажется отрицательным. Для системы с характеристическим уравнением третьего порядка положительные вещественные корни (комплексно-сопряженные с положительной действительной частью) будут в том случае, если: а) какой-либо из коэффициентов ($a_0$, $a_1$, $a_2$, $a_3$) окажется отрицательным; б) $a_1a_2 - a_0a_3 < 0$.

Аналогичные заключения могут быть сделаны и для систем с характеристическими уравнениями более высоких порядков.

Коэффициенты $a_0$, $a_1$, $a_2$, ... могут оказаться отрицательными в следующих основных случаях:

а) когда в состав исследуемой на устойчивость системы входят нелинейные резисторы, обладающие падающим участком характеристики, а точка равновесия оказывается на падающем участке характеристики;

б) в схемах с чрезмерно большим воздействием выходной величины на входную (в схемах с чрезмерно большой положительной обратной связью). В этом случае поступление энергии из выходной цепи во входную превышает потребление энергии во входной цепи и приращение $\Delta x$ возрастает;

в) в схемах с управляемыми нелинейными индуктивными катушками (нелинейными конденсаторами) при наличии неявно (в некоторых случаях и явно) действующих обратных связей. В таких схемах обратные связи при определенных условиях приводят к появлению на характеристиках нелинейных индуктивных катушек (нелинейных конденсаторов) падающих участков. Режим работы системы может оказаться неустойчивым, если изображающая точка окажется на падающем участке характеристики управляемой нелинейной индуктивной катушки (нелинейного конденсатора).

**§ 17.3. Исследование устойчивости состояния равновесия в системах с постоянной вынуждающей силой.** Когда рабочая точка по постоянному току окажется на падающем участке ВАХ, то состояние равновесия в системе при определенных условиях может оказаться неустойчивым.

В этом случае применяется известный способ: при исследовании устойчивости нелинейный резистор заменяют расчетной схемой — схемой замещения. Она должна учитывать свойства



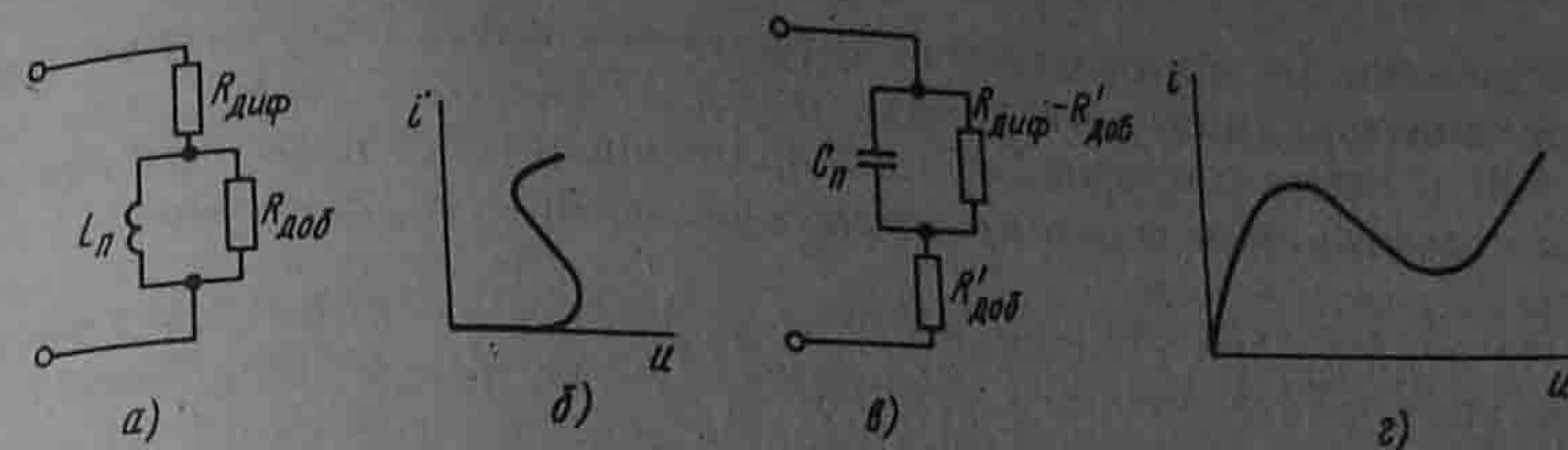



Рис. 17.2

НР как при медленных (при $\omega \to 0$), так и при быстрых (при $\omega \to \infty$) малых приращениях тока и напряжения на НР.

Свойства НР при $\omega \to 0$ определяются самой ВАХ НР, снятой при постоянном токе, на падающем участке которой дифференциальное сопротивление $R_{диф} < 0$.

Если к НР подвести некоторое постоянное напряжение или через него пропустить некоторый постоянный ток такого значения, чтобы рабочая точка находилась на падающем участке ВАХ, и затем воздействовать на НР синусоидальным напряжением или током малой амплитуды, то сопротивление $Z(j\omega)$, оказываемое НР синусоидальной составляющей малой амплитуды, будет представлять собой комплексное число. Опыт показывает, что при достаточно большой $\omega$ действительная часть этого сопротивления оказывается положительной, т. е. $\operatorname{Re} Z(j\omega) > 0$. Объясняется это тем, что физические процессы в самом НР являются процессами инерционными, причем инерционность (сдвиг фаз) сильнее проявляется с ростом частоты.

В одних НР инерционность вызвана тепловыми процессами, в других — процессами накопления энергии в электрическом и (или) магнитном полях, в третьих — процессами ионизации и деионизации (которые также протекают не мгновенно), в четвертых — инерционностью процессов диффузии носителей тока и емкостью, обусловленной объемными зарядами. Но чаще всего инерционность есть следствие нескольких взаимно связанных друг с другом процессов.

Таким образом, схема замещения НР, когда точка равновесия находится на падающем участке характеристики, по отношению к малым приращениям должна быть такой, чтобы при $\omega \to 0$ $\operatorname{Re} Z(j\omega) = R_{диф} < 0$, а при $\omega \to \infty$ $\operatorname{Re} Z(j\omega) > 0$.

На рис. 17.2, *а* изображена одна из возможных схем замещения для НР с S-образной ВАХ (рис. 17.2, *б*), удовлетворяющая перечисленным условиям. В этой схеме $L_п$ — некоторая малая индуктивность, которую часто называют «паразитной», $R_{доб} > |R_{диф}| > 0$ — некоторое добавочное активное сопротивление.

На рис. 17.2, *в* изображена одна из возможных схем замещения для НР с N-образной ВАХ (рис. 17.2, *г*), где $C_п$ — некоторая малая

емкость, называемая часто «паразитной», и $R_{доб}' > 0$ — некоторое добавочное активное сопротивление. Параметры $L_в$ и $R_{доб}$, а также $C_в$ и $R_{доб}'$ зависят от физических процессов в НР и изменяются при переходе из одной точки на падающем участке ВАХ в другую.

**§ 17.4. Исследование устойчивости автоколебаний и вынужденных колебаний по первой гармонике.** Исходными при исследовании устойчивости автоколебаний и вынужденных колебаний обычно являются уравнения, получаемые по методу медленно меняющихся амплитуд (см. § 16.6). Однако в тех случаях, когда напряжение на каком-либо элементе (ток в исследуемой цепи) резко отличается по форме от синусоиды, например имеет пикообразную форму, исследование устойчивости целесообразно проводить по средним за полпериода значениям величин.

Если через $a$ и $b$ обозначить медленно меняющиеся амплитуды синусной и косинусной составляющих исследуемого колебания, то из исходных уравнений системы можно получить два уравнения для медленно меняющихся амплитуд:

$$da/dt = A(a, b); \qquad (17.1)$$

$$db/dt = B(a, b). \qquad (17.2)$$

Здесь $A$ и $B$ являются функциями амплитуд $a$ и $b$, функциями параметров схемы, угловой частоты колебаний $\omega$ и амплитуды вынуждающей силы. Обозначим значения $a$ и $b$ в установившемся режиме (когда амплитуды не изменяются во времени) через $a_0$ и $b_0$. Для определения $a_0$ и $b_0$ в (17.1) и (17.2) следует положить $da/dt = 0$ и $db/dt = 0$ и решить систему уравнений:

$$A(a_0, b_0) = 0; \qquad (17.3)$$

$$B(a_0, b_0) = 0. \qquad (17.4)$$

Пусть в результате возмущения амплитуды колебания получили малые приращения $\Delta a$ и $\Delta b$ и стали равными: $a = a_0 + \Delta a$ и $b = b_0 + \Delta b$.

Подставим эти значения $a$ и $b$ в (17.1) и (17.2), разложим $A(a_0 + \Delta a, b_0 + \Delta b)$ и $B(a_0 + \Delta a, b_0 + \Delta b)$ в ряд Тейлора по малым приращениям $\Delta a$ и $\Delta b$, в силу малости приращений ограничимся слагаемыми ряда с первыми степенями $\Delta a$ и $\Delta b$. В результате получим:

$$A(a_0 + \Delta a, b_0 + \Delta b) = A(a_0, b_0) + \Delta a A_1 + \Delta b B_1, \qquad (17.5)$$

$$B(a_0 + \Delta a, b_0 + \Delta b) = B(a_0, b_0) + \Delta a A_2 + \Delta b B_2. \qquad (17.6)$$

Для сокращения записи обозначено:

$$A_1 = \left[\frac{\partial A(a, b)}{\partial a}\right]_y; B_1 = \left[\frac{\partial A(a, b)}{\partial b}\right]_y; \qquad (17.7)$$



$$A_2 = \left[\frac{\partial B(a, b)}{\partial a}\right]_y; B_2 = \left[\frac{\partial B(a, b)}{\partial b}\right]_y. \qquad (17.8)$$

Индекс $y$ свидетельствует о том, что в частные производные должны быть подставлены значения $a$ и $b$ установившегося режима, т. е. $a_0$ и $b_0$.

Коэффициенты $A_1$, $B_1$, $A_2$, $B_2$ являются функциями $a_0$ и $b_0$, но не являются функциями приращений $\Delta a$ и $\Delta b$. Подставим правые части (17.5) и (17.6) в (17.1) и (17.2), учтя при этом (17.3) и (17.4), а также то, что

$$\frac{d(a_0 + \Delta a)}{dt} = \frac{d\Delta a}{dt} \quad и \quad \frac{d(b_0 + \Delta b)}{dt} = \frac{d\Delta b}{dt}.$$

В результате получим два уравнения:

$$d\Delta a/dt = A_1\Delta a + B_1\Delta b; \qquad (17.9)$$

$$d\Delta b/dt = A_2\Delta a + B_2\Delta b. \qquad (17.10)$$

Алгебраизируем их:

$$p\Delta a = A_1\Delta a + B_1\Delta b; \qquad (17.9а)$$

$$p\Delta b = A_2\Delta a + B_2\Delta b. \qquad (17.10б)$$

Составим характеристическое уравнение

$$p^2 + mp + q = 0, \qquad (17.11)$$

где

$$m = -(A_1 + A_2); \qquad (17.12)$$

$$q = A_1B_2 - B_1A_2. \qquad (17.13)$$

В соответствии с критерием Гурвица для затухания приращений $\Delta a$ и $\Delta b$ необходимо, чтобы

$$m > 0, \quad q > 0. \qquad (17.14)$$

В автоколебательных системах периодические вынуждающие силы, как правило, отсутствуют, поэтому можно принять $b = 0$, т. е. взять колебание в виде $a(t)\sin\omega t$ (см. пример 164). В этом случае вместо двух уравнений (17.9) и (17.10) будет одно уравнение

$$d\Delta a/dt = A_1\Delta a, \qquad (17.15)$$

где

$$A_1 = \left[\frac{dA(a)}{da}\right]_{a=a_0}. \qquad (17.16)$$

Для устойчивости автоколебаний в этом случае необходимо выполнение условия $A_1 < 0$.

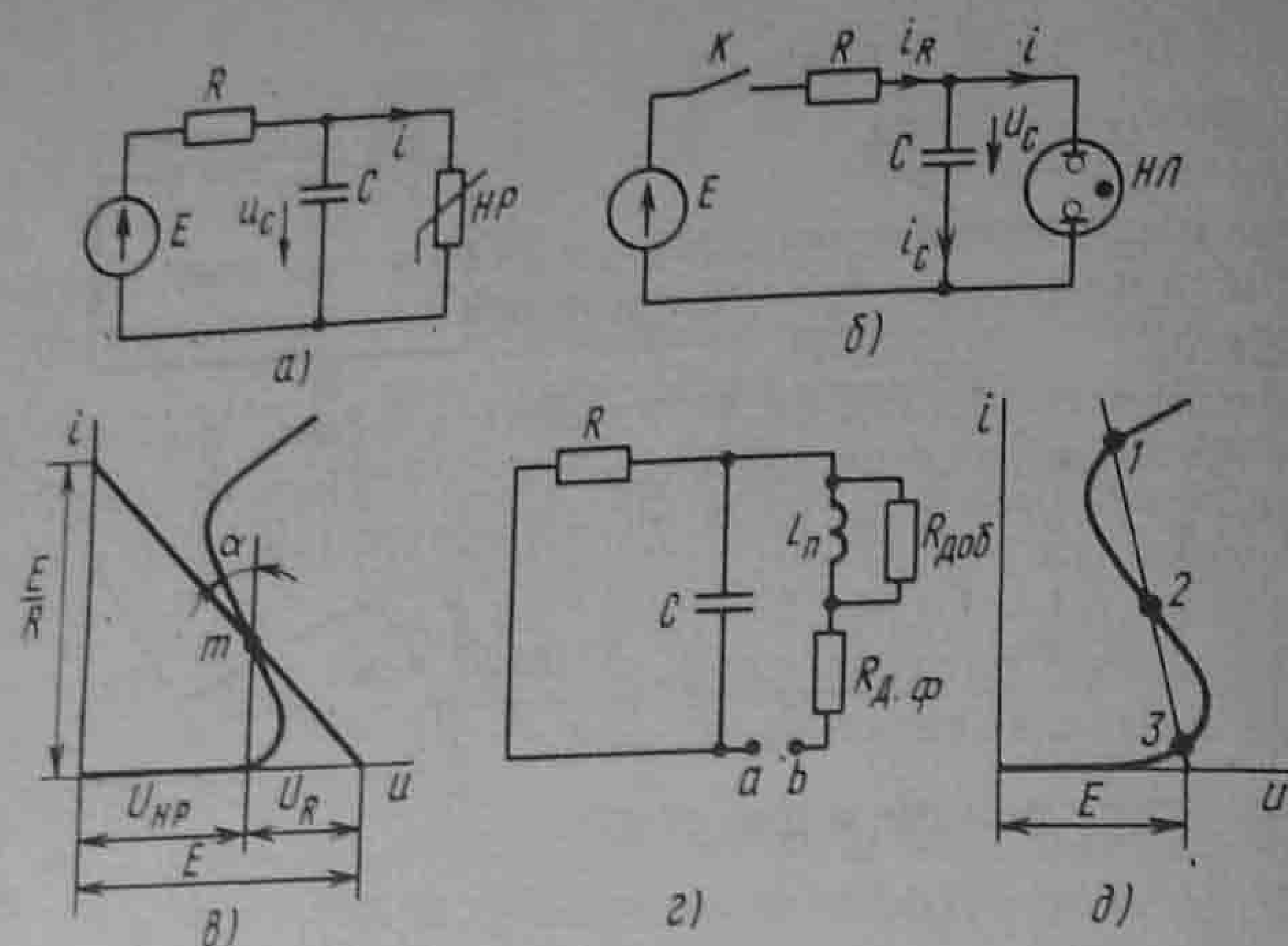



Рис. 17.3

Пример на исследование устойчивости автоколебаний по формуле (17.15) см. в § 17.6[1].

**§ 17.5. Исследование устойчивости состояния равновесия в генераторе релаксационных колебаний.** *Релаксационные колебания* представляют собой автоколебания, при определенных условиях возникающие в нелинейных электрических цепях с одним накопителем энергии, например в цепи с одним конденсатором (без индуктивного элемента) или одним индуктивным элементом (без конденсатора).

На рис. 17.3, *а* изображена принципиальная схема генератора релаксационных колебаний. Она состоит из источника постоянной ЭДС $E$, линейного резистора сопротивлением $R$, конденсатора емкостью $C$ и параллельно соединенного с ним нелинейного резистора, имеющего ВАХ S-образной формы.

В качестве НР с такой ВАХ могут быть взяты неоновая лампа или тиратрон. На рис. 17.3, *б* дана схема генератора с неоновой лампой. Кривая *1* (рис. 17.3, *в*) представляет собой ВАХ неоновой лампы, прямая *2* — ВАХ $R$.

Если бы не было релаксационных колебаний, то режим работы определился бы точкой $m$ пересечения кривой *1* и прямой *2*. Для этой точки сумма падений напряжений на НР и $R$ в соответствии со вторым законом Кирхгофа равна ЭДС $E$: $iR + u_{НР} = E$.

Точку $m$ будем называть *точкой равновесия*. Она определяет режим работы схемы при прохождении по $R$ и неоновой лампе постоянного тока.

Убедимся в том, что режим работы, определяемой точкой $m$, является неустойчивым: достаточно ничтожно малого отклонения от состояния равновесия, чтобы изображающая точка «ушла» из точки $m$ и не возвратилась в нее. В схеме возникнут релаксационные колебания.

Для того чтобы убедиться в неустойчивости состояния равновесия, составим линейную схему замещения релаксационного генератора.

Так как НР имеет S-образную ВАХ, то в схеме для исследования устойчивости оно имитировано (в соответствии с § 17.3) дифференциальным сопротивлением $R_{диф}$ и последовательно с ним включенной малой паразитной индуктивностью $L_п$, зашунтированной резистором сопротивлением $R_{доб}$.

[1]Исследование устойчивости вынужденных колебаний на высших гармониках и субгармониках, процессов в цепях с переменными во времени параметрами, а также исследование устойчивости процессов автомодуляции даны, например, в [20].



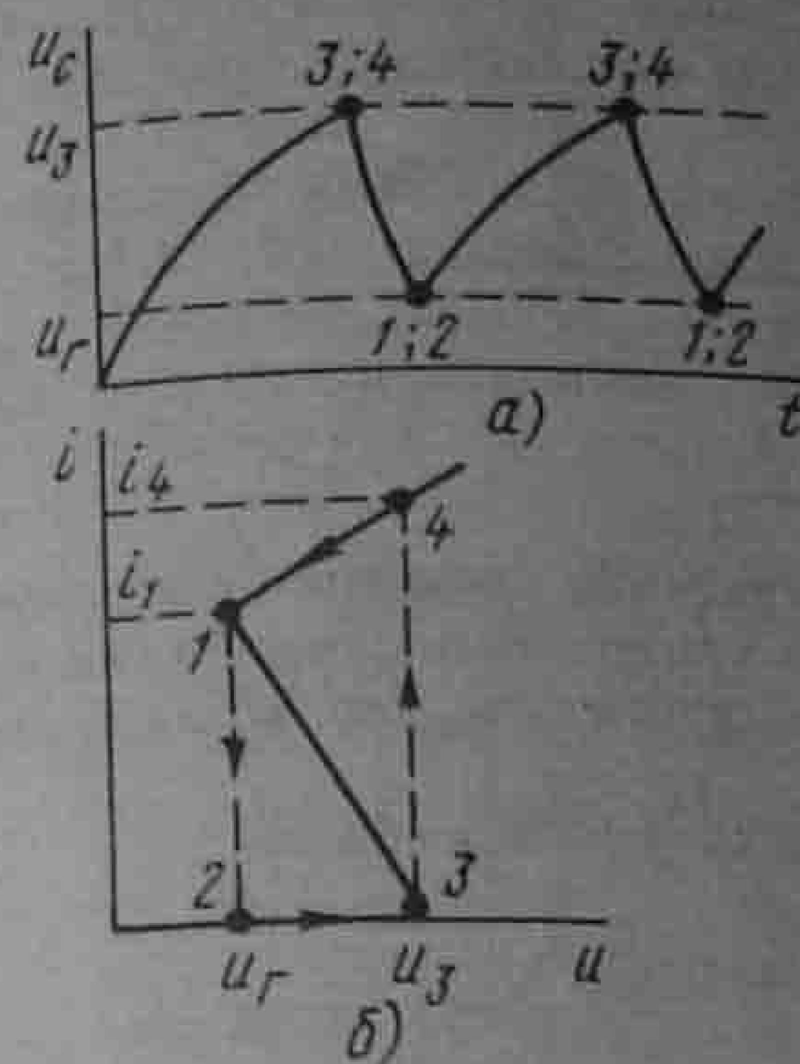



Рис. 17.4

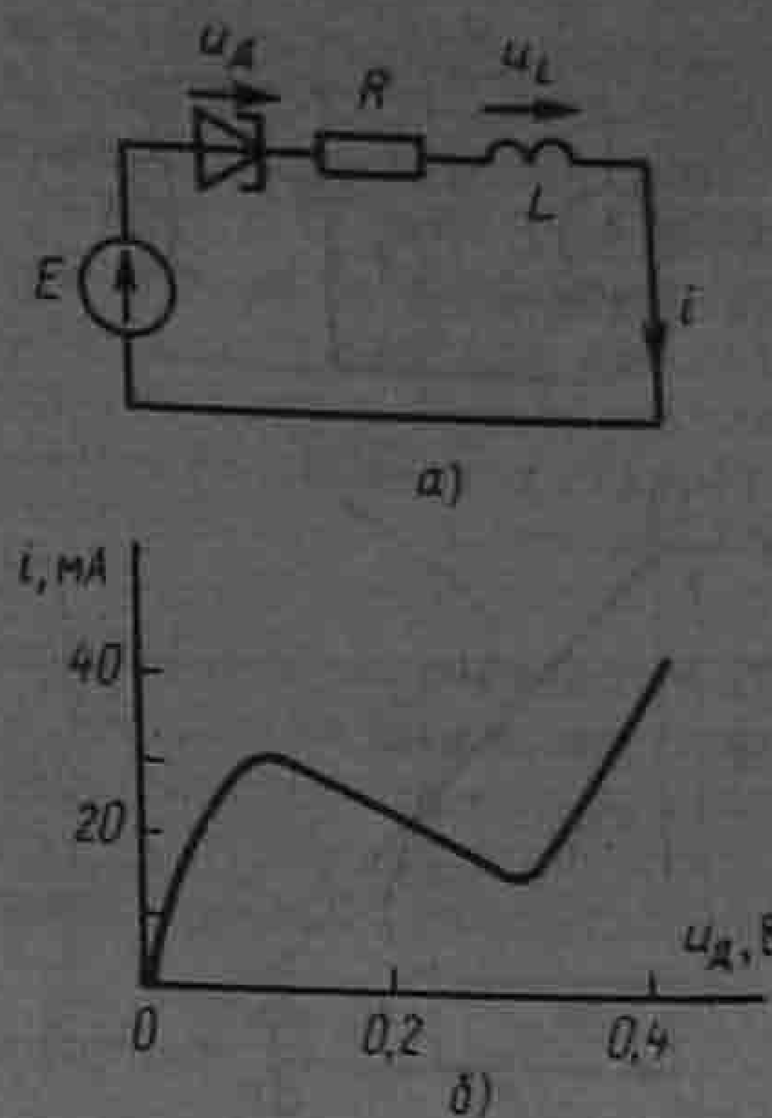



Рис. 17.5

Дифференциальное сопротивление $R_{диф}$ в точке $m$ пропорционально тангенсу угла α (рис. 17.3, *в*) и является отрицательной величиной.

Источник ЭДС в схеме замещения (рис. 17.3, *г*) не включен, так как исследуется поведение схемы в режиме приращений по отношению к режиму, определяемому точкой $m$.

Входное сопротивление схемы в операторной форме относительно точек $a$ и $b$

$$Z_{ab}(p) = R_{диф} + \frac{R_{доб} p L_п}{R_{доб} + pL_п} + \frac{R}{RCp + 1}.$$

Характеристическое уравнение цепи

$$p^2 L_п C R (R_{доб} + R_{диф}) + p[L_п(R + R_{доб} + R_{диф}) + CRR_{доб}R_{диф}] + R_{доб}(R + R_{диф}) = 0.$$

Так как рабочая точка находится на падающем участке ВАХ НР, то $R > |R_{диф}|$ и поэтому свободный член положителен. Из условия $\mathrm{Re}\,Z(j\omega) > 0$ при $\omega \to \infty$ следует, что $R_{доб} > |R_{диф}|$, поэтому коэффициент при $p^2$ тоже положителен. Состояние равновесия будет неустойчивым, если коэффициент при $p$ окажется отрицательным, т. е. при $L_п(R + R_{доб} + R_{диф}) + CRR_{доб}R_{диф} < 0$.

Рассмотрим последовательность смены состояний при релаксационных колебаниях.

Пусть в схеме (рис. 17.3, *б*) при нулевых начальных условиях замыкается ключ $K$. Конденсатор $C$ начнет заряжаться, и напряжение на нем будет расти (рис. 17.4, *а*). Так как конденсатор и неоновая лампа НЛ включены параллельно, то в любом режиме работы напряжения на них одинаковы. Как только напряжение на конденсаторе возрастает до значения, равного напряжению зажигания $u_з$ неоновой лампы, последняя зажжется и ток в ней возрастет от нуля до $i_4$ (рис. 17.4, *б*). Конденсатор быстро разрядится через НЛ, внутреннее сопротивление которой мало по сравнению с сопротивлением $R$. При этом изображающая точка на ВАХ НЛ переместится из точки *4* в точку *1*. В точке *1* напряжение на НЛ равно напряжению ее гашения $u_г$, поэтому неоновая лампа гаснет и ток в ней становится равным нулю (точка *2*). Далее конденсатор вновь заряжается до напряжения $u_з$, НЛ снова зажигается и процесс повторяется.

Траектория движения изображающей точки на рис. 17.4, *б* образует замкнутую петлю *12341*.

Следует подчеркнуть, что если условия возбуждения колебаний в схеме выполнены, то амплитуда колебаний напряжения на конденсаторе не зависит от нагрузки $R$ и ЭДС $E$, а определяется только напряжениями зажигания $u_з$ и гашения $u_г$ НЛ.

Период колебаний равен сумме времени зарядки и разрядки конденсатора и зависит от ЭДС $E$, емкости $C$, сопротивления и внутреннего сопротивления НЛ. Обратная связь в схеме находит свое выражение в том, что конденсатор управляет режимом работы НЛ.

В заключение заметим, что если в схеме на рис. 17.3, *б* ЭДС $E$ и сопротивление $R$ взять такими, что ВАХ резистора сопротивлением $R$ пересечет ВАХ НР с S-образной характеристикой в трех точках (*1*, *2*, *3*, на рис. 17.3, *д*), то точки *1* и *3* будут соответствовать устойчивым состояниям, а точка *2* начиная с некоторого значения $C$ — неустойчивому.

**§ 17.6. Исследование устойчивости периодического движения в ламповом генераторе синусоидальных колебаний.** Рассмотрим вопрос об исследовании устойчивости синусоидальных колебаний в ламповом генераторе (см. рис. 16.5). С этой целью воспользуемся формулами (16.19) и (16.24).

В соответствии с (16.24) производная от амплитуды колебаний

$$\frac{da}{dt} = A(a) = 0{,}5ak_1(1 - 0{,}25a^2).$$

В установившемся режиме работы амплитуду колебаний обозначим $a_0$. Для определения $a_0$ приравняем $\frac{da}{dt}$ нулю и решим уравнение $1 - 0{,}25a_0^2 = 0$. Отсюда $a_0 = 2$.

В соответствии с § 17.4 для исследования устойчивости периодического движения $a\sin\omega t$ в автоколебательной системе, на которую не воздействует внешняя периодическая сила частотой ω, достаточно найти знак производной $\frac{dA(a)}{da}$ при $a = a_0$. Если при этом $\frac{dA(a)}{da} < 0$, то процесс устойчив. В нашем случае

$$\left(\frac{dA(a)}{da}\right)_{a_0 = 2} = -k_1.$$

Ранее [см. уравнение (16.21)] было выяснено, что $a'M > RC$ и $k_1 > 0$, так как только в этом случае амплитуда колебаний представляет собой вещественную величину. Следовательно, $\left(\frac{dA(a)}{da}\right)_{a = a_0} < 0$ — процесс устойчив.

**§ 17.7. Исследование устойчивости работы электрических цепей, содержащих управляемые источники напряжения (тока) с учетом их неидеальности.** В этом случае следует учитывать: 1) что управляющие напряжения или токи управляемых источников зависят от структуры схемы, комплексной частоты $p$ и числовых значений элементов схемы; 2) что управляющая способность самих источников тока или напряжения зависит от $p$ (например, для операционного усилителя и транзистора $K = \frac{k_0}{1 + p\tau}$ или $K = \frac{K_0}{(1 + p\tau_1)(1 + p\tau_2)}$).

Порядок исследования: 1. Составляем схему замещения исследуемой цепи, указываем на ней внутренние сопротивления неуправляемых и управляемых источников и токи и напряжения, которыми они управляются. Учитываем выходные сопротивления управляемых источников. 2. Составляем выражения для управля-



ющих токов и напряжений в функции потенциалов незаземленных узлов, параметров схемы и частоты $p$. 3. Учитываем зависимость $K = f(p)$. 4. Составляем систему уравнений по методу узловых потенциалов подобно тому, как это было в § 15.33 (но $j\omega$ заменено на $p$). 5. Составляем главный определитель системы и приравниваем его нулю. Об устойчивости судим по характеру корней. Степень характеристического уравнения определяется числом энергоемких элементов, независимо накапливающих энергию, с учетом полюсов у каждого из имеющихся в схеме частотно-зависимых управляемых источников. Перечисленные условия минимальны. В некоторых случаях необходимо при исследовании устойчивости учитывать не только первый доминантный полюс ОУ или транзистора, но и остальные полюса.

### Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение системы, устойчивой «в малом», «в большом» и устойчивой по Ляпунову. 2. Изложите общие основы исследования устойчивости «в малом». 3. При выполнении каких условий можно ожидать неустойчивого режима работы электрической цепи на постоянном токе? 4. Может ли быть неустойчивым режим вынужденных колебаний? режим автоколебаний? 5. Сформулируйте критерий Гурвица. 6. Как по коэффициентам характеристического уравнения, составленного для малых приращений, можно судить об устойчивости системы? 7. В каких группах электрических цепей можно ожидать неустойчивых режимов работы? 8. Изобразите схемы замещения НР с S- и N-образной ВАХ для исследования устойчивости, когда изображающая точка оказывается на падающем участке ВАХ этих элементов. Покажите, что для этих схем выполняются условия $\mathrm{Re}Z(j\omega)_{\omega \to 0} < 0$ и $\mathrm{Re}Z(j\omega)_{\omega \to \infty} > 0$. 9. Какие физические процессы в нелинейных резисторах могут учитывать $L_п$ и $R_{доб}$ в схеме замещения на рис. 17.2, *а* и $C_п$ и $R_{доб}'$ в схеме замещения на рис. 17.2, *в*? 10. Для режима автоколебаний в схеме на рис. 17.3, *б* постройте одну под другой зависимости $u_C$, $i_C$, $i_R$, $i$ в функции времени $t$. 11. Воспользовавшись выкладками, приведенными в § 17.5, определите минимальные значения емкости конденсатора $C$ в схеме на рис. 17.3, *б*, меньше которого положение равновесия устойчиво, несмотря на то что точка равновесия (точка $m$ на рис. 17.3, *в*) находится на падающем участке ВАХ НР. 12. Покажите, что состояние равновесия в схеме на рис. 17.3, *б*, соответствующее точке *2* на рис. 17.3, *д*, при определенном условии неустойчиво, а соответствующее точкам *1* и *3* — устойчиво. 13. Изложите идею исследования устойчивости вынужденных колебаний и автоколебаний. 14. Сформулируйте алгоритм исследования устойчивости работы электрической цепи, содержащей управляемые источники напряжения или тока. 15. На рис. 17.5, *а* изображена схема генератора на туннельном диоде. ВАХ диода дана на рис. 17.5, *б*: $E = 0{,}3В$, $R = 5$ Ом. Построить кривые $i$, $u_д$, $u_L$ в функции времени при автоколебаниях. Вывести формулу для значения $L$, начиная с которого возникнут автоколебания, воспользовавшись схемой замещения (рис. 17.2, *в*). (*Ответ*: $L > |C_п(R + R_{доб}')(R_{диф} - R_{доб}')|$).

## Глава восемнадцатая

## ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ С ПЕРЕМЕННЫМИ ВО ВРЕМЕНИ ПАРАМЕТРАМИ

**§ 18.1. Элементы цепей.** Электрические цепи с переменными во времени параметрами — это электрические цепи, в состав которых входят резистивные, индуктивные и емкостные элементы, изменя-

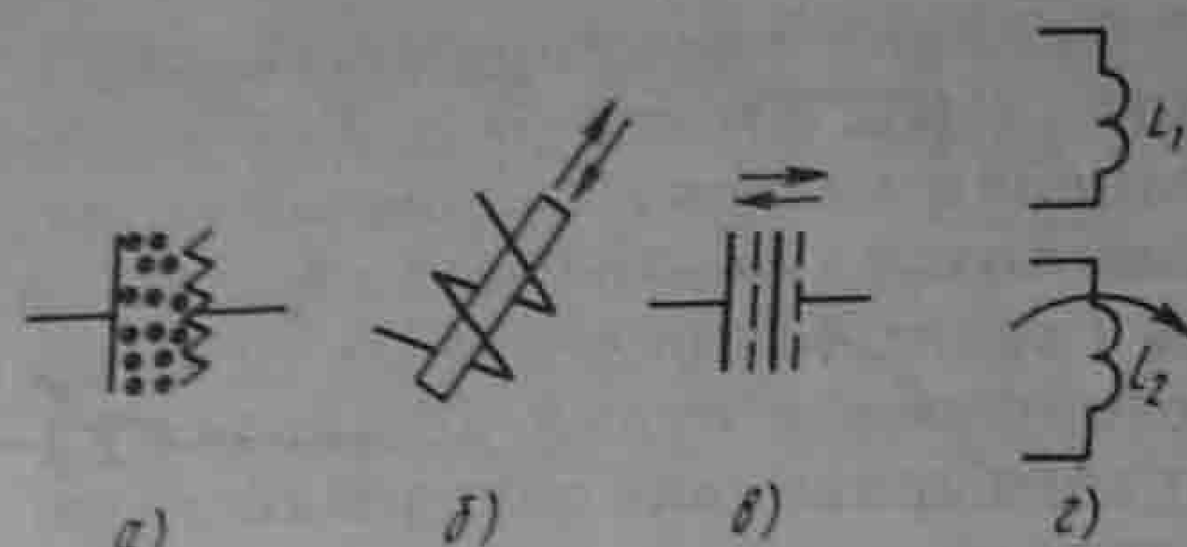



Рис. 18.1

ющиеся во времени (если в состав цепи входит хотя бы один изменяющийся во времени элемент, то она принадлежит к рассматриваемому классу цепей).

Угольный микрофон — пример изменяющегося во времени резистивного элемента (рис. 18.1, *а*). Сопротивление его является функцией звукового давления, оказываемого мембраной на порошок графита. Индуктивная катушка с незамкнутым ферромагнитным сердечником, который выдвигается из катушки и вдвигается в нее (рис. 18.1, *б*), — пример переменного во времени индуктивного элемента. Конденсатор, пластины которого раздвигаются и сдвигаются, не соприкасаясь (рис. 18.1, *в*), — пример емкостного элемента, изменяющегося во времени. Две индуктивные катушки $L_1$ и $L_2$ (рис. 18.1, *г*), взаимное расположение которых меняется во времени (например, если одна из них вращается вокруг своей оси, перпендикулярной рисунку), — пример взаимной индуктивности, меняющейся во времени.

Изменение параметров цепи во времени может происходить под действием внешней механической силы или чисто электрическим путем.

Параметр цепи может изменяться во времени периодически и непериодически. Рис. 18.2, *а* — *в* иллюстрирует несколько различных периодических законов изменения параметров.

**§ 18.2. Общие свойства электрических цепей.** Несмотря на то что цепи с переменными по времени параметрами являются линейными цепями (описываются линейными дифференциальными уравнениями), они обладают свойствами, сближающими их с нелинейными цепями.

Переменные во времени элементы цепи подобно нелинейным элементам являются генераторами высших гармоник тока и напряжения. В силу этого в цепях с переменными параметрами протекают токи не только тех частот, которые имеют источник вынуждающей силы и переменная составляющая изменяющегося во времени параметра, но и токи множества других частот.

Благодаря этому в цепях с переменными параметрами при наличии в их составе индуктивных и емкостных элементов могут возникать резонансные явления на высших и низших гармониках при отсутствии гармоник данной кратности у источника ЭДС.



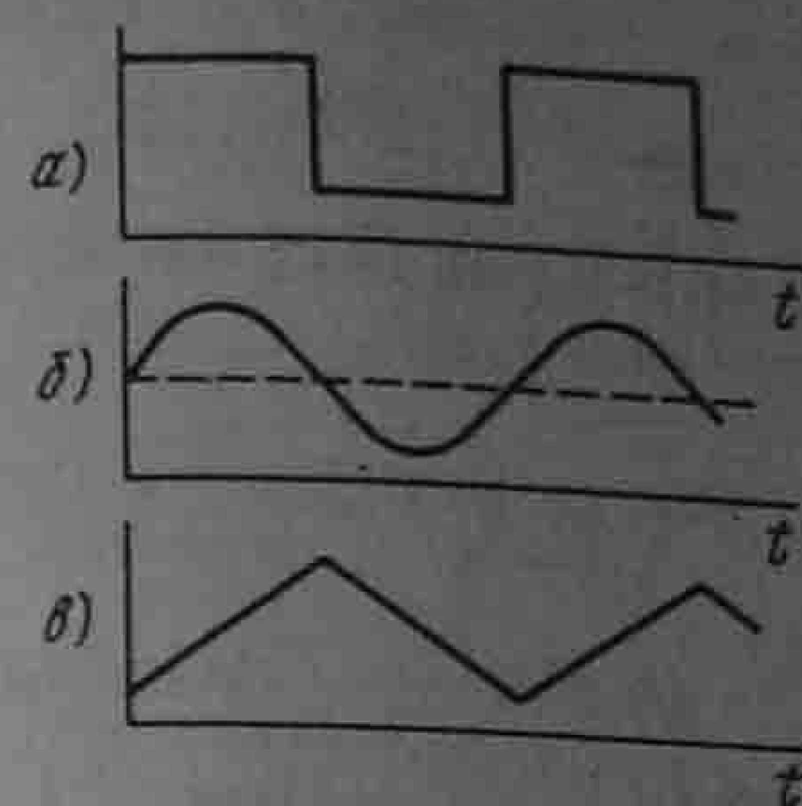



Рис. 18.2

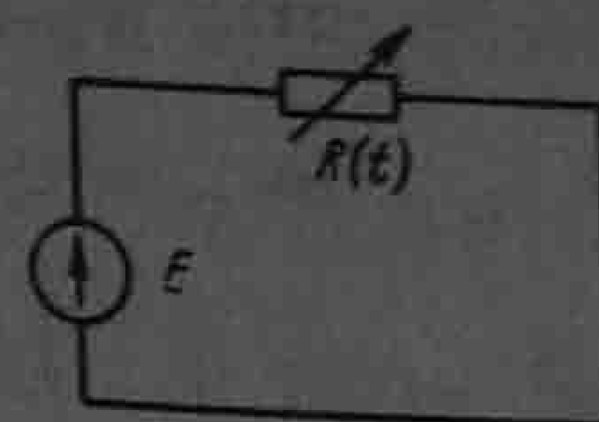



Рис. 18.3

Обратим внимание на то, что амплитуды отдельных гармоник тока в цепях с переменными параметрами линейно зависят от амплитуд остальных гармоник (в нелинейных цепях аналогичная зависимость нелинейна).

Наряду с этим цепи с переменными во времени параметрами обладают линейными свойствами, принципиально отличающими их от нелинейных цепей. В них амплитуды гармоник тока и напряжения пропорциональны амплитуде вынуждающей силы. Другими словами, если ЭДС источника увеличить вдвое, то и амплитуды токов и напряжений увеличатся вдвое. В цепях с нелинейными элементами, где имеет место насыщение, такой пропорциональности, как известно, нет.

Ранее отмечалось, что изменяющиеся во времени элементы цепи являются генераторами высших гармоник. Убедимся в этом на простейшем примере. На рис. 18.3 изображена схема, состоящая из источника постоянной ЭДС $E$ и резистора $R$, сопротивление которого изменяется во времени в соответствии с кривой (рис. 18.2, *б*):

$$R(t) = R_0(1 - \underset{k<1}{k\sin\omega t}). \tag{18.1}$$

По закону Ома, ток в цепи

$$i = \frac{E}{R(t)} = \frac{E}{R_0}\frac{1}{1 - k\sin\omega t}. \tag{18.1a}$$

Известно, что функция $1/(1-x)$ при $|x|<1$ может быть разложена в степенной ряд:

$$1/(1-x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n. \tag{18.2}$$

Роль, которую играет $x$ в (18.2), в (18.1а) выполняет $k\sin\omega t$. Поэтому при $k<1$

$$\frac{i}{E/R_0} = 1 + k\sin\omega t + k^2\sin^2\omega t + k^3\sin^3\omega t + \ldots . \tag{18.3}$$

Воспользуемся известными из тригонометрии формулами

$$\sin^2\alpha = 0{,}5(1-\cos 2\alpha);\ \sin^3\alpha = -0{,}25\sin 3\alpha + 0{,}75\sin\alpha;$$

$$\sin^4\alpha = 0{,}375 - 0{,}5\cos 2\alpha + 0{,}125\cos 4\alpha$$

и объединим слагаемые правой части ряда (18.3) с аргументами одинаковой кратности. В результате получим

$$\frac{i}{E/R_0} = (1 + 0{,}5k^2 + 0{,}375k^4 + \ldots) + (k + 0{,}25k^3 + \ldots)\sin\omega t -$$

$$-(0{,}5k^2 + 0{,}5k^4 + \ldots)\cos 2\omega t - (0{,}25k^3 + \ldots)\sin 3\omega t + \ldots$$

Таким образом, несмотря на то что в цепи (рис. 18.3) включен источник постоянной ЭДС, а переменная составляющая сопротивления резистора изменяется по закону синуса с частотой $\omega$, ток имеет и высшие гармоники (частоты $2\omega$, $3\omega$). Постоянная составляющая и амплитуды гармоник тока нелинейно зависят от коэффициента $k$, но линейно зависят от ЭДС $E$.

Обратим внимание также на то, что при $k \neq 0$ постоянная составляющая тока в цепи (рис. 18.3) не равна $E/R_0$, т. е. в схеме наблюдается своеобразный выпрямительный эффект.

Энергия, выделяющаяся в виде теплоты в цепи с переменными во времени параметрами, доставляется не только источниками ЭДС (тока), имеющимися в цепи, но и теми внешними источниками (например, механическими двигателями), которые совершают работу при изменении параметра (параметров) цепи.

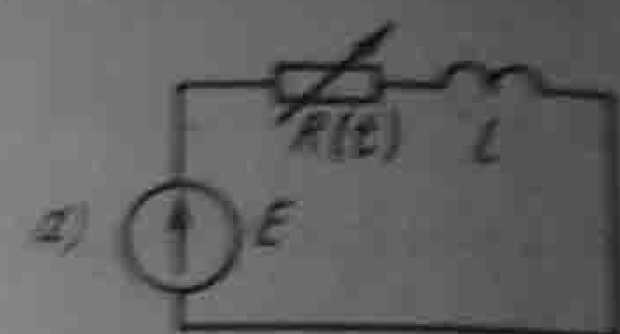
Какую долю энергии доставляет источник ЭДС, а какую дает внешний источник, совершающий работу при изменении параметра, для каждой цепи с переменными параметрами следует рассматривать применительно к конкретным условиям. Доля энергии, доставляемая внешним источником, может составлять в одном предельном случае нуль, в другом — 100 %.

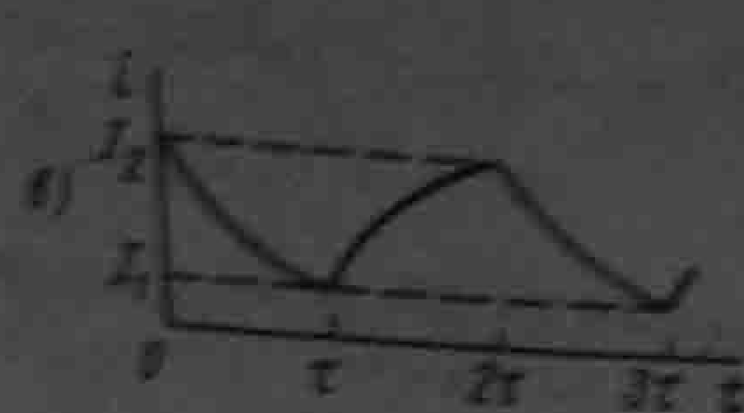
**§ 18.3. Расчет электрических цепей в установившемся режиме.** Если переменный параметр изменяется во времени периодически, претерпевая резкие скачкообразные изменения (см. рис. 18.2, *а*), то расчет цепей целесообразно проводить с помощью классического метода расчета переходных процессов. В этом случае постоянные интегрирования определяют, исходя из законов коммутации и периодичности процесса.

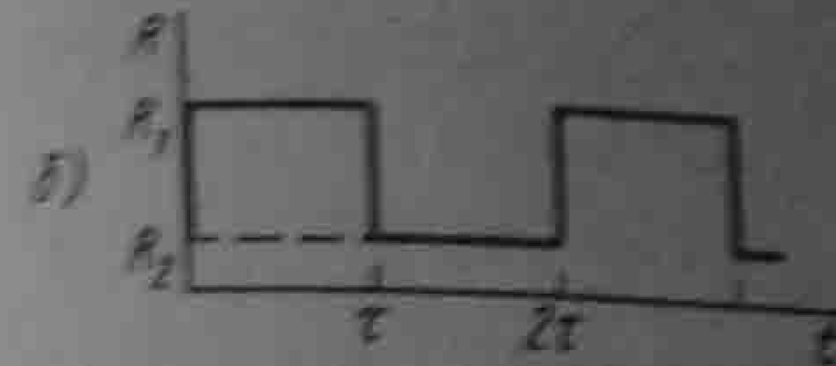
Если же переменный параметр изменяется так, что его можно представить в виде постоянной составляющей и одной или нескольких синусоидальных составляющих, то расчет производят, применяя метод гармонического баланса.

Метод гармонического баланса применительно к нелинейным цепям был рассмотрен в § 15.49. Основные его положения и здесь те же. Последовательность расчета такая: искомый ток (любая другая величина) изображают в виде ряда Фурье





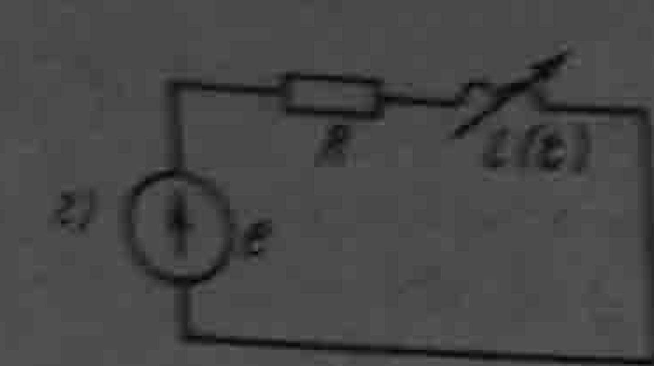




Рис. 18.4

$$i = I_0 + I_{11}\sin\omega t + I_{12}\cos\omega t + I_{21}\sin 2\omega t + I_{22}\cos 2\omega t + \ldots .$$

Полученное выражение для тока подставляют в дифференциальное уравнение цепи и выделяют из него уравнение, выражающее собой равенство постоянных составляющих левой и правой его частей, уравнение, выражающее собой равенство синусных составляющих левой и правой частей, и т. д. Каждое из этих уравнений в общем случае содержит несколько неизвестных ($I_0, I_{11}, I_{12}, I_{21}, I_{22}$), но является линейным уравнением относительно этих неизвестных (в этом отличие от нелинейных цепей). Далее решают систему линейных уравнений относительно $I_0, I_{11}, I_{12}, I_{21}, I_{22}$.

Метод гармонического баланса можно применять к расчету цепей, содержащих несколько переменных во времени параметров (например, изменяющееся во времени резистивное сопротивление и изменяющуюся во времени индуктивность), причем характер изменения во времени ЭДС (тока) может быть по любому периодическому закону.

Пример 167. В схеме на рис. 18.4, *а* ЭДС $E$ источника ЭДС и индуктивность $L$ катушки постоянны, а сопротивление резистора $R(t)$ меняется в соответствии с рис. 18.4, *б*. Определить закон изменения тока в установившемся режиме.

Р е ш е н и е. Так как сопротивление изменяется периодически, то и ток изменяется периодически. Обозначим значение тока в момент $t=0$ через $I_2$. В этот момент сопротивление цепи скачком возрастает от $R_2$ до $R_1$ и ток в цепи начинает уменьшаться. В момент $t=\tau$ ток принимает значение $I_1$ и сопротивление скачком уменьшается с $R_1$ до $R_2$. Последнее приводит к тому, что ток начинает увеличиваться.

В первом интервале времени от $t=0$ до $t=\tau$ ток можно представить в виде суммы принужденного $E/R_1$ и свободного $C_1e^{p_1t}$ токов, причем $p_1=-R_1/L$ — корень характеристического уравнения цепи $pL+R_1=0$; $C_1$ — постоянная интегрирования.

Во втором интервале времени от $t=\tau$ до $t=2\tau$

$$i=\frac{E}{R_2}+C_2e^{p_2(t-\tau)};\quad p_2=-R_2/L.$$

Задача сводится к определению двух постоянных: $C_1$ и $C_2$. При $t=0$ $i=I_2$; следовательно,

$$I_2=E/R_1+C_1. \qquad (18.4)$$

При $t=\tau$ $i=I_1$, поэтому

$$I_1=\frac{E}{R_1}+C_1e^{p_1\tau}. \qquad (18.5)$$

Начальное значение тока для второго интервала времени $I_1$ можно найти и иначе:

$$I_1=\frac{E}{R_2}+C_2. \qquad (18.6)$$

К концу второго интервала времени, когда $t=2\tau$, $i=I_2$,

$$I_2=E/R_2+C_2e^{p_2\tau}. \qquad (18.7)$$

Приравнивая правые части уравнений (18.4) и (18.7), получим

$$\frac{E}{R_1}+C_1=\frac{E}{R_2}+C_2e^{p_2\tau}.$$

Аналогично, из уравнений (18.5) и (18.6) следует, что

$$\frac{E}{R_2}+C_2=\frac{E}{R_1}+C_1e^{p_1\tau}.$$

Совместное решение двух последних уравнений дает

$$C_1=\frac{a(1-e^{p_2\tau})}{1-e^{p_1\tau+p_2\tau}}; \qquad (18.8)$$

$$C_2=-a+C_1e^{p_1\tau};\ a=\frac{E}{R_2}-\frac{E}{R_1}. \qquad (18.9)$$

В первом интервале времени $i=E/R_1+C_1e^{p_1t}$, во втором $i=E/R_2+C_2e^{p_2(t-\tau)}$. Кривая $i=f(t)$ показана на рис. 18.4, *в*.

**Пример 168.** В схеме на рис. 18.4, *г* ЭДС $e=E+E_m\sin(\omega t+\psi)$, $L=L_0(1+k\sin\omega t)$ $(k<1)$, сопротивление $R$ не является функцией времени. Определить постоянную составляющую, а также первую и вторую гармоники тока.

Р е ш е н и е. В дифференциальное уравнение

$$Ri+\frac{d}{dt}(Li)=E+E_m\sin(\omega t+\psi) \qquad (18.10)$$

подставляем ток

$$i=I_0+I_{11}\sin\omega t+I_{12}\cos\omega t+I_{21}\sin2\omega t+I_{22}\cos2\omega t. \qquad (18.11)$$

Выделив постоянную составляющую, получим уравнение

$$RI_0=E. \qquad (18.12)$$

Равенство коэффициентов при $\sin\omega t$ в обеих частях (18.10) после подстановки в него (18.11) и деления на $R$ дает

$$I_{11}-aI_{12}-0{,}5kaI_{21}=\frac{E_m}{R}\cos\psi. \qquad (18.13)$$

Приравняв коэффициенты при $\cos\omega t$ (после деления на $R$), получим

$$aI_{11}+I_{12}-0{,}5kaI_{22}=-akI_0+\frac{E_m}{R}\sin\psi; \qquad (18.14)$$



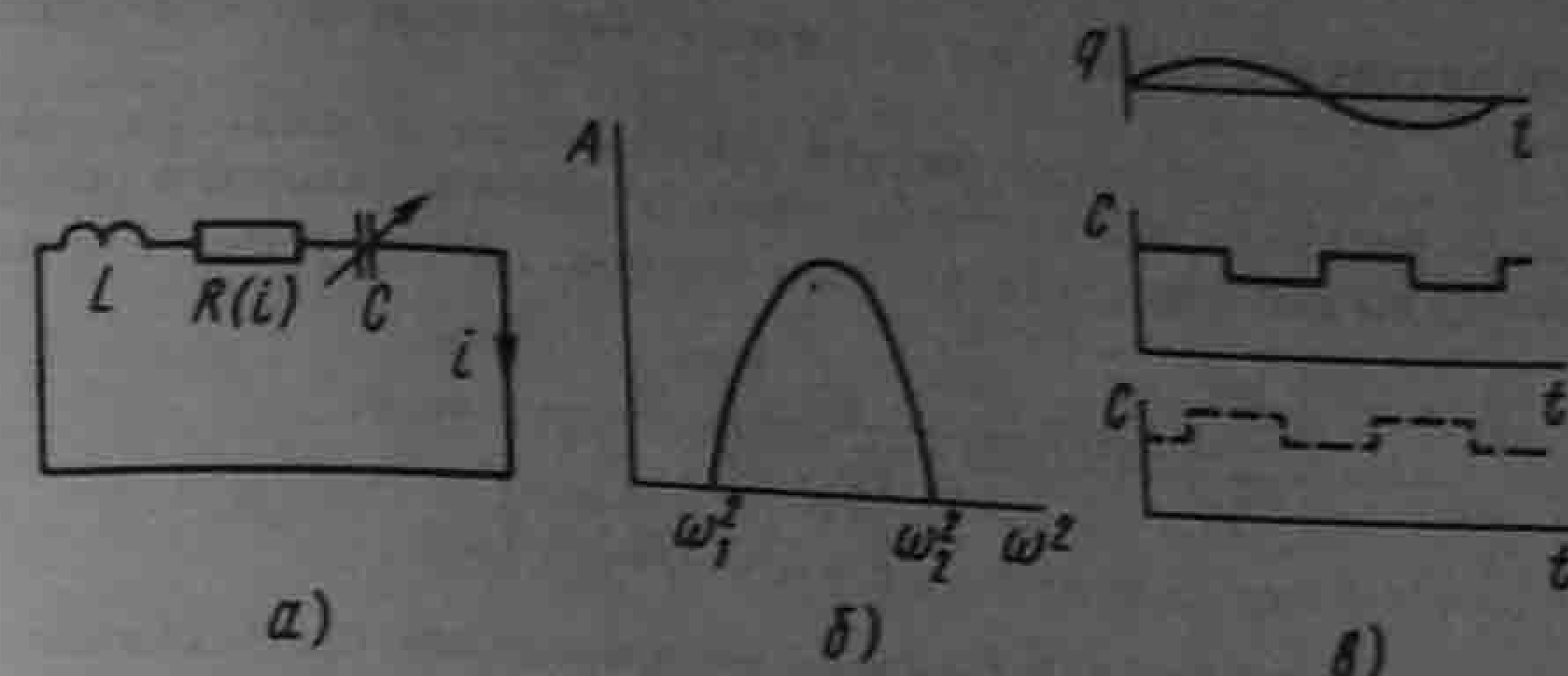



Рис. 18.5

при $\sin2\omega t$

$$akI_{11}+I_{21}-2aI_{22}=0; \qquad (18.15)$$

при $\cos2\omega t$

$$akI_{12}+2aI_{21}+I_{22}=0. \qquad (18.16)$$

$$a=\omega L_0/R. \qquad (18.17)$$

Из (18.12) следует, что в схеме на рис. 18.4, *г* постоянная составляющая тока $I_0$ не зависит от переменных составляющих индуктивности и ЭДС. Однако постоянная составляющая потокосцепления, равная $L_0I_0+0{,}5kL_0I_{11}$, зависит от амплитуды первой гармоники переменного тока.

Это свойство в известном смысле напоминает первое из свойств нелинейных элементов с симметричными характеристиками, описанное в § 15.17.

Запишем решение уравнений (18.13) — (18.16):

$$I_{11}=\frac{\alpha M+\beta N}{\alpha^2+\beta^2};\ I_{12}=\frac{N-\beta I_{11}}{\alpha};\ I_{21}=\gamma I_{11}-\nu I_{12};\ I_{22}=\nu I_{11}-\gamma I_{12};$$

$$M=\frac{E_m}{R}\cos\psi;\ N=\frac{E_m}{R}\sin\psi-akI_0;\ \alpha=\frac{1+4a^2-0{,}5a^2k^2}{1+4a^2};$$

$$\gamma=\frac{ak}{1+4a^2};\ \beta=\frac{a(1+4a^2-a^2k^2)}{1+4a^2};\ \nu=\frac{2a^2k}{1+4a^2}.$$

Изменяя постоянную ЭДС $E$ в схеме на рис. 18.4, *г*, можно управлять переменным током.

**§ 18.4. Параметрические колебания.** Возникающие в электрических цепях без источников ЭДС и источников тока незатухающие колебания, обусловленные периодическим изменением индуктивности или емкости системы, называют *параметрическими*. Колебания поддерживаются за счет работы механической силы при периодическом изменении параметра либо за счет энергии, вносимой в цепь при периодическом изменении параметра электрическим путем. Частота первой гармоники параметрических колебаний оказывается в два раза меньше частоты изменения параметра.

На рис. 18.5, *а* изображена простейшая цепь, в которой при определенных условиях возникают колебания рассматриваемого типа. Цепь состоит из катушки индуктивностью $L$, нелинейного резистора, ограничивающего амплитуду колебаний $R(i)=R_0+ki^2$, и конденсатора, емкость которого изменяется во времени: $C=C_0-\Delta C\cos2\omega t$, $\Delta C/C_0\ll1$. (Предположение, что $\Delta C/C_0\ll1$, принято только для облегчения решения.)

Сначала рассмотрим случай, когда емкость конденсатора изменяется механическим путем.

Внешняя сила, совершающая работу при изменении емкости конденсатора, доставляет в цепь энергию. Эта энергия равна потерям в активном сопротивлении. По второму закону Кирхгофа,

$$L\frac{di}{dt}+R(i)\,i+\frac{\int i\,dt}{C_0\left(1-\frac{\Delta C}{C_0}\cos 2\omega t\right)}=0.$$

В соответствии с формулой (18.2) последнее слагаемое представим так:

$$\frac{1}{C_0}\left(1+\frac{\Delta C}{C_0}\cos 2\omega t\right)\int i\,dt.$$

Подставим в это уравнение $i=a\sin\omega t-b\cos\omega t$, разобьем его на синусные и косинусные составляющие частоты $\omega$ (высшими гармониками пренебрежём) и решим относительно квадрата амплитуды тока $a^2+b^2=A^2$:

$$A^2=\frac{2L}{3k\omega}\sqrt{\left(\frac{1}{LC_0}\right)^2\left(\frac{\Delta C}{C_0}\right)^2-4\left(\omega^2-\frac{1}{LC_0}\right)^2}-\frac{4R_0}{3k}.$$

При $A^2>0$ колебания существуют; $A^2>0$ при $\omega_1<\omega<\omega_2$ (рис. 18.5, *б*); $\omega_{1,2}$ определяют как корни уравнения $A^2=0$. При $\omega^2=\frac{1}{LC_0}$

$$A^2=A^2_{\max}=\frac{2}{3}\left(\sqrt{\frac{L}{C_0}}\frac{\Delta C}{C_0}-2R_0\right).$$

Условием возникновения колебаний в этом случае является

$$\frac{\Delta C}{C_0}>\frac{2R_0}{\sqrt{L/C_0}}.$$

Качественно поясним сущность процесса поступления энергии в цепь при изменении емкости конденсатора во времени. Энергия, запасенная в электрическом поле конденсатора емкостью $C$ с зарядом $\pm q$ на пластинах, $W_э=q^2/(2C)$. Если при неизменном $q$ емкость изменить на $\Delta C(\Delta C/C\ll 1)$, то энергия станет равной

$$\frac{q^2}{2(C+\Delta C)}\approx\frac{q^2}{2C}\left(1-\frac{\Delta C}{C}\right).$$

Приращение энергии

$$\Delta W_э=-\frac{q^2}{2C}\frac{\Delta C}{C}.$$

Верхняя кривая (рис. 18.5, *в*) изображает изменяющийся по синусоидальному закону во времени заряд $q$. Средняя кривая иллюстрирует характер изменения емкости во времени (для простоты рассуждений он принят не синусоидальным, а прямоугольным). Когда заряд $q$ проходит через максимум, то емкость почти скачком уменьшается ($\Delta C<0$), когда через нуль, то емкость почти скачком возрастает ($\Delta C>0$).

Уменьшение емкости соответствует раздвиганию пластин конденсатора, а увеличение — их сближению. Поэтому, чтобы при $q=q_m$ емкость почти скачком уменьшить, нужно быстро раздвинуть пластины. Но пластины заряженного конденсатора притягиваются друг к другу. Следовательно, для того чтобы раздвинуть пластины, внешний источник энергии должен затратить работу на преодоление сил их притя-



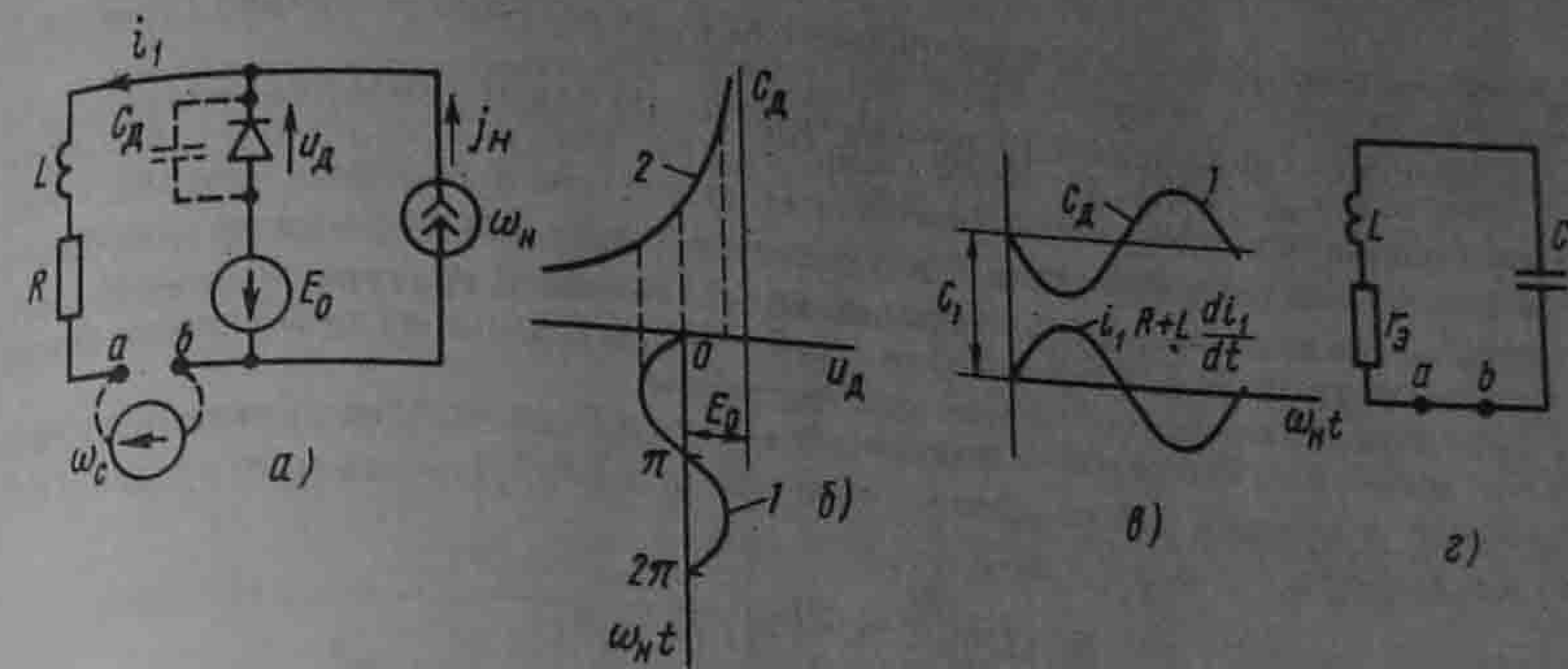



Рис. 18.6

жения. Эта работа переходит в энергию электрического поля конденсатора. За период изменения $q$ энергия конденсатора дважды возрастает на

$$\Delta W_э=\frac{q_m^2}{2C}\frac{|\Delta C|}{C}.$$

Сближение пластин (увеличение $C$) происходит при $q=0$, когда силы, действующие на пластины (силы поля), равны нулю. Поэтому при сближении пластин внешняя сила не совершает работы.

Поступление энергии в параметрическую цепь при изменении параметра цепи называют *накачкой энергии*. Рис. 18.5, *в* качественно поясняет также, почему частота колебаний на схеме в рис. 18.5, *а* в два раза меньше частоты изменения параметра (емкости). Если емкость стала бы изменяться во времени в соответствии с пунктирной кривой (рис. 18.5, *в*), то энергия в этом случае в цепь не доставлялась бы (не накачивалась), ибо сколько энергии доставит в цепь внешний источник при уменьшении емкости, столько же цепь отдаст ему обратно при ее увеличении. Накачка энергии в цепь может происходить не только при изменении емкости, но и при изменении индуктивности во времени.

**§ 18.5. Параметрические генератор и усилитель.** В параметрических генераторе (ПГ) и усилителе (ПУ) емкость варьируют не механическим, а электрическим путем — изменяя емкость диода (варикапа), находящегося в запертом состоянии. На рис. 18.6, *а* в ПГ зажимы *ab* закорочены, а в ПУ к зажимам *ab* подключен источник сигнала частотой $\omega_с$ (показано пунктиром). Источник постоянной ЭДС $E_0$ запирает диод.

Накачка энергии осуществляется от источника синусоидального тока $j_н$ частотой $\omega_н$ и амплитудой $I_{нm}$. Часть этого тока (ток $i_1$) амплитудой $I_{1m}$ проходит через $R$ и $L$ и совместно с $E_0$ образует падение напряжения на диоде: $u_д=-E_0-Ri_1-L\frac{di_1}{dt}$ (кривая *1* на рис. 18.6, *б*). Чтобы диод был заперт, это напряжение должно быть отрицательным. Диод будет заперт, если

$$I_{1m}<\frac{E_0}{\sqrt{R^2+(\omega_н L)^2}}.$$

Зависимость емкости *p-n*-перехода $C_д$[1] от напряжения на диоде $u_д$ иллюстриру-

[1] При $u_д<0$ основную роль играет барьерная емкость *p-n*-перехода, обусловленная перераспределением зарядов у границы областей с различным характером проводимости. При $u_д>0$ основную роль играет диффузионная емкость *p-n*-перехода. Она обусловлена перераспределением зарядов в базе. В схеме на рис. 18.6 под $C_д$ понимается барьерная емкость.

ется кривой 2 (рис. 18.6, *б*), а изменение емкости $C_д$ во времени — кривой 1 (рис. 18.6, *а*). Среднее за период значение емкости $C_д$ обозначим $C_1$.

Схема замещения параметрического генератора для частоты параметрических колебаний $\omega_р=\omega_н/2\approx 1/\sqrt{LC_1}$ изображена на рис. 18.6, *г*. Вносимая генератором накачки (источником синусоидального тока) на частоте $\omega_н$ энергия компенсирует потери в активном сопротивлении $R$ на частоте $\omega_р$. Этот процесс можно трактовать как уменьшение активного сопротивления колебательного контура $r_э$ до нуля (ср. с ламповым генератором § 16.6, в котором $r_э=R-MS/C$). Амплитуда установившихся колебаний определяется энергетическим балансом.

Если допустить, что глубина модуляции емкости $C_д$ $m \ll 1$, то, составив дифференциальное уравнение для колебательного контура $LRC_д$ (зажимы $ab$ на рис. 18.6, *а* короткозамкнуты)

$$Ri_1 + L\frac{di_1}{dt} + \frac{1}{C_д}\int i_1 dt = 0$$

и подставив в него

$$\frac{1}{C_д} = \frac{1}{C_1(1-m\sin 2\omega_р t)} \approx \frac{1}{C_1}(1+m\sin 2\omega_р t), \quad i_1=I_m\sin\omega_р t,$$

получим два уравнения (синусная и косинусная компоненты):

$$r_э = R - \frac{m}{2\omega_р C_1} = 0; \quad \omega_р = \frac{1}{\sqrt{LC_1}}.$$

При работе схемы (рис. 18.6, *а*) в качестве ПУ генератор накачки настраивают на такой режим, при котором вносимая им энергия уменьшает активное сопротивление контура $r_э$ не до нуля (как это было в случае с ПГ), а до $r_э \ll R$. Параметры $L$ и $C_1$ подбирают так, чтобы $\omega_с=1/\sqrt{LC_1}$. При этом источник сигнала (источник ЭДС $E_с$ частотой $\omega_с$) вызовет ток $I_с=\dfrac{E_с}{r_э}$.

Отношение выходного напряжения (на индуктивном элементе) к входному $\dfrac{U_{вых}}{E_с}=\omega_с\dfrac{L}{r_э}=\dfrac{\sqrt{L/C_1}}{r_э}$ достаточно велико — схема работает в качестве усилителя.

**Вопросы для самопроверки**

1. Почему можно сказать, что линейные электрические цепи с изменяющимися во времени параметрами занимают промежуточное положение между линейными цепями с неизменными параметрами и нелинейными электрическими цепями? **2.** Какие вы знаете способы изменения параметров реактивных элементов в изучаемых цепях? **3.** Изложите известные вам методы расчета цепей с переменными во времени параметрами. **4.** Какие колебания называют параметрическими? **5.** Что понимают под накачкой энергии в параметрическую цепь? Как ее осуществляют практически? **6.** Чем можно объяснить, что частота изменения параметра в два раза больше

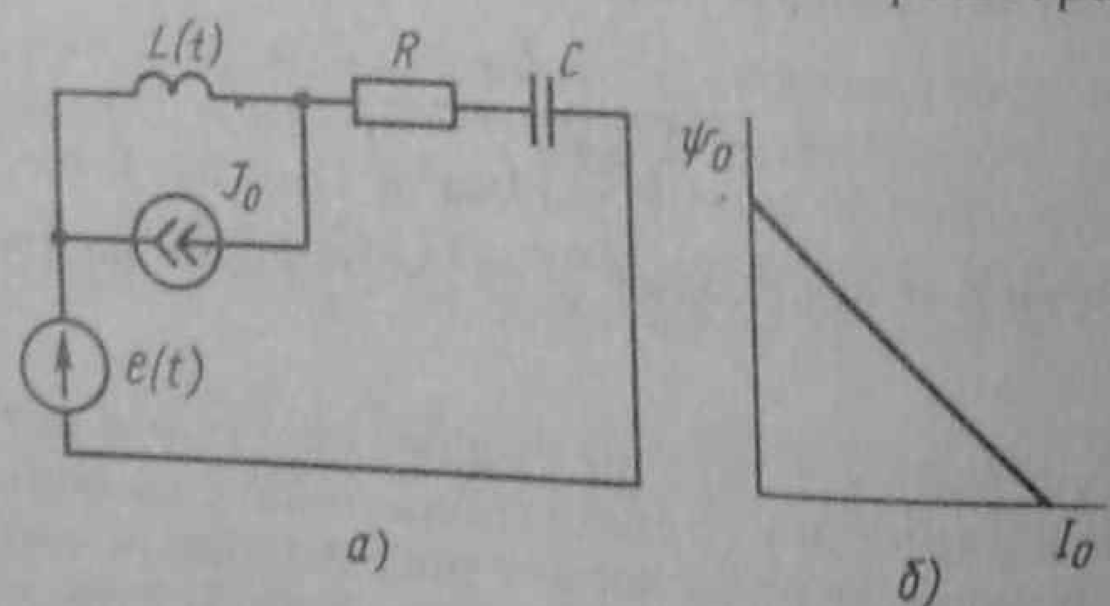



Рис. 18.7



частоты параметрических колебаний? **7.** Поясните принцип работы параметрического генератора и параметрического усилителя. **8.** Электрическая цепь (рис. 18.7, *а*) образована источником синусоидальной ЭДС $e(t)=E_m\sin\omega t$, резистором $R$, конденсатором $C$ и индуктивной катушкой, у которой $L(t)=L_0(1+m\sin\omega t)$. Через $L(t)$ протекает ток $i+I_0$. Приняв $i=I_m\sin(\omega t-\alpha)$: 1) покажите, что зависимость постоянной составляющей потокосцепления $\psi_0$ индуктивной катушки от тока $I_0$ имеет вид $\psi_0=a+bI_0$; 2) выведите условия, при которых $b<0$ (при этом зависимость $\psi_0=f(I_0)$ соответствует рис. 18.7, *б* и $L_{диф}=\dfrac{d\psi}{dt}<0$).

*Ответ:* 1) $a=\dfrac{mL_0RE_m}{2\left[\omega L_0-\dfrac{1}{\omega C}\right]^2+R^2}$; $b=L_0\dfrac{(\omega L_0-1/\omega C)^2+R^2-\dfrac{m^2}{2}\omega L_0\left(\omega_0 L-\dfrac{1}{\omega C}\right)}{\left(\omega L_0-\dfrac{1}{\omega C}\right)^2+R^2}$;

2) $b<0$ при выполнении трех условий:

$$\left(\omega L_0-\frac{1}{\omega C}\right)>0;\ \omega L_0\left(1-\frac{m^2}{2}\right)-\frac{1}{\omega C}<0;\ R^2<\left|\left(\omega L_0-\frac{1}{\omega C}\right)\left[\omega L_0\left(1-\frac{m^2}{2}\right)-\frac{1}{\omega C}\right]\right|.$$

## Литература к II части


*а) Учебники*

1. *Нейман Л. Р., Демирчян К. С.* Теоретические основы электротехники, Ч. I, II. — М.: Энергия, 1981.
2. Теоретические основы электротехники/Под ред. *П. А. Ионкина*. Ч. I, II. — М.: Высшая школа, 1975.

*б) Учебные пособия и монографии*

3. *Балабанян Н.* Синтез электрических цепей: Пер. с англ./Под ред. *Г. И. Атабекова*. — М.: Госэнергоиздат, 1961.
4. *Бессонов Л. А.* Линейные электрические цепи. — М.: Высшая школа, 1983.
5. *Гарднер М. Ф., Бэрнс Д. А.* Переходные процессы в линейных системах. — М.: Физматгиз, 1961.
6. *Деруссо П., Рой Р., Клоуз И.* Пространство состояний в теории управления: Пер. с англ./ Под ред. М. В. Меерова. — М.: Наука, 1970.
7. Основы инженерной электрофизики. Ч. II/Под ред. *П. А. Ионкина*. — М.: Высшая школа, 1972.
8. *Круг К. А.* Переходные процессы в линейных электрических цепях. — М. — Л.: Госэнергоиздат, 1948.
9. *Лэм Г.* Аналоговые и цифровые фильтры. Расчет и реализация: Пер. с англ./Под ред. И. Н. Теплюка. — М.: Мир, 1982.
10. *Баскаков С. И.* Радиотехнические цепи и сигналы. — М.: Высшая школа, 1988.
11. *Мэзон С., Циммерман Г.* Электронные цепи, сигналы и системы: Пер. с англ./Под ред. П. А. Ионкина. — М.: ИЛ, 1963.
12. *Матханов П. Н.* Основы анализа электрических цепей. Линейные цепи. — М.: Высшая школа, 1981.
13. *Матханов П. Н.* Основы синтеза линейных электрических цепей. — М.: Высшая школа, 1976.
14. *Новак М.* Частотные преобразования в теории цепей: Пер. с чешского. — М.: Советское радио, 1975.
15. *Рабиндер Л., Гоулд Б.* Теория и применение цифровой обработки сигналов. — М.: Мир, 1978.
16. *Харкевич А. А.* Спектры и анализ. — М.: Гостехиздат, 1962.
17. *Мошиц Г., Хорн П.* Проектирование активных фильтров: Пер. с англ./Под ред. И. Н. Теплюка. — М.: Мир, 1984.
18. *Бессонов Л. А., Привалов В. К., Туренко Б. А.* Синусоидальный режим магнитной линии с распределенными параметрами. Межвузовский сборник трудов/МИРЭА. Автоматизированное проектирование устройств СВЧ.—М., 1990.

*в) Учебные пособия и монографии по нелинейным цепям*

19. *Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э.* Теория колебаний. — М.: Физматгиз, 1959.
20. *Бессонов Л. А.* Нелинейные электрические цепи. — М.: Высшая школа, 1977.
21. *Бессонов Л. А.* Автоколебания (автомодуляция и некоторые динамические явления) в электрических цепях со сталью. — М.: Госэнергоиздат, 1958.
22. *Каннингхем В.* Введение в теорию нелинейных систем: Пер. с англ. — М.: Госэнергоиздат, 1962.

*г) Задачники*

23. Сборник задач по теоретическим основам электротехники/*Л. А. Бессонов, И. Г. Демидова, М. Е. Заруди, С. Э. Расовская, С. А. Миленина, В. П. Каменская* — М.: Высшая школа, 1988.
24. Задачник по теоретическим основам электротехники. Теория цепей/Под ред. *К. М. Поливанова*. — М.: Энергия, 1973.
25. Сборник задач и упражнений по теоретическим основам электротехники/Под ред. *П. А. Ионкина*. — М.: Энергоиздат, 1982.

*д) Руководства по применению универсальных программ для ЭВМ по расчету цепей*

26. *Удалов Н. Н., Разевиг В. Д.* Программа анализа нелинейных радиоэлектронных схем на ЕС ЭВМ. — М.: МЭИ, 1981.
27. *Удалов Н. Н., Разевиг В. Д.* Моделирование радиоэлектронных схем на СМ ЭВМ. — М.: МЭИ, 1986 (в [26] и [27] даны методические указания к программе NAP, позволяющей проводить расчет установившихся и переходных процессов в линейных и нелинейных цепях, расчет АЧХ и ФЧХ, чувствительности, осуществить оптимизацию).
28. Методические указания по эксплуатации комплекса СПАРС моделирования электронных схем на ЭВМ ЕС при курсовом и дипломном проектировании/*А. И. Петренко, А. И. Власов, А. П. Тимченко, В. С. Мачуговский*. — Киев: КПИ, 1979. (СПАРС — схемотехническое проектирование аналоговых радиоэлектронных схем.)
29. Инструкция программы ПАЛЬМА анализа линейных цепей/*В. М. Богачев, В. М. Демидов, С. В. Дмитриев, Н. Г. Юрчак*. — М.: МЭИ, 1986 (программа предназначена для анализа линейных цепей в символьной форме. Позволяет рассчитать передаточную функцию в аналитической форме, АЧХ, ФЧХ, переходные процессы, осуществить оптимизацию. Программы для ЕС ЭВМ и ЭВМ СМ-4).

## Приложение А

### Направленные и ненаправленные графы

**§ А.1. Характеристика двух направлений в теории графов.** Обобщенно граф — это совокупность узлов и соединяющих их ветвей. Каждый граф характеризуется своей топологией, т. е. информацией о том, какими ветвями и с какой проводимостью (с какой передачей и в каком направлении) связаны друг с другом узлы графа.

Теория графов — это учение об общих топографических свойствах графов и о методах их расчета. Теория графов развивалась в двух направлениях: первое — матрично топологическое, второе — чисто топологическое. Основные положения матрично-топологического направления были рассмотрены в гл. 2 (см. § 2.31 — 2.37). Основные положения чисто топологического направления рассмотрены в Приложении А, где сначала рассмотрены основные положения теории направленных графов (см. § А.2 — А.5), затем ненаправленных (см. § А.6 — А.11).

### I. Направленные графы

**§ А.2. Основные определения.** *Направленным*, или *линейным*, *графом* (графом сигнала, диаграммой прохождения сигнала) называют совокупность узлов и соединяющих их ветвей, стрелки на которых указывают направление передачи сигнала (воздействия) от одного узла к другому.

*Узлами* в направленных графах обычно являются токи и (или) потенциалы узлов исследуемых электрических цепей, а не узловые точки этих цепей, как это имеет место в ненаправленных графах (см. § А.6 — А.11).

Каждая ветвь графа характеризуется своей передачей. *Под передачей ветви* принимают отношение выходной величины к входной. Так, например, выходная величина $x_2$ ветви (рис. А.1, *а*) равна произведению входной величины (входного сигнала) $x_1$ на передачу *a*: $x_2=ax_1$.

Передача ветви может иметь размерность проводимости, сопротивления или нулевую размерность.

В том или ином узле графа, кроме входного и выходного, в общем случае может сходиться и от него может уходить по нескольку ветвей. На рис. А.1, *б* изображен некоторый граф с узлами 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Передачи ветвей этого графа обозначены буквами *a*, *b*, *c*, ... Направление передач указано стрелками.

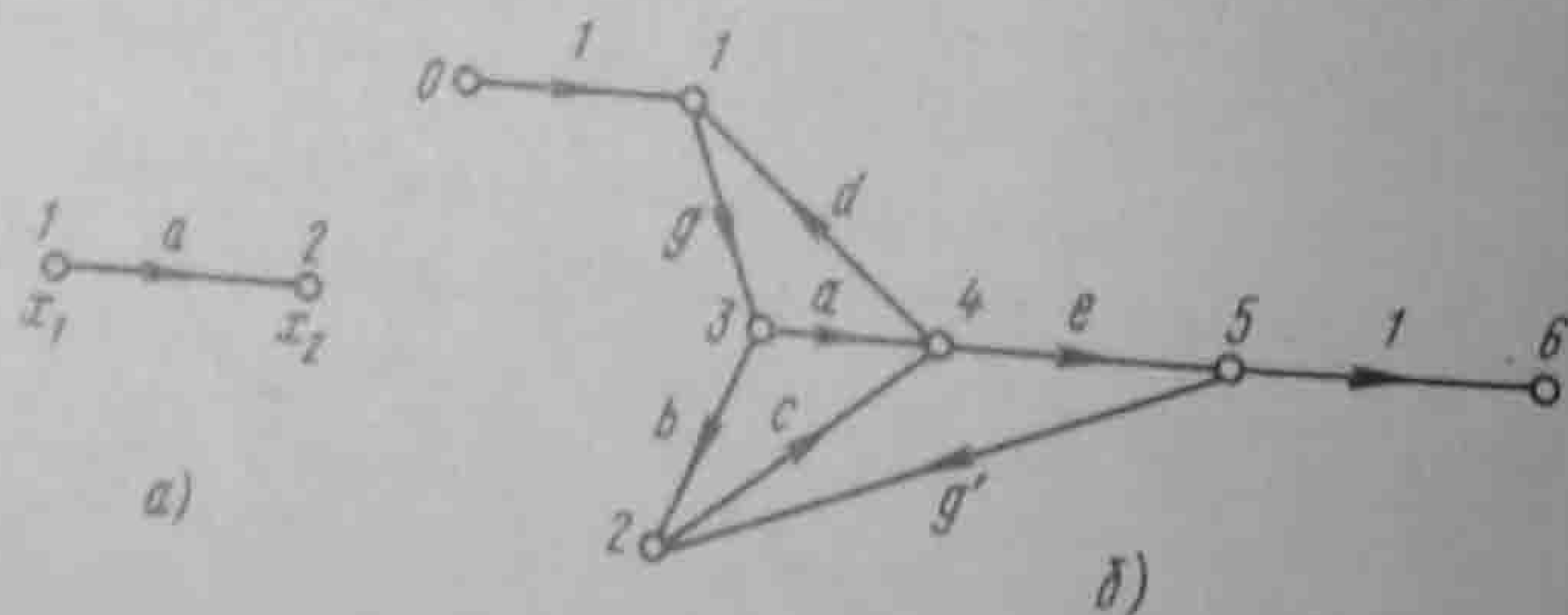



Рис. А.1



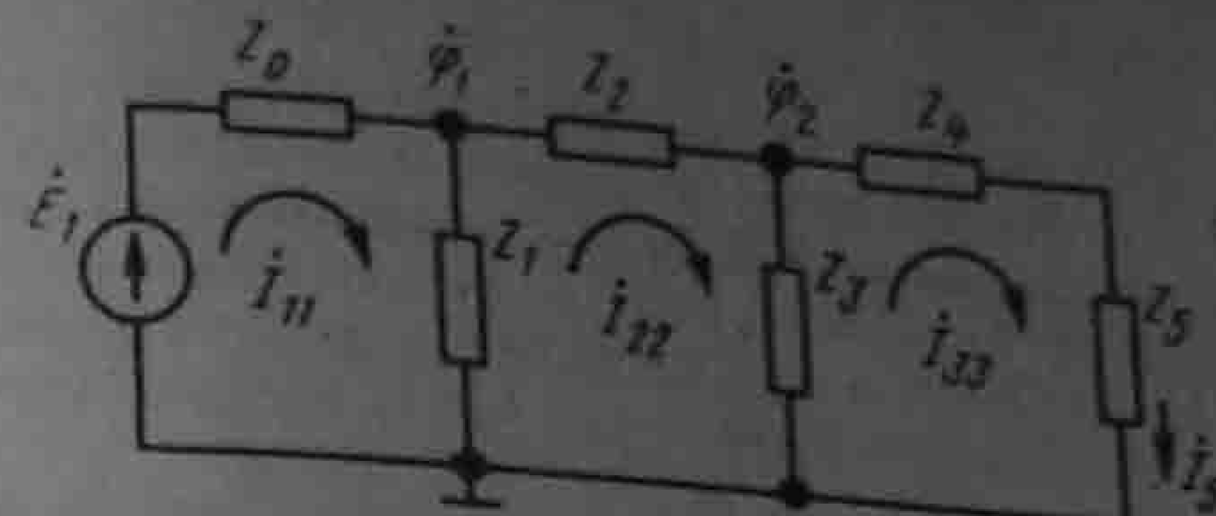



Рис. А.2

Под $x_1$ будем понимать узловой сигнал первого узла, под $x_2$ — узловой сигнал второго узла и т. д.

Узловой сигнал *k*-узла равен сумме сигналов, приходящих к этому узлу. При составлении узлового сигнала *k*-узла выходящие из этого узла сигналы не учитываются; они учитываются при составлении узловых сигналов тех узлов, к которым эти сигналы подходят. Так, узловой сигнал первого узла графа рис. А.1, *б* $x_1=1x_0+dx_4$, второго узла $x_2=bx_3+g'x_5$; третьего узла $x_3=gx_1$ и т. д.

Узел графа, выражающий собой величину, принятую в изучаемой системе за входную, обычно изображают на чертеже слева, а узел, соответствующий выходной величине, — справа.

Принято изображать граф так, чтобы от входного узла отходила только одна ветвь, а подходящих ко входному узлу ветвей вообще не было.

Аналогично, к выходному узлу должна подходить только одна ветвь (отходящих от него ветвей не должно быть). Это можно сделать, введя в граф дополнительные узлы и ветви, передачи которых равны единице. В графе рис. А.1, *б* дополнительными узлами являются узлы *1* и *5*. Между входным узлом *0* и дополнительным узлом *1* имеется ветвь с передачей *1*. На рис. А.1, *б* дополнительный узел *5* соединен с выходным узлом *6* ветвью с передачей, равной единице. Часто узлы, передача между которыми равна единице, обозначают одинаково, например, для схемы (рис. А.1, *б*) узел *0* можно назвать узлом *1* (тогда на рисунке будет два узла, обозначенных цифрой *1*).

**§ А.3. Переход от изучаемой системы к направленному графу.** Для того чтобы от какой-либо электрической цепи перейти к соответствующему ей направленному графу, применяют различные методы в зависимости от того, каким образом записывают уравнения для этих цепей: на основании законов Кирхгофа, используя метод узловых потенциалов или метод контурных токов и т. д.

Направленный граф содержит ту же информацию, что и система уравнений. Только информация эта выражена графически.

Если за основу взять уравнения, составленные на основании законов Кирхгофа, то узлами графа являются токи ветвей и напряжения на элементах схемы. В том случае, когда за основу взяты уравнения, составленные методом узловых потенциалов, узлы графа будут выражать собой потенциалы узловых точек схемы, узловые и искомые токи (напряжения).

При некотором навыке граф вычерчивают, даже не записывая самих уравнений, послуживших основой для его составления.

Упорядоченный переход от заданной электрической схемы к направленному графу, минуя этап составления уравнений, рассмотрим, положив в основу метод контурных токов (переход от рис. А.2 к рис. А.3, *а*).

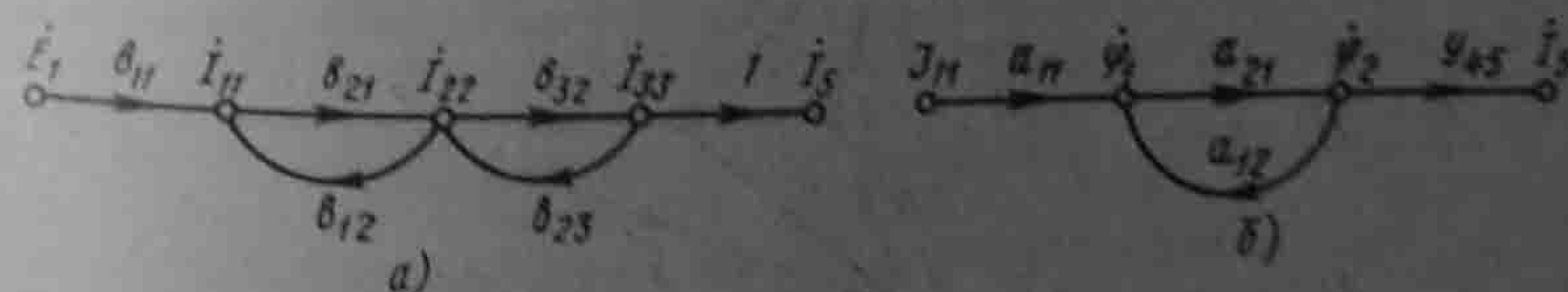



Рис. А.3

Направления контурных токов во всех контурах выбираем одинаковыми, например по часовой стрелке. Число узлов в графе равно числу контурных токов плюс число, не равных нулю контурных ЭДС, плюс выходная величина.

Каждому контурному току, каждой контурной ЭДС и выходной величине соответствует свой узел. Так, схеме рис. А.2, в которой три контурных тока — $\dot I_{11}$, $\dot I_{22}$, $\dot I_{33}$, одна контурная ЭДС и выходная величина — ток $\dot I_5$, соответствует граф рис. А.3, *а*, в котором имеется пять узлов.

Узлы $\dot I_{kk}$ располагаем в серединах соответствующих контуров, а узлы $\dot E_{kk}$ и узел выходной величины выносим на периферию рисунка. Соединим нарисованные узлы ветвями, указываем на них стрелки и записываем значения передач ветвей. Каждый узел $\dot I_{kk}$ соединен с узлом $\dot E_{kk}$ ветвью с передачей $b_{kk}=1/Z_{kk}$, где $Z_{kk}$ — собственное сопротивление *k*-контура. Стрелка на этой ветви направлена к узлу $\dot I_{kk}$. Числовое значение $\dot E_{kk}$ — может быть и положительным и отрицательным. Оно положительно, если суммарная ЭДС контура, подсчитанная согласно направлению контурного тока $\dot I_{kk}$, положительна. Кроме того, каждый узел $\dot I_{kk}$ соединен с каким-то другим узлом $\dot I_{pp}$ (если между контурами *k* и *p* на схеме есть общая ветвь) двумя ветвями. Одна ветвь имеет стрелку, направленную к узлу $\dot I_{kk}$, и передачу $b_{kp}=Z_{kp}/Z_{kk}$, где $Z_{kp}$ — сопротивление смежной ветви между *k* и *p* контурами. На другой ветви стрелка направлена к узлу $\dot I_{pp}$. Ее передача $b_{pk}=Z_{kp}/Z_{pp}$, где $Z_{pp}$ — собственное сопротивление *p*-контура.

При согласном направлении всех контурных токов передачи всех ветвей между узлами *k* и *p* положительны.

По методу узловых потенциалов граф строят так же, как и по методу контурных токов, только узлами графов являются потенциалы узлов схемы, узловые токи и выходная величина.

Если в электрической схеме узлы *k* и *p* соединены ветвью с проводимостью $Y_{kp}$, а суммарная проводимость ветвей, сходящихся в узлах *k* и *p*, обозначена соответственно через $Y_{kk}$ и $Y_{pp}$, то на графе между узлами *k* и *p* имеется две ветви (рис. А.3, *б*). На одной из них стрелка направлена к узлу $\dot\varphi_k$, а ее передача $a_{kp}=Y_{kp}/Y_{kk}$. На другой стрелка направлена к узлу $\dot\varphi_k$, а ее передача $a_{pk}=Y_{kp}/Y_{pp}$. Так, на рис. А.3, *б* при $k=1$, $p=2$, $a_{12}=Y_{12}/Y_{11}$; $Q_{21}=Y_{21}/Y_{22}$. Первый индекс у *a* указывает узел, к которому направлена стрелка, второй — узел, от которого направлена стрелка. Если узлы *k* и *p* на схеме не соединены ветвью с проводимостью $Y_{kp}$, то и на графе узлы $\dot\varphi_k$ и $\dot\varphi_p$ не соединены ветвями. Узел $\dot\varphi_k$ соединен с узлом узлового тока $\dot J_{kk}$ ветвью с передачей $a_{kk}=1/Y_{kk}$, направленной к узлу $\dot\varphi_k$. Искомому току $\dot I_{kp}$ в ветви с проводимостью $Y_{kp}$ (полагаем его направленным от узла *k* к узлу *p*) на графе соответствует узел выходной величины $\dot I_{kp}$.

В соответствии с законом Ома для участка цепи к узлу графа $\dot I_{kp}$ должны подходить две ветви, стрелки на которых направлены к узлу $\dot I_{kp}$. Передача от узла $\dot\varphi_k$ равна $Y_{kp}$, передача от узла $\dot\varphi_p$ равна $-Y_{kp}$. Если какой-либо из этих узлов заземлен, то этот узел и передача от него будут отсутствовать.

Если граф составляют для цепи постоянного тока, то комплексное сопротивление *Z* следует заменить на резистор сопротивлением *R*, комплексную проводимость *Y* — на активную проводимость *G*, а точки над φ, *E*, *I*, свидетельствующие о синусоидальном характере изменения этих величин во времени, не ставят.

**Пример 169.** Составить граф для лестничной схемы рис. А.2, считая входной величиной ЭДС $\dot E_1$, а выходной ток $\dot I_5$.

Решение. Граф на рис. А.3, *а* составлен по методу контурных токов для уравнений, записанных в комплексной форме:

$$\dot I_{11}(Z_0+Z_1)-\dot I_{22}Z_1=\dot E_1 \text{ или } \dot I_{11}=b_{11}\dot E_1+b_{12}\dot I_{22};$$

$$-\dot I_{11}Z_1+\dot I_{22}(Z_1+Z_2+Z_3)-\dot I_{33}Z_3=0 \text{ или } \dot I_{22}=b_{21}\dot I_{11}+b_{23}\dot I_{33};$$

$$-\dot I_{22}Z_3+\dot I_{33}(Z_3+Z_4+Z_5)=0 \text{ или } \dot I_{33}=b_{32}\dot I_{22},$$



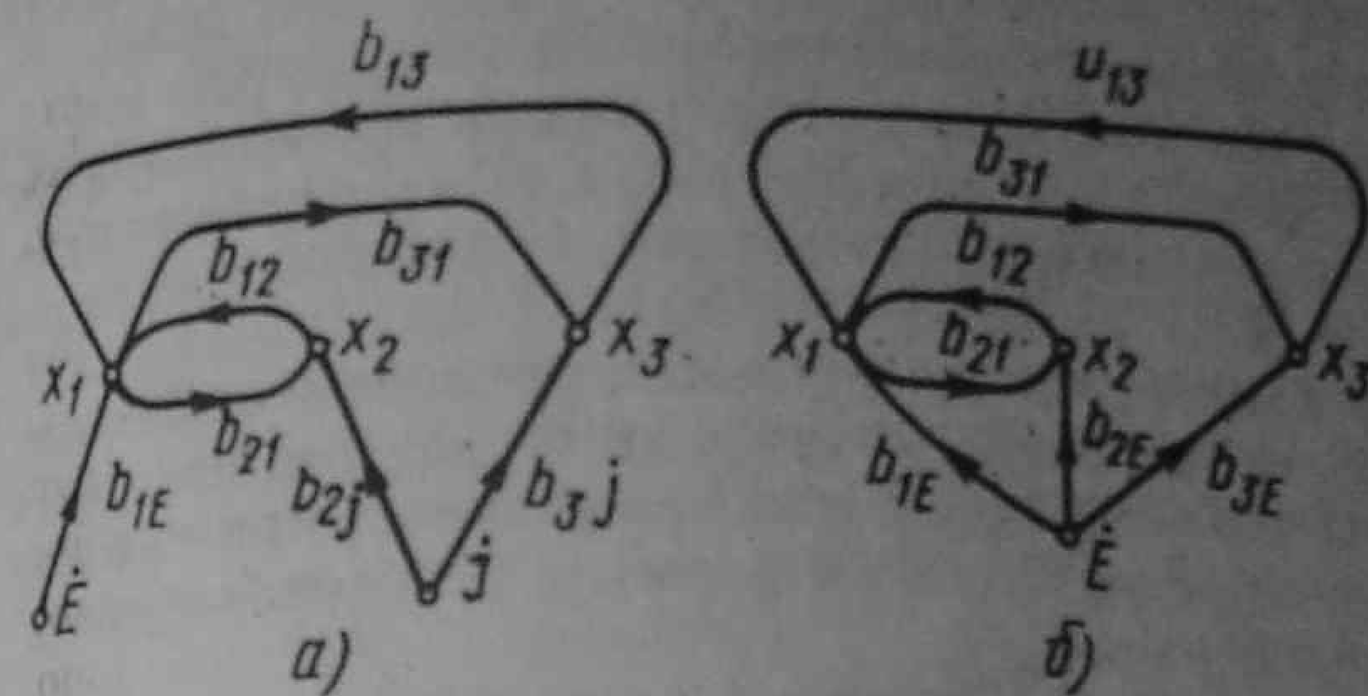



Рис. А.4

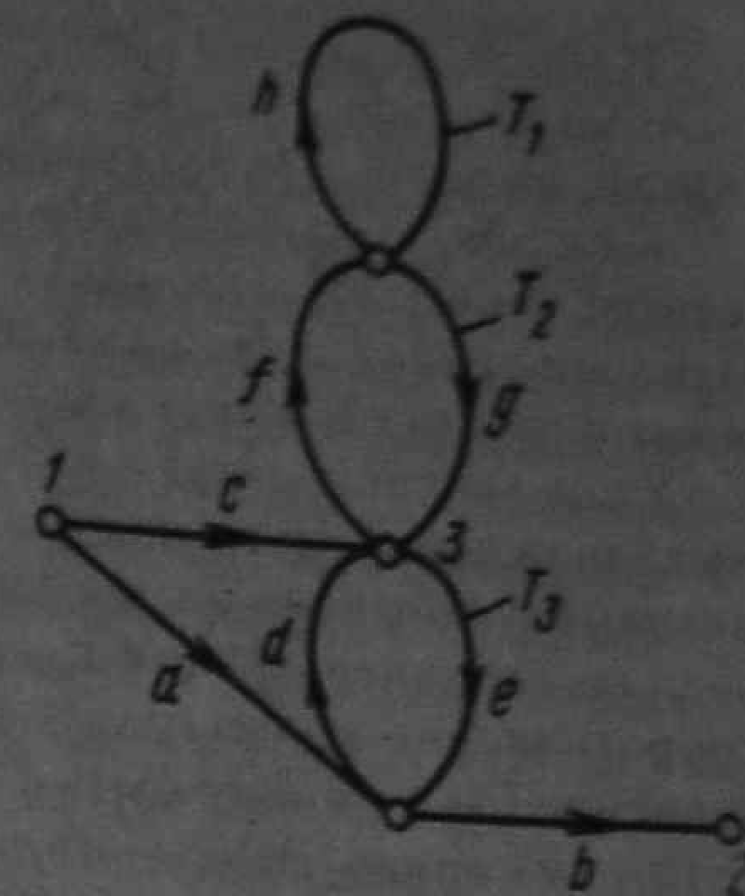



Рис. А.5

где

$$b_{11}=1/(Z_0+Z_1);\ b_{21}=Z_1/(Z_1+Z_2+Z_3);\ b_{32}=Z_3/(Z_3+Z_4+Z_5);\ b_{12}=Z_1/(Z_0+Z_1);\ b_{23}=Z_3/(Z_1+Z_2+Z_3).$$

Передача от узла $\dot I_{33}$ к узлу $\dot I_5$ равна единице, так как $\dot I_5=1\cdot\dot I_{33}$.

**Пример 170.** Составить граф для схемы рис. А.2 методом узловых потенциалов.

Решение. Обозначим: $Y_0=1/Z_0$; $Y_1=1/Z_1$; $Y_2=1/Z_2$; $Y_{45}=1/(Z_4+Z_5)$; $Y_{11}=Y_0+Y_1+Y_2$; $Y_{22}=Y_2+Y_3+Y_{45}$. Запишем систему уравнений:

$$\dot\varphi_1Y_{11}+\dot\varphi_2(-Y_2)=\dot E_1Y_0=\dot J_{11} \text{ или } \dot\varphi_1=a_{11}\dot J_{11}+a_{12}\dot\varphi_2;$$

$$\dot\varphi_1(-Y_2)+\dot\varphi_2Y_{22}=0 \text{ или } \dot\varphi_2=a_{21}\dot\varphi_1;$$

$$\dot I_5=\dot\varphi_2Y_{45}.$$

На рис. А.3, *б* $a_{11}=1/Y_{11}$, $a_{12}=Y_2/Y_{11}$, $a_{21}=Y_2/Y_{22}$. Предполагается, что ни один из знаменателей выражений $b_{pk}$, $b_{kp}$, $a_{kp}$, $a_{pk}$ для значений параметров схемы, находящихся в рабочем диапазоне, не равен нулю.

Порядок расположения узлов на чертеже может быть любым (расположение узлов входа и выхода уже рассматривалось), однако рекомендуется это делать таким образом, чтобы последовательность при движении слева направо в наибольшей степени соответствовала фактическому прохождению сигнала (информации) от входа к выходу.

В зависимости от того, какие величины выбраны в качестве узлов, для одной и той же схемы граф имеет различную структуру и различную сложность. Заметим, что если в схеме имеется несколько источников сигнала (несколько источников тока или ЭДС), то пользуются принципом наложения, т. е. сначала определяют выходную величину для графа, в котором сигнал действует от первого источника, затем выходную величину для графа, в котором сигнал действует от второго источника, и т. д. После этого суммируют выражения для выходной величины. Однако можно поступить и иначе, а именно граф с несколькими источниками сигналов одинаковой частоты свести к графу с одним источником (рис. А.4). С этой целью один из сигналов, например сигнал $\dot E$ на рис. А.4, *а*, примем за базисный. Узлы остальных сигналов (в примере узел тока $\dot J$) объединяют с базисным, так изменяя передачи от этих узлов к остальным, чтобы сигналы, подходящие к ним, остались неизменными.

В рассматриваемом примере объединяем узел $\dot J$ с узлом $\dot E$ (рис. А.4, *б*) и изменяем передачи $b_{2J}$ и $b_{3J}$ на $b_{2E}$ и $b_{3E}$, исходя из условий $b_{2E}\dot E=q_{2J}\dot J$; $b_{3E}\dot E=b_{3J}\dot J$. Отсюда $b_{2E}=b_{2J}\dot J/\dot E$, $b_{3E}=b_{3J}\dot J/\dot E$. Когда граф составлен, его используют для определения передачи от истока к стоку. Входной сигнал называют *истоком*, выходной — *стоком*.

**§ А.4. Общая формула для передачи направленного (сигнального) графа.** В 1956 г. Мэзон предложил общую формулу для определения передачи графа. Эта формула

является основной при расчете графов. Прежде чем перейти к ней, познакомимся с некоторыми новыми понятиями.

*Прямой путь P* — это путь вдоль стрелок от истока к стоку, при прохождении которого ни один из узлов не встречается более одного раза.

*Передача прямого пути* равна произведению передач ветвей этого пути.

Между истоком и стоком графа может быть несколько прямых путей, например для схемы рис. А.5 между истоком (узел *1*) и стоком (узел *2*) есть два прямых пути. Первый прямой путь — путь по ветвям с передачами $a$ и $b$. Передача этого пути $P_1=ab$.

Второй прямой путь — путь по ветвям с передачами $c$, $e$, $b$, его передача $P_2=ceb$.

Ни один из других возможных путей от узла *1* к узлу *2* в этом графе не относится к категории прямых. Например, путь через ветви $c$, $f$, $g$, $e$, $b$ не является прямым, так как на этом пути узел *3* встречается дважды. В общей формуле необходимо учитывать также передачи петель обратной связи.

*Петля обратной связи* представляет собой замкнутый путь, вдоль которого (по кругу) каждый узел может встретиться только один раз.

*Передачу петли обратной связи* часто обозначают буквой $T$ с индексом. Передача петли обратной связи равна произведению передач ветвей, образующих эту петлю. В графе рис. А.5 три петли обратной связи: первая — с $T_1=h$, вторая — с $T_2=fg$, третья — с $T_3=ed$.

Общая формула для определения передачи графа $G$ записывается следующим образом[1]:

$$G=\frac{\sum_{k=1}^{n}P_k\Delta_k}{\Delta}=\frac{P_1\Delta_1+P_2\Delta_2+\ldots+P_n\Delta_n}{\Delta}, \qquad (\text{A.1})$$

где $P_k$ — передача $k$-го прямого пути от истока к стоку; $n$ — число прямых путей.

Определитель $\Delta_k$ равен единице минус сумма взятых поодиночке передач петель обратных связей, не касающихся $k$-го прямого пути (эти петли могут касаться друг друга), плюс сумма попарных произведений передач петель обратных связей, не касающихся друг друга и $k$-го прямого пути, минус сумма тройного произведения петель обратных связей, не касающихся друг друга и $k$-го прямого пути, плюс и т. д.

Определитель $\Delta$ равен единице минус сумма взятых поодиночке передач петель обратных связей, касающихся и не касающихся друг друга, плюс сумма попарных произведений передач петель обратных связей, не касающихся друг друга и $k$-го прямого пути, минус сумма тройного произведения петель обратных связей, не касающихся друг друга, плюс и т. д.

**Пример 171.** Применить формулу (А.1) к графу рис. А.5.

Р е ш е н и е. Для первого прямого пути с передачей $P=ab$ определитель $\Delta_1$ равен единице минус сумма передач петель обратной связи, взятых поодиночке и не касающихся этого прямого пути $(T_1+T_2)$, плюс попарное произведение передач петель обратной связи, не касающихся друг друга и выбранного прямого пути.

В графе рис. А.5 отсутствуют петли, которые бы не касались друг друга и первого прямого пути. Поэтому слагаемые с попарным произведением передач петель обратной связи, как и взятые по трое (и более), в выражении для $\Delta_1$ отсутствуют. Следовательно, $\Delta_1=1-(T_1+T_2)$; $T_1=h$, $T_2=fg$.

Для второго прямого пути $P_2=ceb$, $\Delta_2=1-T_1$.

Знаменатель $\Delta=1-(T_1+T_2+T_3)+T_1T_3$; $T_3=ed$. В выражение для $\Delta$ вошло произведение $T_1$ и $T_3$ двух несоприкасающихся петель графа. Таким образом,

$$G=\frac{ab(1-T_1-T_2)+ceb(1-T_1)}{1-(T_1+T_2+T_3)+T_1T_3}. \qquad (\text{A.2})$$

[1]Вывод формулы см. Бессонов Л. А. ТОЭ — М.: Высшая школа, 1978.





**§ А.5. Определение и основная формула.** *Ненаправленный граф* представляет собой топологическое изображение самой электрической схемы. Узлы и ветви этого графа соответствуют ее узлам и ветвям. В ненаправленных графах в отличие от направленных стрелок на ветвях не ставят. Свойства ветвей характеризуют их проводимости. Передачи ветвей, имеющие размерность проводимости, в дальнейшем обозначены латинскими буквами $a$, $b$, $c$ ... . Поскольку каждой планарной электрической цепи может быть сопоставлена некоторая дуальная ей цепь, то каждому ненаправленному графу может соответствовать дуальный граф. При работе с ненаправленными графами основной является формула

$$\frac{I}{B_{mn}}=\frac{1}{\Delta}\sum C_r\Delta_r^1, \qquad (\text{A.3})$$

где $I$ — ток, протекающий по некоторой выбранной ветви графа, относительно которой определяется входная или взаимная проводимость; $B_{mn}$ — напряжение (ток) источника питания схемы, присоединенного к узлам $m$ и $n$; $C_r$ — произведение проводимостей ветвей пути между узлами $m$ и $n$, проходящего по выбранной ветви; $\Delta_r$ — определитель для системы, полученной из исходной при коротком замыкании (закорачивании) ветвей выбранного пути $C_r$; $\Delta$ — определитель исходной электрической схемы.

Правая часть (А.3) по структуре полностью аналогична формуле Мэзона (А.1) для направленных графов.

Формулу (А.3) используют для нахождения входного сопротивления (входной проводимости), взаимной проводимости ветвей и др.

Число членов $C_r\Delta_r$ в числителе (А.3) равно числу возможных путей между узлами $m$ и $n$ графа. В это число не входит путь от $m$ к $n$ через источник питания схемы. Определитель $\Delta$ мог бы быть получен как определитель матрицы узловых проводимостей, составленной по методу узловых потенциалов. Однако такой способ подсчета $\Delta$ довольно громоздок и трудоемок. Дело в том, что при вычислении $\Delta$ путем раскрытия определителя упомянутой матрицы пришлось бы иметь дело с большим числом слагаемых, часть которых имела бы одинаковые абсолютные значения, но различные знаки (эти слагаемые соответствуют так называемым избыткам в каждой строке определителя).

Расчет $\Delta$, при котором не возникает взаимно уничтожающих друг друга слагаемых, осуществляют путем вычисления его как суммы величин всех возможных деревьев данного графа. Как упоминалось в § 2.8, под *деревом* понимают совокупность ветвей, которые касаются всех узлов, но не образуют ни одного замкнутого контура. Ветви графа, не вошедшие в данное дерево, называют *хордами* или *ветвями связи*. Для простейшего графа рис. А.6, *а* образуемые деревья показаны на рис. А.6, *б* — *г*.

*Величина дерева* равна произведению проводимостей ветвей этого дерева. Величина дерева рис. А.6, *б* равна $ab$, дерева рис. А.6, *в* — $bc$, дерева рис. А.6, *г* — $ac$.

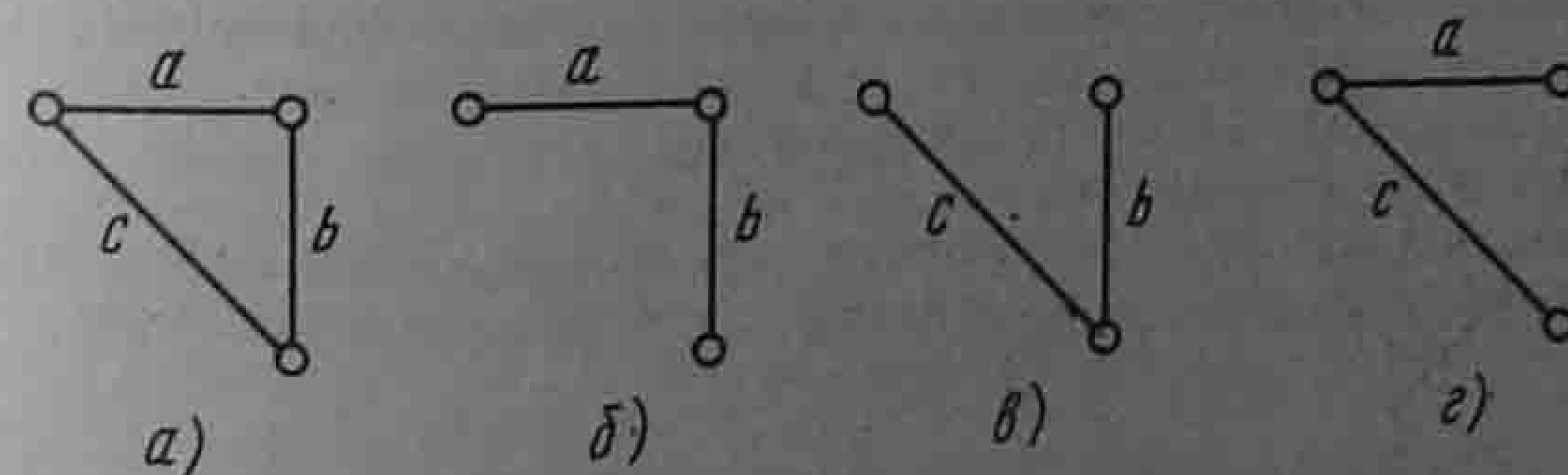



**Рис. А.6**

[1]В общем случае роль $I$ в формуле (А.3) может выполнять не только ток, но и напряжение.

Определитель графа рис. А.6, *а*

$$\Delta = ab + ac + bc.$$

Определитель $\Delta$ матрицы узловых проводимостей $G$ (см. § 2.22), как показано в § 2.35, равен произведению трех топологических матриц $[A][g_B][A]^T$. То обстоятельство, что определитель матрицы узловых проводимостей равен сумме величин всех возможных деревьев, следует из *теоремы Бине — Коши*. Теорема формулируется так: определитель произведения двух матриц $[E][F]$ (в рассматриваемом случае $[E]=[A][g_в]$, $[F]=[A]^T$, причем матрица $[E]$ имеет размер $m \times n$ и матрица $[F]$ размер $n \times m$, где $m \leq n$ равен сумме произведений всех составляющих миноров максимального порядка $m$ матриц $[E]$ и $[F]$. Под соответствующими минорами понимают миноры, образованные столбцами матрицы $[E]$ и строками матрицы $[F]$, имеющие одинаковые номера. Матрица $[A]$ имеет $m=y-1$ строк ($y$ — число узлов) и $n=b$ — число столбцов ($b$ — число обобщенных ветвей). Подматрицы порядка $(y-1)$ матрицы $[A]$ соответствуют деревьям графа и имеют определитель, равный $\pm 1$. В произведении $[A][g_B]$ элементы $k$-столбца матрицы $[A]$ $(+1; -1; 0)$ умножают на проводимость $k$-ветви $(g_k, -g_k, 0)$. Поэтому все ненулевые миноры порядка $(y-1)$ матрицы $[A][g_B]$ соответствуют деревьям схемы, а величина $i$ ненулевого минора равна взятому со знаком плюс (минус) произведению проводимостей ветвей $i$-дерева. Так как перестановка строк и столбцов матрицы $[A]^T$ (по сравнению с матрицей $[A]$) не изменяет величины минора, то ненулевые миноры $[A]^T$ матрицы соответствуют деревьям схемы и равны $\pm 1$. Так как знаки соответствующих ненулевых миноров матриц $[A][g_в]$ и $[A]^T$ одинаковы, то их произведения положительны, а сумма произведений всех соответствующих миноров равна сумме величин всех возможных деревьев.

**§ А.6. Определение числа деревьев графа.** Для определения числа деревьев графа положим, что проводимость каждой его ветви равна единице. Тогда величина каждого дерева также равна единице (произведение единиц равно единице). Если в рассматриваемых условиях для исследуемой электрической цепи составить матрицу узловых проводимостей при любом заземленном узле этой цепи, то числовое значение определителя матрицы будет равно числу возможных деревьев графа.

**Пример 172.** Подсчитать число деревьев для графа рис. А.6, *а*, приняв $a = b = c = 1$:

$$\det\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = 3.$$

Хотя значение числа возможных деревьев и полезно, но оно мало что дает для расчета, так как деревья еще нужно составить и определить величину каждого дерева. Для относительно сложных схем отыскание возможных деревьев довольно трудоемко и потому на практике применяют упорядоченные способы вычисления $\Delta$, один из которых рассмотрен в § А.7.

**§ А.7. Разложение определителя по путям между двумя произвольно выбранными узлами.** При разложении следует выбирать узлы, относительно которых схема в геометрическом смысле наиболее симметрична, что упрощает подсчеты. Разложение определителя $\Delta$ этим методом производят с помощью формулы

$$\Delta = \sum P_k \Delta_k, \tag{А.4}$$

где $P_k$ — произведение проводимостей ветвей $k$-пути между выбранными узлами; $\Delta_k$ — определитель $k$-пути, подсчитанный по схеме, полученной из исходной при закорачивании ветвей, по которым проходит $k$-путь.

**Пример 173.** Найти определитель мостовой скрещенной схемы рис. А.7, *а*.

Решение. Определитель $\Delta$ находим путем разложения по путям между узлами *1* и *4* (зачерненные кружки на рис. А.7, *а*). На рис. А.7, *б* — *е* показаны пять возможных путей между узлами *1* и *4* и соответствующие им подсхемы (подграфы) для нахождения $\Delta_k$.



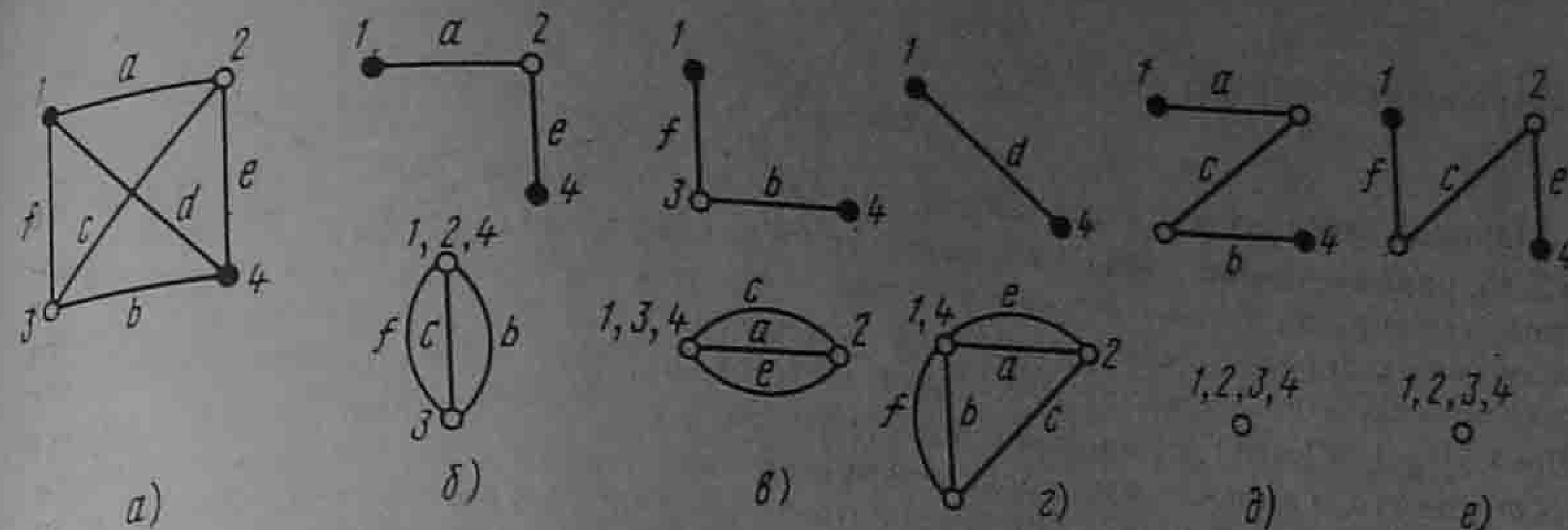



Рис. А.7

Для первого пути по ветвям $a$ и $e$ $P_1$ равно произведению проводимостей ветвей этого пути: $P_1 = ae$. При закорачивании ветвей $a$ и $e$ подграф представляет собой параллельное соединение ветвей $f$, $c$, $b$. Следовательно, $\Delta_1 = f + c + b$.

Для второго пути (рис. А.7, *в*) по ветвям $f$, $b$, $P_2 = fb$, $\Delta_2 = a + e + c$.

Для третьего пути по ветви $d$ (рис. А.7, *г*) $P_3 = d$; $\Delta_3 = (a + e)c + (a + e)(f + b) + c(f + b)$.

Для четвертого пути по ветвям $a$, $c$, $b$ (рис. А.7, *д*) $P_4 = acb$; $\Delta_4 = 1$, так как при закорачивании этих ветвей граф вырождается в точку.

Для пятого пути по ветвям $f$, $c$, $e$ (рис. А.7, *е*) $P_5 = fce$; $\Delta_5 = 1$.

Таким образом,

$$\Delta = \sum P_k \Delta_k = ae(f + c + b) + fb(a + e + c) + d[(a + e)c + (a + e)(f + b) + (f + b)c] + acb + fce. \tag{А.5}$$

**§ А.8. Применение основной формулы.** Как указывалось в § А.5, формулу (А.3) применяют для определения входной и взаимной проводимости, передачи по току, по напряжению и в других целях.

Рассмотрим вопрос о том, как ею следует пользоваться. Обозначим $m$ и $n$ узлы графа, к которым присоединяют ветвь, содержащую источник питания схемы. В дальнейшем полагаем, что источником питания является источник ЭДС либо источник тока, поскольку к ним можно свести любой реальный источник питания. Кроме того, считаем, что источник питания только один. Если же источников питания несколько, то следует воспользоваться принципом наложения, последовательно находя искомую величину от действия каждого из источников, учитывая при подсчетах внутреннее сопротивление последних.

Под $B_{mn}$ в (А.3) подразумеваем напряжение источника питания, если в качестве последнего взят источник ЭДС или ток $J_{mn}$ источника тока.

В качестве тока $I$ в числителе левой части (А.3) берут ток по той ветви, относительно которой нужно найти искомую величину. Если необходимо определить передачу от источника питания к некоторой $s$-ветви, то под $I$ понимают ток этой ветви.

Число слагаемых в числителе (А.3) равно числу возможных путей между узлами $m$ и $n$, причем каждый из них должен проходить по выбранной $s$-ветви (путь через источник питания не учитывают).

В сумму $\sum C_r \Delta_r$ часть слагаемых может входить со знаком плюс, часть — со знаком минус, так как $C_r$ может иметь знак плюс или минус. Для того чтобы определить, какой знак будет иметь $C_r$, руководствуются следующим: произвольно выбирают положительное направление вдоль ветви $s$ (ставят стрелку на ветви $s$). Если при движении по пути $C_r$ пройдем по ветви $s$ согласно с положительным направлением этой ветви (по стрелке на ветви), то $C_r$ берется со знаком плюс, в противном случае — со знаком минус.

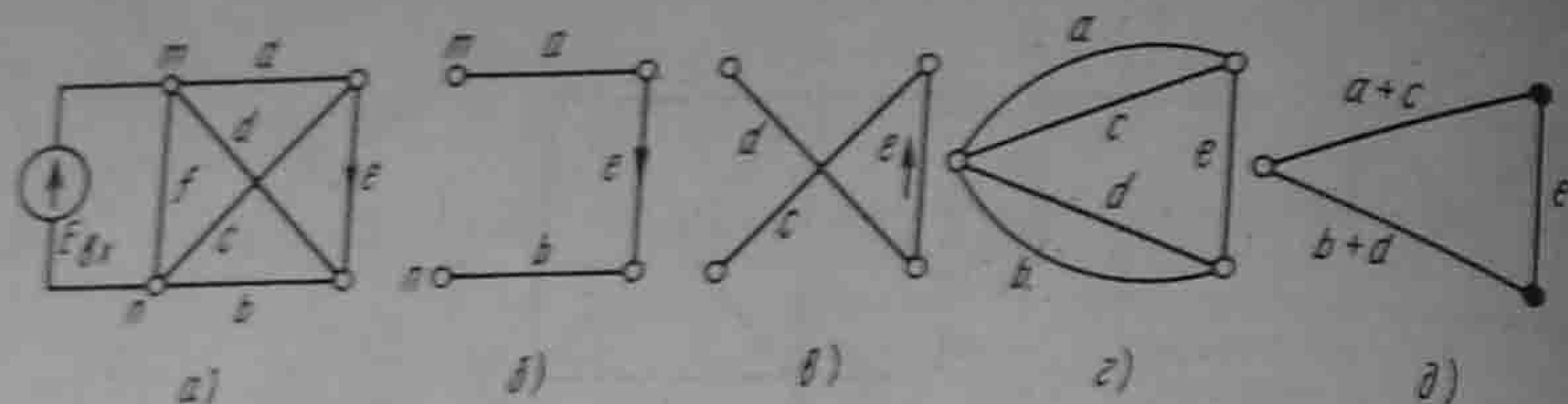



Рис. А.8

Вычисляя определитель системы Δ, следует учитывать внутреннее сопротивление источника питания схемы. При питании схемы от источника ЭДС Δ подсчитывают при закороченных узлах $mn$ (внутреннее сопротивление источника ЭДС равно нулю). При питании схемы от идеального источника тока ветвь $mn$, в которой включен источник, при подсчете Δ разрывают.

**Пример 174.** Определить взаимную проводимость ветви с источником ЭДС (подключенной к узлам $mn$) и ветви с проводимостью $e$ рис. А.8, *а*.

Р е ш е н и е. Для учета знака $C_r$ примем за положительное направление ветви $e$ направление, указанное стрелкой на рис. А.8, *а*. Тогда

$$I_e/E_{вх}=\sum C_r\Delta_r/\Delta. \qquad (А.6)$$

В графе есть два пути между узлами $m$ и $n$, которые проходят через ветвь $e$. Первый путь изображен на рис. А.8, *б*: $C_1 = aeb$.

Этот путь берут со знаком плюс, так как при прохождении по ветви $e$ движемся согласно с направлением стрелки на этой ветви. Поскольку при закорачивании ветвей $a, e, b$ (ветвей этого пути) граф вырождается в точку, $\Delta_1 = 1$.

Второй путь $C_2$ проходит по ветвям $d, e, c$ (рис. А.8, *в*). На этом пути прошли встречно стрелки на ветви $e$ (рис. А.8, *б*, *в*), поэтому $C_2 = -dec$. При закорачивании ветвей $d, e, c$ граф вырождается в точку, следовательно, $\Delta_2 = 1$.

Для нахождения определителя системы Δ закорачиваем узлы $m$ и $n$ (схема питается от источника ЭДС) и получаем граф рис. А.8, *г*. От последнего переходим к графу рис. А.8, *д*.

Для вычисления Δ графа рис. А.8, *д* воспользуемся разложением его по путям между зачерненными точками. Между этими точками два пути: первый — по ветви $e$, второй — по ветвям $(a+c)$, $(b+d)$. Поэтому $\Delta = e(a+c+b+d)+(a+c)(b+d)\cdot 1$. Таким образом,

$$\frac{I_{вх}}{E_{вх}}=\frac{C_1\Delta_1+C_2\Delta_2}{\Delta}=\frac{aeb-dec}{e(a+c+b+d)+(a+c)(b+d)}. \qquad (А.7)$$

Для расчета передачи схемы рис. А.8, *а* по напряжению между входной ветвью (ветвью с источником ЭДС между узлами $m$ и $n$) и выходной ($e$) воспользуемся тем, что выходное напряжение на зажимах ветви $e$ равно току $I_{вых}$ этой ветви, поделенному на ее проводимость. Следовательно,

$$\frac{U_{вых}}{E_{вх}}=k_U=\frac{I_{вых}/e}{E_{вх}}=\frac{ab-cd}{\Delta}.$$

**Пример 175.** Определить изменения, которые произойдут в вычислениях, если схема рис. А.8, *а* будет питаться не от источника ЭДС, а от источника тока рис. А.9. Рассчитать передачу по току к ветви $e$ и отношение напряжения на выходе (на ветви $e$) к входному току. Выходной ветвью является ветвь $e$, по которой проходит ток $I_{вых}$. Положительное направление для прохождения по этой ветви то же, что и в примере 174.

Р е ш е н и е. В отличие от примера 174 входной величиной является входной



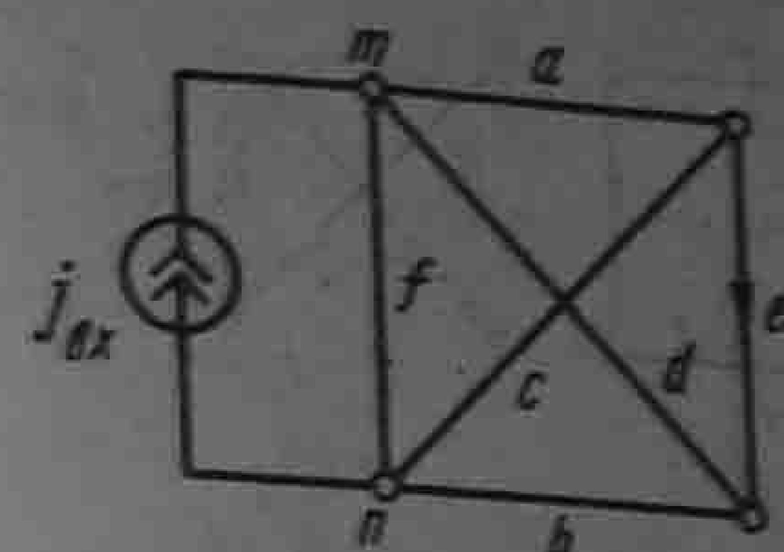



Рис. А.9

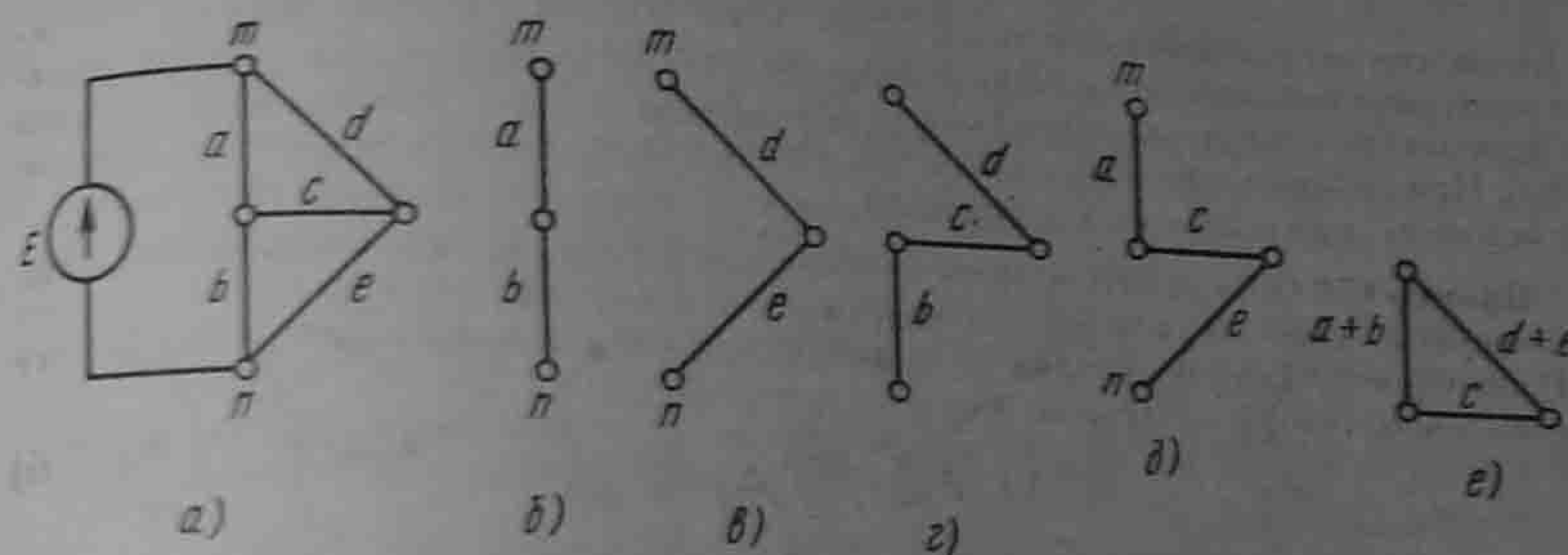



Рис. А.10

ток $j_{вх}$. Поэтому

$$\frac{I_{вых}}{j_{вх}}=\frac{aeb-dec}{(a+d+f)(ce+cb+be)+ad(b+c)+af(b+e)+df(c+e)+adf} \qquad (А.8)$$

Числитель правой части (А.8) такой же, как и числитель правой части (А.7). Определитель Δ в (А.8) отличается от определителя в (А.7) тем, что для (А.7) он подсчитывался при питании схемы от источника ЭДС, тогда как в рассматриваемом случае он должен быть найден при питании схемы от источника тока. В этих условиях ветвь с источником тока следует считать разомкнутой. Определитель для этого случая был подсчитан ранее [см. формулу (А.5) в § А.7].

Отношение выходного напряжения на ветви $e$ к входному току

$$\frac{U_{вых}}{j_{вх}}=\frac{I_{вых}/e}{j_{вх}}=\frac{ab-dc}{\Delta}.$$

Для определения входной проводимости схемы, питающейся от источника ЭДС, в числителе (А.3) должны быть учтены все возможные пути между узлами $m$ и $n$ (путь через источник ЭДС исключается). Например, при вычислении входной проводимости схемы (рис. А.10, *а*) в числителе (А.3) должно быть взято четыре слагаемых, так как возможны четыре пути между узлами $m$ и $n$ (рис. А.10, *б* — *д*):

$$\frac{I_{вых}}{I_{вх}}=\frac{\sum C_r\Delta_r}{\Delta}=\frac{ab(d+c+e)+de(a+c+b)+dcb\cdot 1+ace\cdot 1}{(a+b)(d+e)+(a+b)c+(d+e)c}.$$

Все $C_r$ в числителе взяты со знаком плюс, потому что на этих путях двигались в соответствии с направлением входного тока. Определитель Δ (схема питается от источника ЭДС) подсчитан в соответствии с рис. А.10, *е*.

**Пример 176.** Определить передачу по току в двойном Т-мосте (рис. А.11, *а*). Схема питается от источника тока $J_{вх}$. Выходной ветвью является ветвь $g$. По ней протекает ток $I_{вых}$, положительное направление которого показано стрелкой.

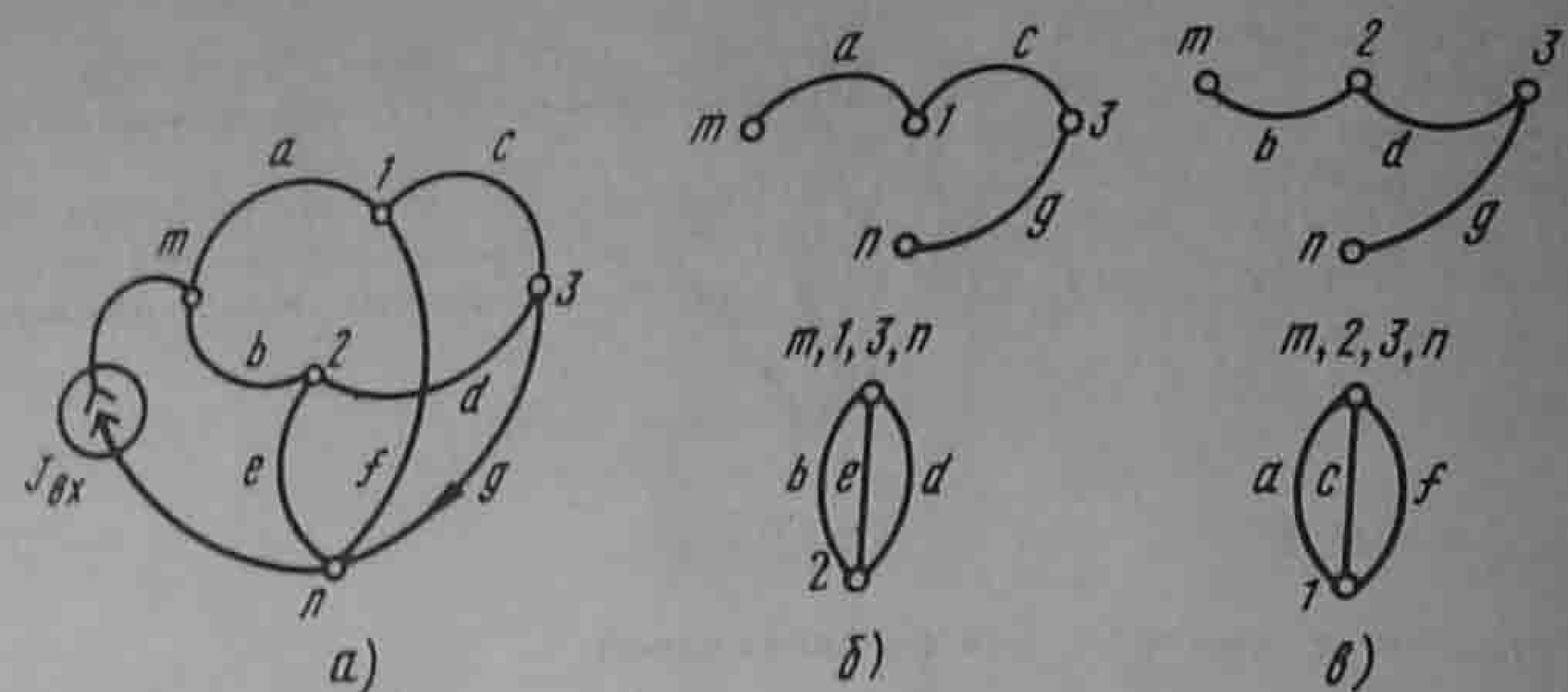


Рис. А.11

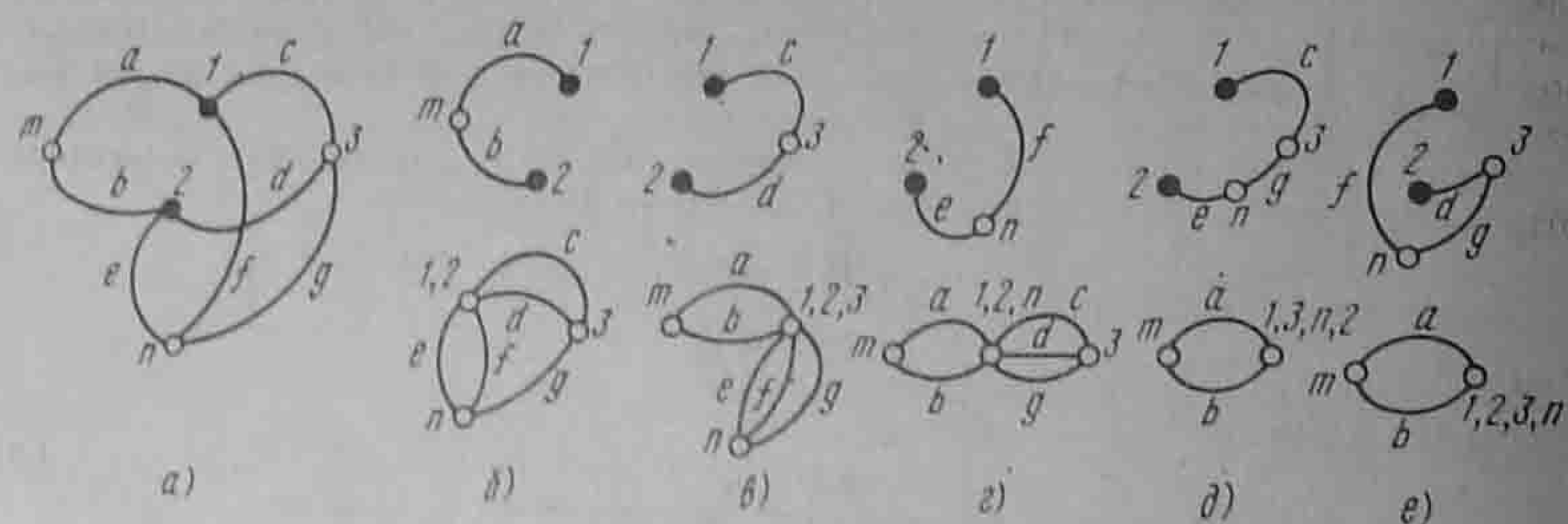


Рис. А.12

Решение. На рис. А.11, б — в показаны два пути $C_1$ и $C_2$ с передачами $C_1 = acg$ и $C_2 = bdg$ и соответствующие им подграфы для нахождения определителей: $\Delta_1 = b + e + d$; $\Delta_2 = a + c + f$.

Определитель графа рис. А.12, а найдем методом разложения по ветвям между узлами 1 и 2 (зачернены). Между этими узлами имеется пять путей в соответствии с рис. А.12, б — е. Подграфы этих путей изображены на тех же рисунках. Таким образом,

$$\frac{I_{\text{вых}}}{J_{\text{вх}}} = \frac{C_1\Delta_1 + C_2\Delta_2}{\Delta} =$$

$$= \frac{acg\,(b + e + d) + bdg\,(a + c + f)}{ab[(e+f)g + (e+f)(c+d) + (c+d)g] + ef(a+b)(c+d+g) + cge(a+b) + fdg(a+b)}.$$

### § А.9. Сопоставление направленных и ненаправленных графов.

1. В направленных и ненаправленных графах расчет состоит из простых и наглядных операций, при проведении которых мала вероятность ошибки.

2. По сравнению с обычными алгебраическими методами решение системы уравнений с помощью графов может дать некоторую экономию времени.

3. При составлении определителя системы ненаправленного графа отпадает необходимость подсчитывать взаимно уничтожающие друг друга слагаемые, которые появляются при раскрытии определителя матрицы проводимостей системы уравнений, составленных по методу узловых потенциалов.



4. Преимущество направленных графов — простота нахождения передачи по (А.1). Однако, поскольку граф в готовом виде не задан, сначала нужно построить граф и подсчитать передачи его ветвей.

5. Преимущество ненаправленных графов состоит в том, что не требуется составлять никаких уравнений и строить граф (так как графом является сама электрическая схема). Однако определение передачи по (А.3) требует несколько большего времени, чем подсчет по (А.1).

## Приложение Б

### Имитированные элементы электрических цепей

В автоматике, связи, информатике, радиоэлектронике все большее применение находят электрические схемы, выполняющие функции отрицательных резисторов, отрицательных емкостей, заземленных и незаземленных имитированных индуктивных элементов без потерь и с потерями, частотно-зависимых индуктивных и емкостных элементов второго порядка (ЧЗОС), а также высокоомных резистивных элементов, имитированных переключаемыми конденсаторами. Реализуют эти элементы обычно с помощью схем с ОУ и выполняют на относительно малые токи. Рассмотрим, как их можно осуществить.

а) Реализация отрицательного резистивного элемента с помощью конвертора отрицательного сопротивления (рис. Б.1, а). В этой схеме

$$\dot U_1 = \dot U_2;\ \ \dot I_1 R + (\dot I_1 + \dot I)\, R = 0;\ \dot I_1 + \dot I = \dot I_2;\ \text{и}\ \ \dot U_2 = \dot I_2 R_2.$$

Следовательно, $\dot I_1 R_1 = -(\dot I_1 + \dot I)\, R = -\dot I_2 R$.

Входное сопротивление

$$Z_{\text{вх}} = \frac{\dot U_1}{\dot I_1} = \frac{\dot U}{-\dot I_2 R / R_1} = -\frac{R_1 R_2}{R}. \tag{а}$$

б) Реализация отрицательного емкостного элемента. Схема реализации представлена на рис. Б.1, б. Она отличается от схемы рис. Б.1, а тем, что параллельно резистору $R_1$ подключен конденсатор емкостью $C_1$, а параллельно резистору $R_2$ — конденсатор емкостью $C_2$. Обозначим

$$Z_1 = \frac{R_1 \dfrac{1}{j\omega C_1}}{R_1 + \dfrac{1}{j\omega C}} = \frac{R_1}{1 + j\omega C_1 R_1};$$

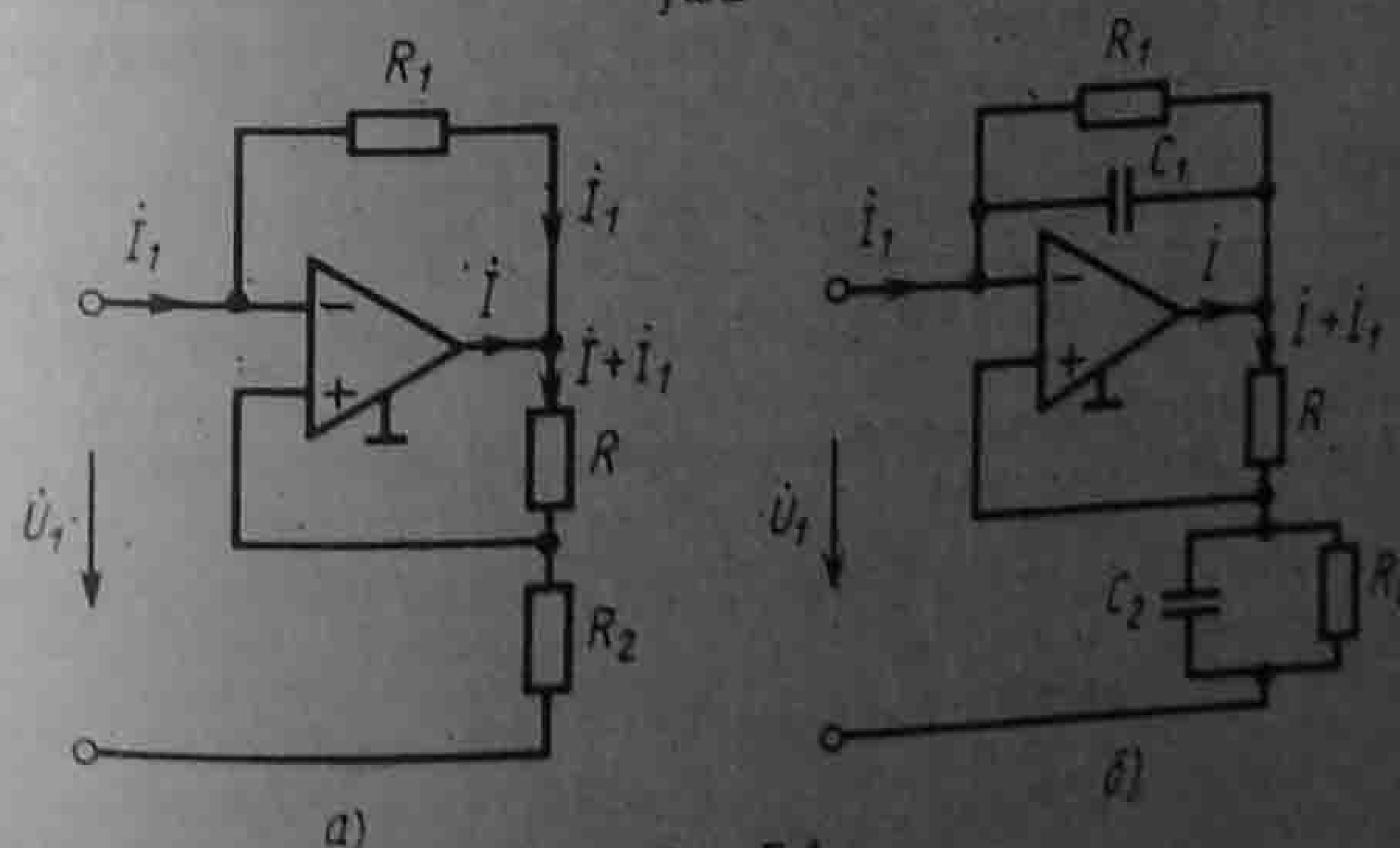



Рис. Б.1

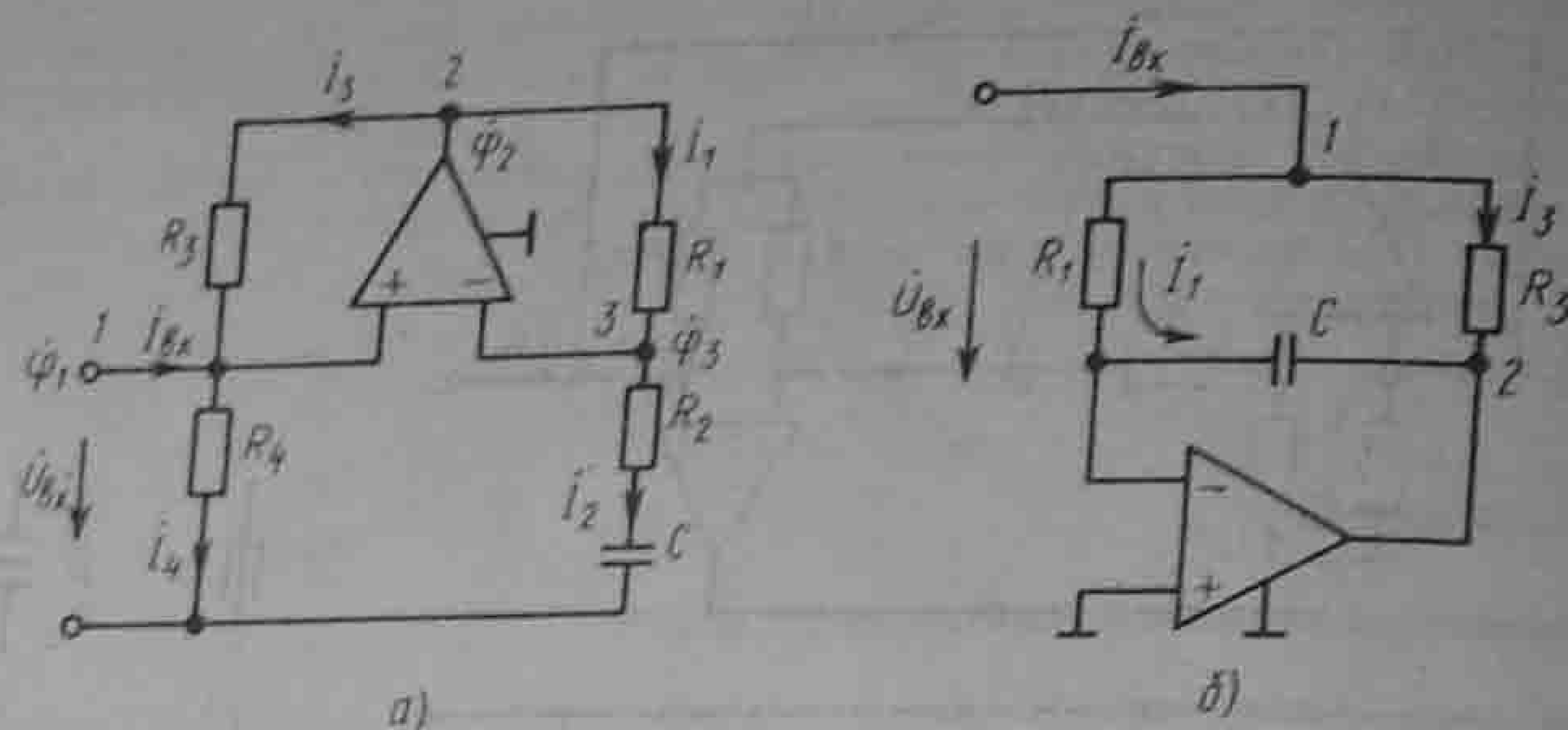



Рис. Б.2

$$Z_2 = \frac{R_2}{1 + j\omega R_2 C_2}.$$

В соответствии с формулой (а) входная проводимость схемы

$$Y_{вх} = -\frac{R}{Z_1 Z_2} = \frac{-R}{R_1 R_2}[(1 - R_1 R_2 C_1 C_2 \omega^2) + j\omega (R_1 C_1 + R_2 C_2)].$$

Схема имитирует отрицательную емкость $C_{им} = -\left(\frac{R}{R_2} C_1 + \frac{R}{R_1} C_2\right)$ при частоте $\omega_0 = 1/\sqrt{R_1 C_1 R_2 C_2}$.

в) Реализация заземленного индуктивного элемента без потерь. Реализация осуществляется с помощью схемы рис. 4.10, *а*. Для этой схемы в § 4.14 была выведена формула для входного сопротивления $Z_{вх} = \frac{Z_1 Z_3 Z_5}{Z_2 Z_4}$. Если принять $Z_4 = \frac{1}{j\omega C}$, а $Z_1 = Z_2 = Z_3 = Z_5 = R$, то $Z_{вх} = j\omega C R^2$, т. е. заземленная имитированная индуктивность $L_{им} = CR^2$.

г) Реализация заземленного индуктивного элемента с потерями. Проще всего реализация осуществляется с помощью схем рис. Б.2, *а*, *б*. В каждой из схем используется по одному ОУ. При выводе формул будем пользоваться обозначениями токов и потенциалов, указанных на этих схемах. Для схемы рис. Б.2, *а*:

$\dot I_4 = \frac{\dot\varphi_1}{R_4}$; $\dot I_3 = \frac{\dot\varphi_2 - \dot\varphi_1}{R_3}$; $\dot I_1 = \frac{\dot\varphi_2 - \dot\varphi_3}{R_1}$; $\dot I_2 = \frac{j\omega C \dot\varphi_3}{1 + j\omega R_2 C}$; $\dot I_1 R_1 = \dot I_3 R_3$, следовательно, $\dot I_3 = \dot\varphi_1 \frac{j\omega R_1 C}{R_3(1 + j\omega R_2 C)}$. Входной ток $\dot I_{вх} = \dot I_4 - \dot I_3 = \frac{\dot\varphi_1}{R_4} - \frac{\dot\varphi_1 j\omega R_1 C}{R_3(1 + j\omega R_2 C)} = \dot\varphi_1 \frac{R_3 + (R_2 R_3 - R_1 R_4) j\omega C}{R_3 R_4 (1 + j\omega R_2 C)}$. Если принять $R_2 R_3 = R_1 R_4$, то входное сопротивление $Z_{вх} = \frac{\dot\varphi_1}{\dot I_{вх}} = R_4 + j\omega R_2 R_4 C$. Таким образом, при условии $R_2 R_3 = R_1 R_4$ схема реализует индуктивный элемент $L_{им} = R_2 R_4 C$ и последовательно соединенный с ним резистор $R_4$. Проведем выкладки для схемы рис. Б.2, *б*. Так как напряжение на входе ОУ стремится к нулю, то $\dot I_1 = \dot U_{вх}/R_1$. Из условия равенства падения напряжения между узлами *1* и *2* по двум параллельным путям (с учетом того, что входной ток ОУ $\to 0$)



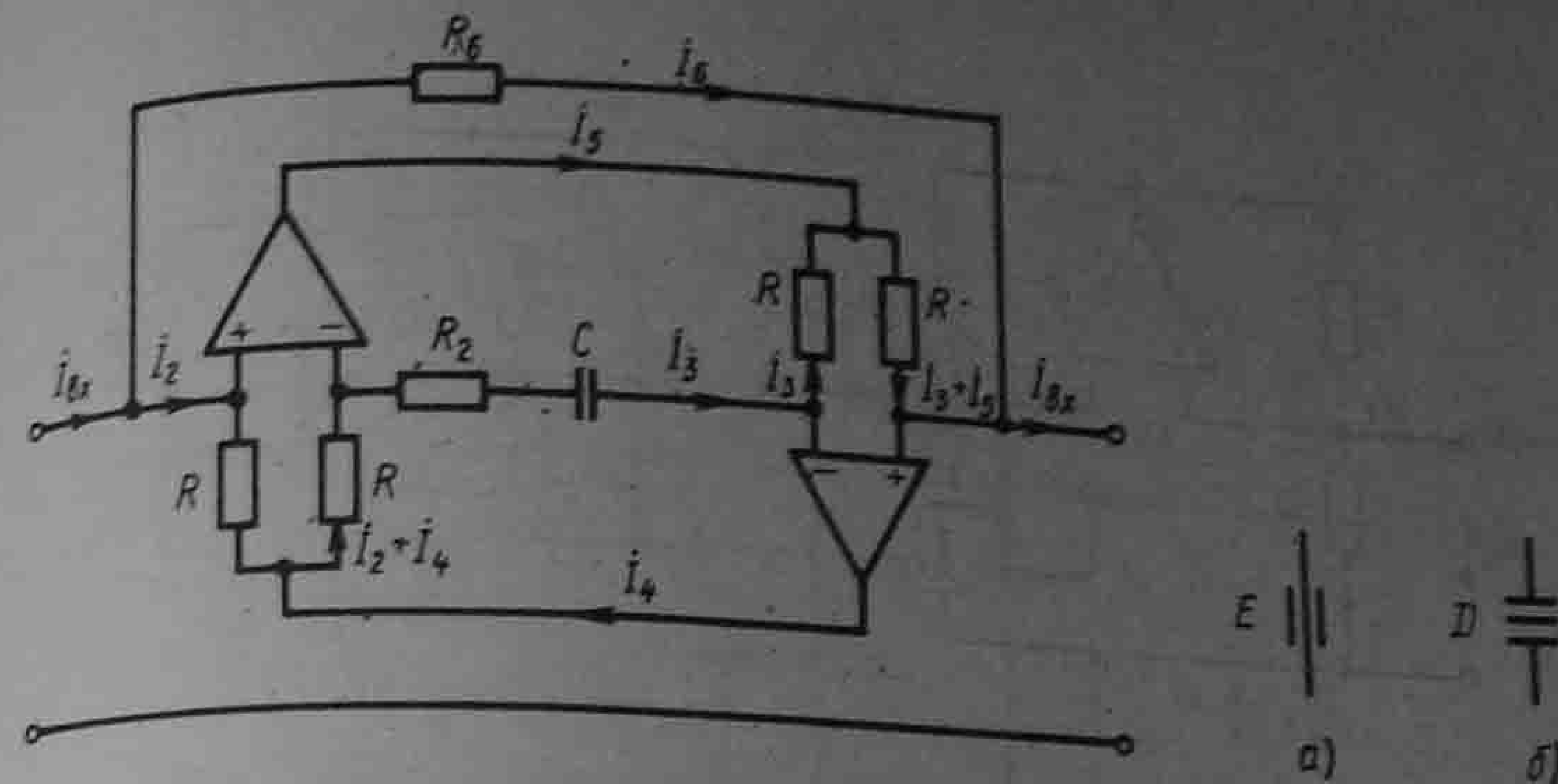



Рис. Б. 3

Рис. Б.4

$\dot I_1\left(R_1 + \frac{1}{j\omega C}\right) = \dot I_3 R_3$, откуда $\dot I_3 = \dot I_1\left(R_1 + \frac{1}{j\omega C}\right)\frac{1}{R_3} = \dot U_{вх}\frac{R_1 + \frac{1}{j\omega C}}{R_1 R_3}$. Входной ток $\dot I_{вх} = \dot I_1 + \dot I_3 = \dot U_{вх}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{j\omega R_1 R_3 C}\right)$. Входная проводимость $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{j\omega R_1 R_3 C}$.

д) Реализация незаземленного индуктивного элемента с потерями. В верхний линейный провод схемы рис Б.3 между зажимами *1* и *2* включен двухполюсник, подобный изображенному на рис. 4.10, *а*, отличающийся от него наличием резистора $R_6$ и комплексного сопротивления $Z_2 = R_2 + \frac{1}{j\omega C}$. Напряжение между зажимами *1* и *2* обозначим $\dot U_{12}$. Нижний линейный провод заземлен. Из условия равенства напряжения на входе первого ОУ нулю следует, что $\dot I_2 R + (\dot I_2 + \dot I_4)R = 0$, т. е. $\dot I_4 = -2\dot I_2$. Из условия равенства напряжения на входе ОУ нулю $R\dot I_3 + (\dot I_3 + \dot I_5)R = 0$, имеем $2\dot I_3 = -\dot I_5$. Следовательно,

$$\dot U_{12} = \dot I_2 R + (\dot I_2 + \dot I_4)(2R + Z_2) + (\dot I_2 + \dot I_5)R.$$

Учитывая, что $\dot I_3 = \dot I_2 + \dot I_4 = -\dot I_2$, а $\dot I_3 + \dot I_5 = \dot I_2$, определим $\dot U_{12} = -\dot I_2 Z_2$. Входной ток $\dot I_{вх} = \dot I_2 + \dot I_6 = -\frac{\dot U_{12}}{Z_2} + \frac{\dot U_{12}}{R_6} = \frac{Z_2 - Z_6}{Z_2 Z_6}\dot U_{12}$. Продольное сопротивление между зажимами *1* и *2*

$$Z_{12} = \frac{\dot U_{12}}{\dot I_{вх}} = \frac{Z_2 Z_6}{Z_2 - Z_6} = \frac{R_6 + j\omega C R_2 R_6}{1 + j\omega C(R_2 - R_6)},$$

если принять $R_2 = R_6$, то $Z_{12} = R_6 + j\omega C R_2 R_6$. Продольная незаземленная имитированная индуктивность $L_{им} = C R_2 R_6$ имеет добротность $Q = \omega R_2 C$.

е) Реализация индуктивных и емкостных элементов второго порядка (сверхиндуктивных и сверхемкостных элементов). Под индуктивным элементом второго порядка понимают элемент, сопротивление которого при синусоидальном процессе равно $(j\omega)^2 E$, его изображение показано на рис. Б.4, *а*. Емкостный элемент второго порядка имеет сопротивление $\frac{1}{(j\omega)^2 D}$, его изображение показано на рис. Б.4, *б* (*E* и *D* — действительные положительные числа). Так как $(j\omega)^2 = -\omega^2$, то сопротивление

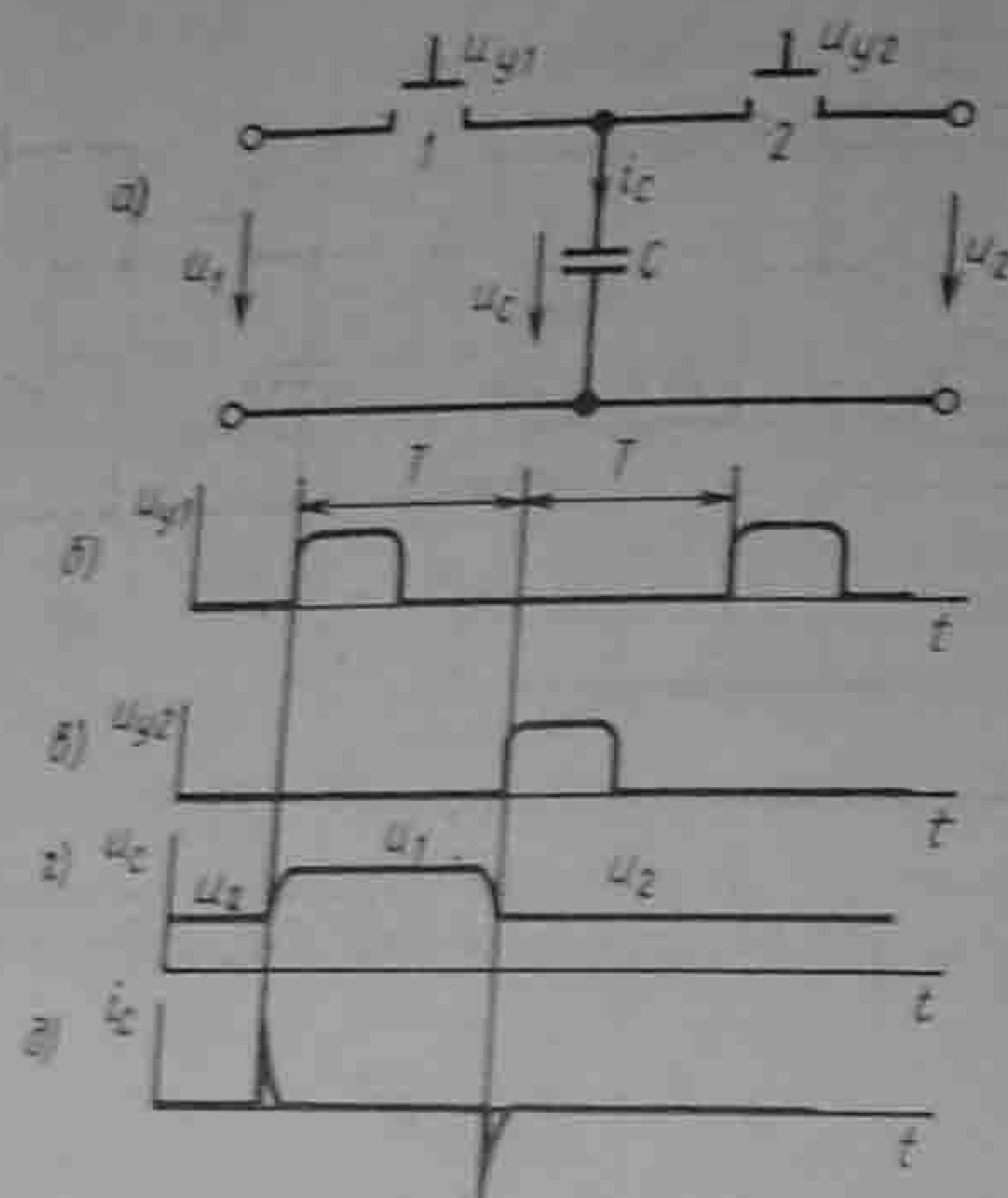



Рис. Б.5

индуктивного элемента второго порядка, будучи отрицательным, увеличивается с ростом ω, а емкостного — убывает пропорционально квадрату частоты. Оба этих элемента для синусоидального процесса являются частотно-зависимыми отрицательными сопротивлениями (ЧЗОС). Индуктивный элемент второго порядка реализуется при помощи схемы рис. 4.10, *а*, если, например, принять в ней $Z_2 = Z_4 = \frac{1}{j\omega C}$, а $Z_1 = Z_3 = Z_5 = R$, тогда $Z_{вх} = (j\omega)^2 R^3 C^2$. Следовательно, $E = R^3 C^2$.

Емкостный элемент второго порядка может быть реализован также схемой рис. 4.10, *а*, если принять в ней $Z_1 = Z_3 = \frac{1}{j\omega C}$, а $Z_2 = Z_4 = Z_5 = R$. При этом $Z_{вх} = \frac{1}{(j\omega)^2 C^2 R}$ и $D = C^2 R$. В принципе возможна реализация индуктивных и емкостных элементов и более высоких порядков, например, третьего, четвертого, но использование их, как правило, затруднительно из-за неустойчивости цепей с ними.

ж) Высокоомные резисторы, имитированные переключаемыми конденсаторами. В настоящее время электронные схемы часто выполняют методами интегральной технологии, создавая на одном кристалле много резисторов, конденсаторов, транзисторов, диодов, ключей.

Идея имитатора $R$ иллюстрируется рис. Б.5, *а*. В схеме имеется конденсатор емкостью $C$ и два ключа *1* и *2*, открытием и закрытием которых управляют тактовыми импульсами напряжений $u_{y1}$ и $u_{y2}$, поступающими с частотой $f_T = 1/T$ от кварцевого генератора. Ключ *1* замкнут, когда поступает импульс $u_{y1}$. При этом конденсатор заряжается от $u_2$ до $u_1$. Ключ *2* замкнут, когда поступает импульс $u_{y2}$. Если $u_2 < u_1$, то конденсатор разряжается с $u_1$ до $u_2$. Через $C$ течет ток в виде коротких импульсов (рис. Б.5, *б—д*).

Среднее значение тока $i_C$ за время $T$, поделенное на $T$, равно приращению заряда конденсатора $\Delta q = C(u_1 - u_2)$:

$$I_{C\,ср} = \frac{1}{T}\int_0^T i_C dt = \frac{\Delta q}{T} = \frac{C(u_1 - u_2)}{T} = \frac{u_1 - u_2}{T/C}. \qquad (а)$$



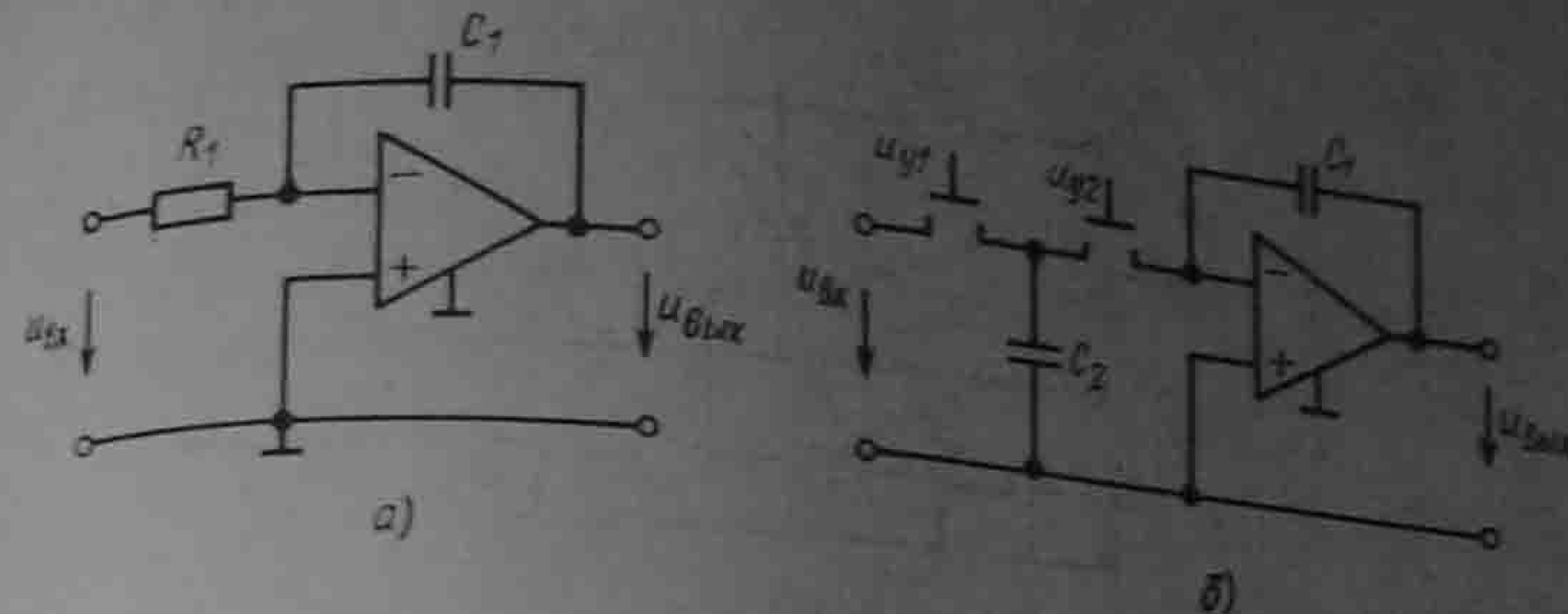



Рис. Б.6

Этот ток можно сопоставить с током, который протекал бы через резистор $R$, если бы его включили между входом и выходом схемы рис. Б.5, *а* при замкнутых ключах *1* и *2*

$$I_{C\,ср} = \frac{u_1 - u_2}{R}. \qquad (б)$$

Сопоставляя (а) и (б), устанавливаем, что имитируемое схемой рис. Б.5, *а* резистивное сопротивление $R = \frac{T}{C}$. Если частоту изменений напряжений $u_1$ и $u_2$ обозначить $f$, то частота тактовых импульсов $f_T$ должна быть в несколько десятков раз больше частоты $f$ (например, $f_T = 100f$).

Положим, что в некоторой схеме цепочка из $R$ и $C_1$ должна иметь постоянную времени $\tau = RC_1$. Заменим $R$ в этой цепочке имитированным резистором, получим $\tau = \frac{C_1}{C}T$.

Величиной τ можно управлять, изменяя частоту $f_T = 1/T$ тактовых импульсов. Так как $C_1$ и $C$ выполняют на одном кристалле вблизи друг от друга, то источники погрешности одинаковым образом влияют на $C_1$ и $C$, а отношение $C_1/C$ выдерживается с точностью долей процента. При этом получается значительная экономия площади кристалла.

На рис. Б.6, *а* изображена схема интегратора на ОУ. Для нее $u_{вых} = -\frac{1}{R_1 C_1}\int u_{вх} dt$. Если в ней резистор $R_1$ заменить на схему рис. Б.5, *а*, получим интегратор на коммутируемом конденсаторе $C_2$ — рис. Б.6, *б*. Аналогичные замены применяют и в других схемах, в частности в $RC$-фильтрах.

# Приложение В

## Исследование процессов в неэлектрических системах на электрических моделях-аналогах

Исследование процессов в неэлектрических системах (механических, акустических, тепловых, гидравлических и др.) или в частично неэлектрических (например, в электромеханических) часто производят на электрических моделях-аналогах.

Стремление использовать для этой цели электрические модели объясняется тем, что: 1) электрические параметры можно легко изменять в широких пределах; 2) токи и напряжения можно измерять с большой точностью; 3) токи и напряжения относительно просто записать на осциллографе. В качестве неэлектрических будем рассматривать механические системы.

Механические системы подразделяют на системы поступательного, вращатель-

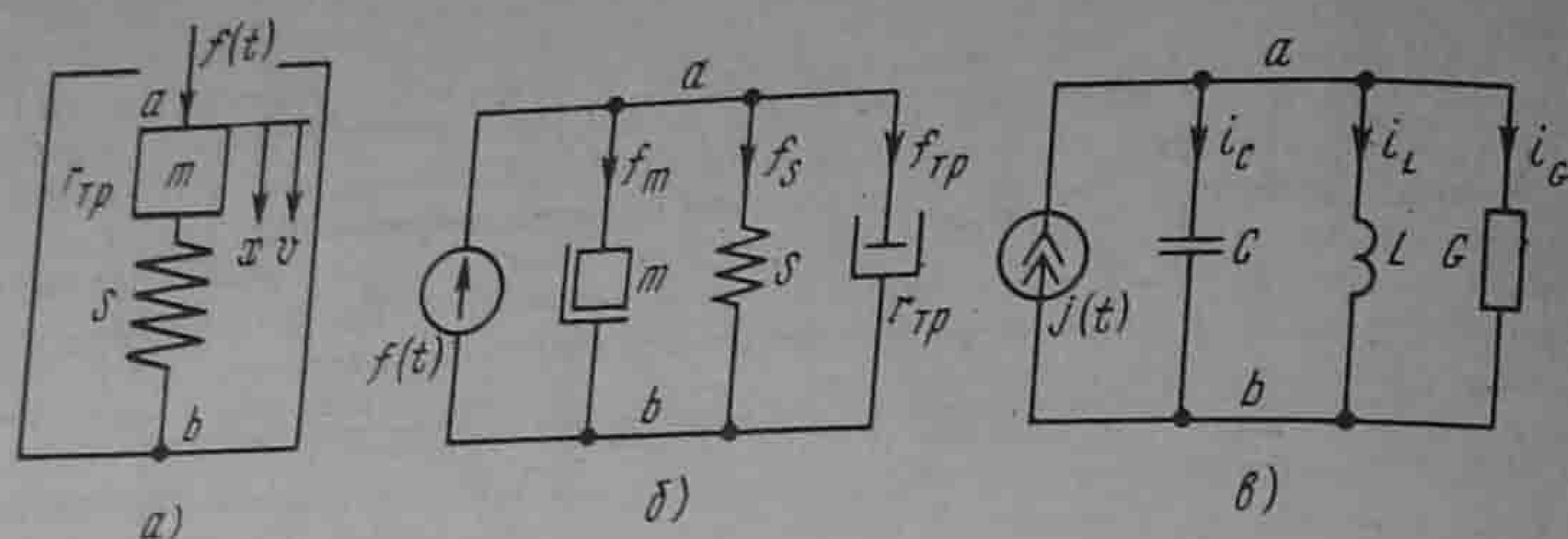



Рис. В.1

ного и поступательно-вращательного движения. В каждой из этих систем могут быть активные и пассивные элементы.

Активными являются источники силы $f$, источники скорости $v$ для систем поступательного движения, а также источники вращающего момента $M$ и угловой скорости $\omega$ для систем вращательного движения.

Пассивными являются элементы упругости, трения и массы. Как и при рассмотрении электрических цепей, эти элементы часто идеализируют, например считают, что идеальная пружина обладает только упругостью и не имеет массы.

Для заданной механической системы сначала составляют схему замещения, а затем, используя аналогию между механическими и электрическими величинами (рассмотрена далее), образуют электрическую схему-аналог, которую и подвергают исследованию (экспериментальному или теоретическому).

Перед составлением схемы замещения механической системы необходимо: 1) выбрать систему отсчета для сил и скоростей (соответственно для вращающих моментов и угловых скоростей); 2) соединить между собой узлы, имеющие одинаковую скорость или одинаковое смещение; 3) соединить неподвижные узлы в один узел; 4) на схеме замещения между соответствующими узлами изобразить активные и пассивные элементы, имеющиеся в изучаемой системе.

**Пример 177.** Механическая система рис. В.1, *а* образована телом массой $m$, опирающимся на пружину упругости $s$ ($s = 1/e$, где $e$ — податливость). На тело действует внешняя сила $f(t)$, являющаяся функцией времени $t$. При движении тела в вертикальном направлении возникает вязкое трение о среду. Сила вязкого трения пропорциональна скорости $v$ перемещения тела. В схеме два узла: подвижный $a$ и неподвижный $b$.

Решение. Выберем положительное направление для отсчета перемещения тела $x$, считая за исходное положение тела при отсутствии силы $f(t)$. Положительное направление для скорости $v$ показано на рис. В.1, *а*. В схеме на рис. В.1, *б* четыре ветви. В первой включен источник силы $f(t)$, во второй — масса $m$, в третьей — идеальная пружина упругости $s$, в четвертой — сопротивление трения $r_{тр}$.

Для схемы рис. В.1, *б* составим уравнение по первому закону механики. Согласно этому закону, сумма всех внешних сил, действующих в некотором узле, должна быть равна сумме сил реакций в этом же узле. В узле $a$ действуют три силы реакции: $f_m = m\dfrac{dv}{dt}$ — реакция системы, обусловленная силой инерции; $f_s = \dfrac{1}{e}\int v\,dt$ — реакция системы, обусловленная деформацией пружины; $f_{тр} = r_{тр}\cdot v$ — реакция системы, обусловленная трением.

По первому закону механики,

$$m\frac{dv}{dt} + \frac{1}{e}\int v\,dt + r_{тр}v = f(t)$$

или

$$f_m + f_s + f_{тр} = f(t).$$



Между отдельными элементами механической системы и элементами соответствующей ей электрической модели (системы) может быть аналогия двух типов, поскольку для каждой электрической цепи может быть составлена дуальная ей цепь.

При аналогии первого типа сопоставимыми величинами являются: сила $f$ — напряжение $u$, скорость $v$ — ток $i$, масса $m$ — индуктивность $L$, податливость пружины $e$ — емкость $C$, сопротивление трения $r_{тр}$ — электрическое сопротивление $R$.

При аналогии второго типа сопоставимыми величинами являются: сила $f$ — ток $i$, скорость $v$ — напряжение $u$, масса $m$ — емкость $C$, податливость $e$ — индуктивность $L$, сопротивление трения $r_{тр}$ — электрическая проводимость $G$.

На рис. В.1, *в* изображена электрическая схема, соответствующая схеме замещения механической системы рис. В.1, *а* по аналогии второго типа. Для нее

$$i_C + i_L + i_G = j(t) \text{ или } C\frac{du}{dt} + \frac{1}{L}\int u\,dt + Gu = j(t),$$

где $u$ — напряжение между узлами $a$ и $b$.

Характер изменения напряжения $u$ во времени в схеме рис. В.1, *в* аналогичен характеру изменения скорости $v$ в системе рис. В.1, *а*, если параметры электрической схемы подобраны соответствующим образом.

# Приложение Г

## Случайные процессы в электрических цепях

**§ Г.1. Случайные процессы. Корреляционные функции.** Положим, что есть несколько систем, находящихся в одинаковых условиях, и в них происходят в принципе одинаковые процессы. В силу влияния различных случайных факторов, имеющих вероятностный характер, процессы в системах могут несколько отличаться друг от друга. В результате наблюдения можно установить, какая величина при фиксированном моменте времени $t$ является наиболее вероятной.

*Плотность вероятности* случайного процесса $W(x, t)$ выражает вероятность того, что в момент времени $t$ значение величины $x$ находится в интервале от $x$ до $x + dx$.

*Функцией распределения* $F(x)$ называют вероятность наступления события, при котором значение величины $x$, характеризующей это событие, находится в интервале от $-\infty$ до $x$.

Случайные процессы могут быть разделены на стационарные и нестационарные. *Стационарными* называют случайные процессы, для которых все функции распределения не зависят от изменения начала отсчета времени. Для *нестационарных* случайных процессов функции распределения зависят от времени.

В качестве примера на рис. Г.1, *а*, *б* изображены кривые некоторого стационарного случайного процесса. Для этих кривых вероятность возникновения колебания с некоторой амплитудой останется той же, если сдвинуть начало отсчета времени. Иная картина имеет место на рис. Г.1, *в*, *г*, изображающих кривые $x(t)$ для некоторого нестационарного случайного процесса. На рис. Г.1, *в* начиная с некоторого момента времени $x(t)$ неограниченно возрастает, а на рис. Г.1, *г* — стремится к нулю. Следовательно, для этих кривых сдвиг начала отсчета времени изменяет вероятностные зависимости.

Для стационарных случайных процессов среднее по множеству $x$ равно среднему по времени $\langle x \rangle$, т. е. $x = \langle x \rangle$. Это положение называют *эргодической теоремой* (гипотезой). Эргодическая теорема позволяет, обрабатывая одну из временных зависимостей $x(t)$, полученную экспериментально, судить о статистических свойствах всех зависимостей $x(t)$ при стационарном случайном процессе в изучаемой системе.

Для характеристики случайных процессов $x(t)$ вводят автокорреляционную и взаимную корреляционную функции.

*Автокорреляционная функция* $R(\tau)$ является мерой взаимной связи функции $x(t)$ и функции $x(t - \tau)$, смещенной по отношению к $x(t)$ на время $\tau$.

$$R(\tau) = \lim \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)x(t - \tau)dt. \qquad (Г.1)$$

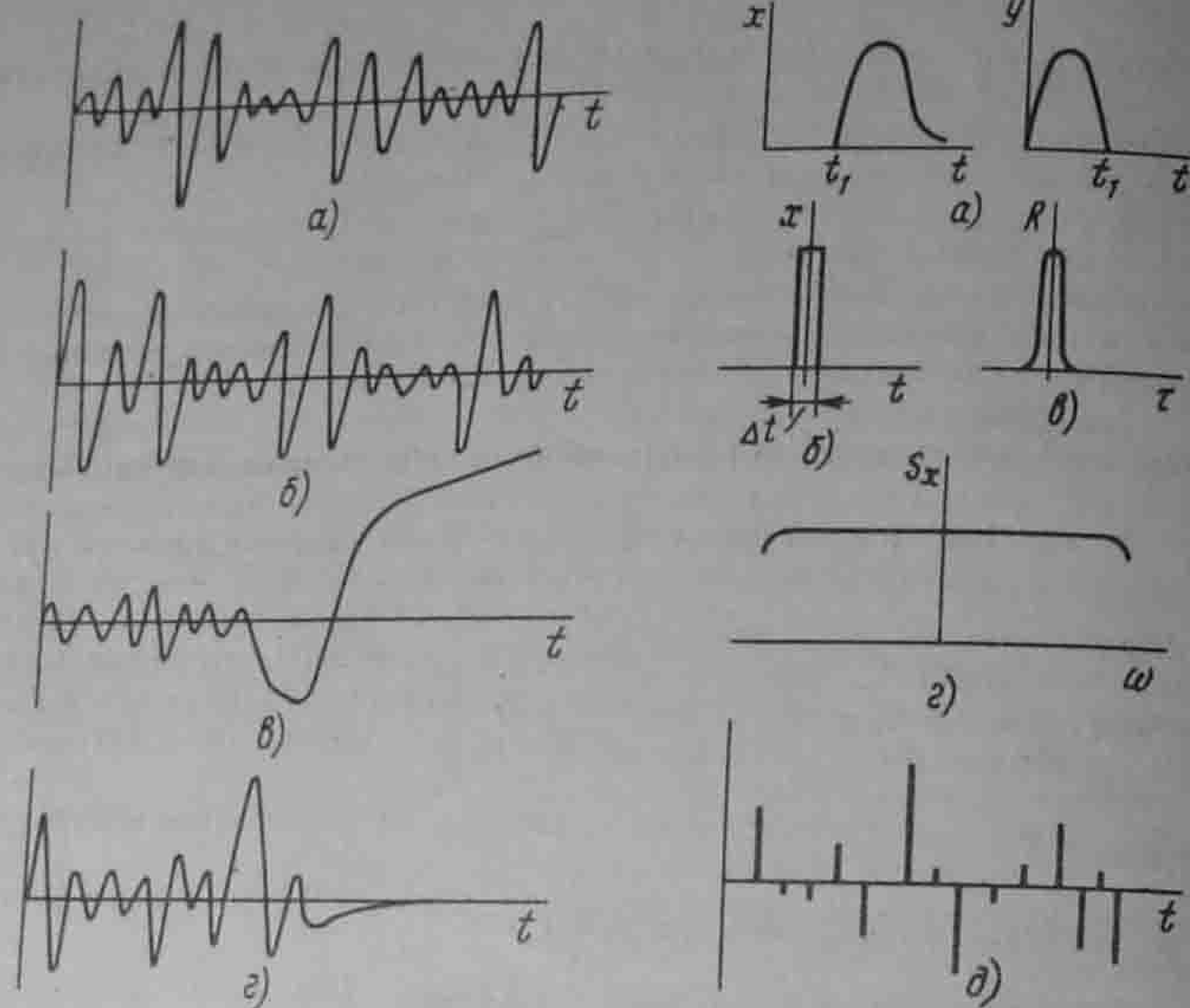


Рис. Г.1

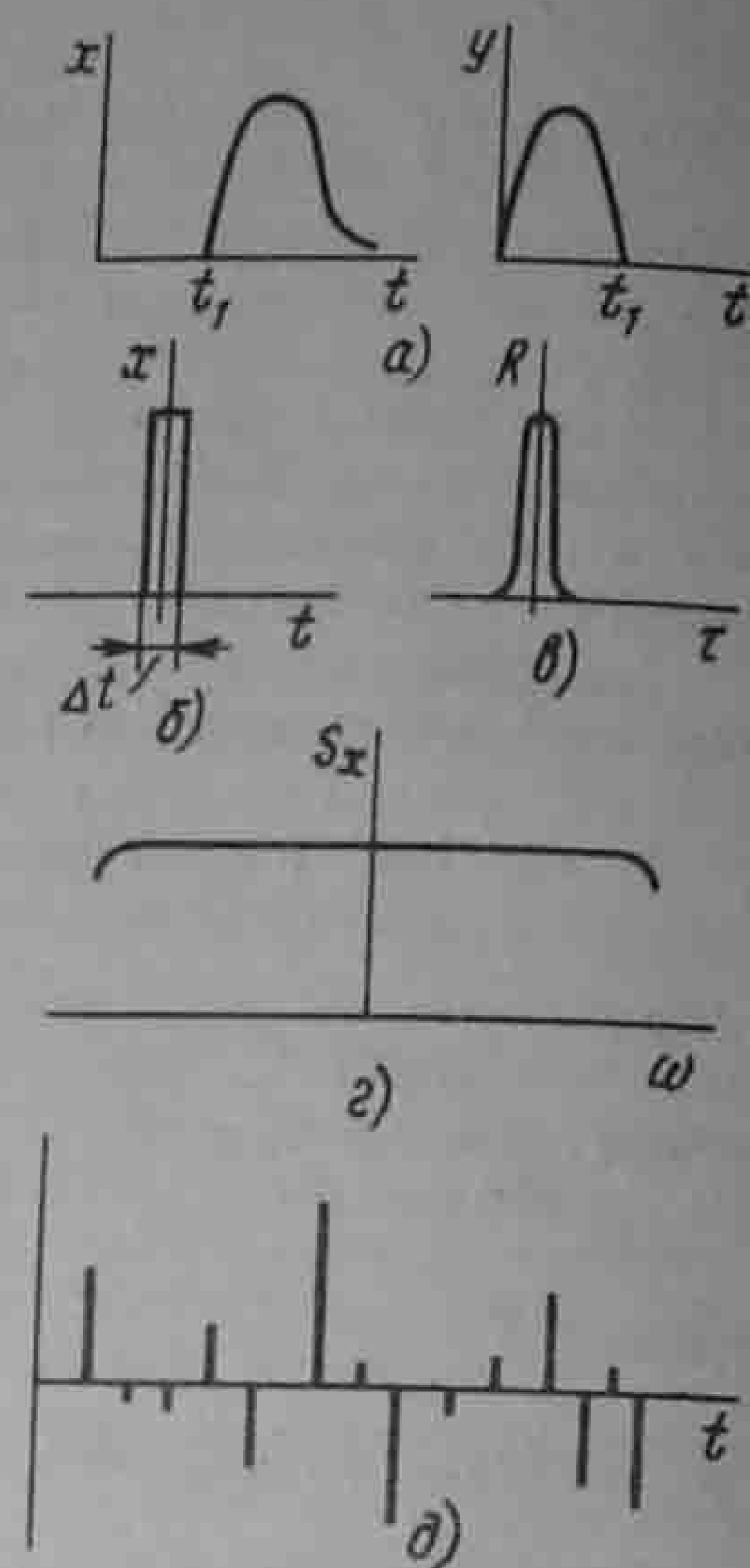


Рис. Г.2

Свойства $R(\tau)$

1) $R(\tau)$ — функция четная, т. е. $R(-\tau)=R(\tau)$, в этом можно убедиться, введя в (Г.1) новую переменную $t_1=t+\tau$;

2) если $x(t)$ — функция периодическая, то для нее $R(\tau)$ может быть представлена в виде суммы автокорреляционных функций от постоянной и синусоидально изменяющихся составляющих;

3) если в $x(t)$ имеются гармонические составляющие, то $R(\tau)$ не содержит информации о начальных фазах гармонических составляющих;

4) для $x(t)$ без постоянной и гармонических составляющих $R(\tau)$ максимальна при $\tau=0$;

5) для случайных функций времени без постоянной и гармонических составляющих $R(\tau)$ уменьшается с увеличением $\tau$ и уже при сравнительно небольших $\tau$ стремится к нулю (объясняется это тем, что для чисто случайного процесса значение $x(t-\tau)$ уже при относительно небольшом $\tau$ не зависит от того значения, которое имела эта функция $x(t)$ в момент времени $t$).

*Взаимной корреляционной функцией* $R_{xy}(\tau)$ двух функций времени $x(t)$ и $y(t)$ называют функцию, определяемую следующим образом:

$$R_{xy}(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x(t)y(t-\tau)dt. \qquad (Г.2)$$

Функция $R_{xy}(\tau)$ является мерой взаимной связи двух случайных функций времени.

На рис. Г.2, *а* изображены две произвольные функции времени $x(t)$ и $y(t)$, которые позволяют наглядно пояснить свойства функции $R_{xy}(\tau)$.

1. Функция $R_{xy}(\tau)$ зависит от того, сдвинута функция $y(t)$ на $+\tau$ или на $-\tau$, т. е. $R_{xy}(-\tau)\neq R_{xy}(\tau)$. Если кривую $y(t)$ на рис. Г.2, *а* сдвинуть на $+\tau$ влево, т. е. взять функцию $y(t+\tau)$, то произведение $x(t)y(t+\tau)$ будет равно нулю для любого $t$, следовательно, и $R_{xy}(\tau)=0$. Если же эту кривую сдвинуть на $-\tau$ вправо, т. е. взять



функцию $y(t-\tau)$, то на некотором интервале времени произведение ординат кривых $x(t)$ и $y(t-\tau)$ не будет равно нулю.

2. Сдвиг функции $y(t)$ влево на $\tau$ дает тот же результат, что и сдвиг функции $x(t)$ на $-\tau$ вправо. Поэтому

$$R_{xy}(\tau)=R_{yx}(-\tau).$$

3. Для случайных функций времени $x(t)$ и $y(t)$, не содержащих постоянной и гармонических составляющих одинаковой частоты (для некоррелированных функций), $R_{xy}(\tau)=0$.

**§ Г.2. Прямое и обратное преобразования Фурье для случайных функций времени.** К случайным функциям времени и их корреляционным функциям применяют преобразование Фурье. Так как в общем случае случайная функция времени $x(t)$ или ее корреляционная функция может и не стремиться к нулю при $t\to\pm\infty$, то для того чтобы к ним можно было применить преобразование Фурье, поступают следующим образом: преобразование Фурье применяют к функции $x_1(t)$, которая не равна нулю в интервале от $-T$ до $+T$ и равна нулю вне этого интервала. Если затем $T\to\infty$, то $x_1(t)$ будет стремиться к $x(t)$, а Фурье-изображение функции $x_1(t)$ — к Фурье-изображению функции $x(t)$.

Подобное рассуждение может быть проведено и по отношению к Фурье-изображению корреляционной функции.

*Фурье-изображением автокорреляционной функции* $R_x(\tau)$ называют функцию

$$S_x(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}R_x(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau. \qquad (Г.3)$$

Но $R_x(\tau)e^{-j\omega\tau}=R_x(\tau)[\cos\omega\tau-j\sin\omega\tau]$. Если учесть четность $R_x(\tau)$ и $\cos\omega t$ и нечетность $\sin\omega\tau$, то

$$S_x(\omega)=2\int_{0}^{\infty}R_x(\tau)\cos\omega\tau d\tau, \qquad (Г.4)$$

где $S_x(\omega)$ — спектральная плотность случайного процесса, которая обладает следующими свойствами: а) действительна и положительна при всех частотах; б) четная; в) так же, как и $R_x(\tau)$, не содержит информации о фазах гармоник, если таковые содержатся в $x(t)$.

Зная $S_x(\omega)$, можно определить автокорреляционную функцию

$$R_x(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_x(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega. \qquad (Г.5)$$

Формулы (Г.4) и (Г.5) выражают содержание *теоремы Винера — Хинчина.*

Если на четырехполюсник с передаточной функцией $K(j\omega)$, модуль которой $|K(j\omega)|$, воздействует случайная функция спектральной плотностью $S_{x\,вх}(\omega)$, то спектральная плотность величины на выходе четырехполюсника (вывод опускаем)

$$S_{x\,вых}(\omega)=|K(j\omega)|^2S_{x\,вх}(\omega). \qquad (Г.6)$$

**§ Г.3. Белый шум и его свойства.** Представим себе прямоугольный импульс весьма малой, в пределе бесконечно малой длительности $\Delta t$ (рис. Г.2, *б*). Нетрудно убедиться в том, что для него $R_x(\tau)\neq 0$ только при $\tau<|\pm\Delta t/2|$. Вне этого интервала $R_x(\tau)=0$. Из предыдущего следует, что если $R_x(\tau)\neq 0$ только при очень малых $\tau$, то процесс, которому соответствует эта функция, является случайным.

Положим, что $R_x(\tau)=e^{-\alpha|\tau|}$, где $\alpha$ очень велико, поэтому $R_x(\tau)$ очень быстро спадает в функции $\tau$ по закону экспоненты (рис. Г.2, *в*). Найдем $S_x(\omega)$ для этого

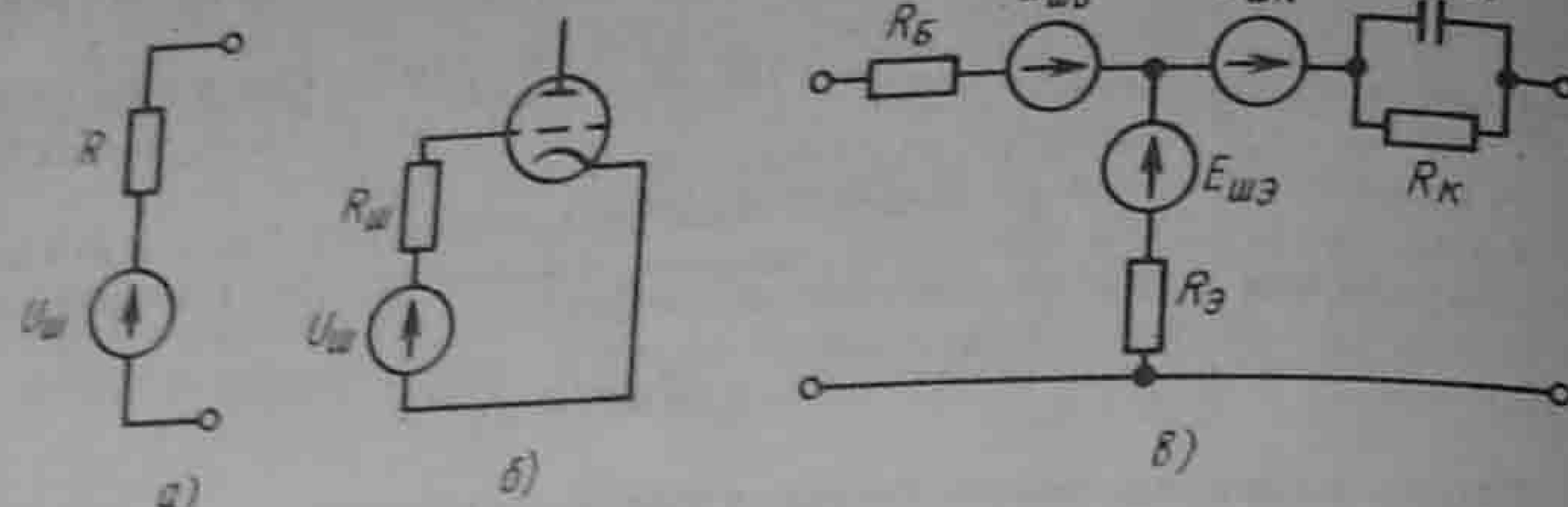



Рис. Г.3

случая. По определению,

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = 2\mathrm{Re}\int_0^{\infty} R_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau =$$

$$= 2\mathrm{Re}\int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau} e^{-j\omega\tau} d\tau = 2\mathrm{Re}\left(\frac{\alpha - j\omega}{\alpha^2 + \omega^2}\right) = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}.$$

На рис. Г.2, *г* качественно построен график $S_x(\omega)$ для случая, когда $\alpha$ очень велико.

Если $\alpha$ очень велико, то влияние $\omega^2$ на значение знаменателя $S_x(\omega)$ сказывается только при очень больших $\omega$, соизмеримых с $\alpha$, т. е. спектральная плотность мощности $S_x(\omega)$ кратковременного импульса в очень широком диапазоне частот постоянна.

Таким образом, чем уже импульс (чем он короче во времени), тем шире его частотный спектр.

Белый шум представляет собой совокупность множества беспорядочно (без всякой связи) следующих друг за другом игольчатых импульсов (рис. Г.2, *д*), амплитуды которых имеют случайный характер и подчиняются закону нормального распределения вероятности. При этом плотность распределения вероятности

$$W(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

где $a$ — математическое ожидание; $\sigma^2$ — дисперсия.

Так как спектральная плотность каждого импульса постоянна в достаточно широком диапазоне частот, то и для белого шума $S_x(\omega) = \mathrm{const}$. Если в формуле (Г.5) положить $\tau = 0$ и учесть, что $R_x(0)$ равно дисперсии $\sigma^2$, то $R_x(0) = \sigma^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega)\, d(\omega)$, т. е. дисперсия равна средней мощности флюктуации стационарного случайного процесса.

**§ Г.4. Источники внутренних шумов в электрических цепях.** Резисторы, электронные лампы, транзисторы, магнитные усилители и многие другие элементы схем являются источниками внутренних шумов. ЭДС, которые при расчете эквивалентны этим шумам, обычно очень малы и составляют часто несколько микровольт. Если шумящие элементы схем включены на входе усилителя, имеющего очень большой коэффициент усиления, то шумы ограничивают порог чувствительности схемы и их приходится учитывать.

*Резисторы как источник шума.* Вследствие хаотического теплового движения электронов в некоторый момент времени на одном конце резистора образуется избыток электронов, а на другом конце — недостаток. В смежный момент времени



может возникнуть обратная картина. На концах резистора как бы возникает некоторая ЭДС.

Шум, возникающий в резисторе $R$ (Ом), является белым шумом и имеет спектральную плотность $S_ш(\omega) = 2kTR$, где $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/град — постоянная Больцмана; $T$ — абсолютная температура резистора.

Шумящее сопротивление при расчете эквивалентно схеме рис. Г.3, *а*. В ней последовательно соединены нещумящее сопротивление и источник ЭДС. Квадрат напряжения этого источника

$$U_ш^2 = S_ш(\omega)\Delta\omega/\pi = 4kTR\Delta f,$$

где $\Delta\omega = 2\pi\Delta f$ — полоса пропускания усилителя, на вход которого включено шумящее сопротивление.

*Дробовой эффект в электронной лампе.* Эффект испускания электронов нитью накала лампы носит случайный характер. В некоторый момент времени из нити накала вылетает больше электронов, а в смежный с ним момент времени — меньше. В результате анодный ток при отсутствии сигнала на сетке лампы непостоянен и имеет некоторую переменную составляющую, которая колеблется около среднего значения анодного тока.

Эффект называют дробовым, так как он напоминает шум дробинок при их ударе о мишень. Шум, вызванный дробовым эффектом, является белым шумом, спектральная плотность которого не зависит от частоты. При расчете дробовой эффект учитывают, включив в сеточную цепь лампы рис. Г.3, *б* резистор $R = R_ш$ и источник ЭДС с напряжением $U_ш$; $U_ш^2 = 4kTR\Delta f$.

Для маломощных триодов пользуются формулой $R_ш = \frac{2 \div 3}{S}$ (кОм), где $S$ — крутизна характеристики лампы, мА/В. Для многосеточных ламп $R_ш$ значительно больше, чем для триодов.

В транзисторах шумы возникают вследствие дробового, диффузионного и фликкер процессов. Все их сводят к тепловому шуму. В качестве примера на рис. Г.3, *в* изображена шумовая схема биполярного транзистора, включенного по схеме с общей базой (сравни со схемой рис. 15.23, *б*).

В ней $E_{шб}^2 = 4kTR_б\Delta f$, $E_{шэ}^2 = 4kTR_э\Delta f$, $E_{шк}^2 = 4kT|Z_k|\Delta f$. Влияние шумов на выходную величину оценивают отношением квадрата действующего значения напряжения сигнала к среднему квадрату напряжения шума (дисперсии) на выходе устройства. Когда нелинейная схема работает в режиме, близком к линейному, и в ней может быть выделен доминантный источник белого шума, то принимают, что спектральная плотность шума $S_ш(0) = 4kTR$. Комплексным методом подсчитывают передаточную функцию четырехполюсника от шумовой ЭДС на выход четырехполюсника $K(j\omega)$, по формуле (Г.6) определяют спектральную плотность напряжения шума и, интегрируя ее по частоте $\overline{U_{ш\,вых}^2} = S_ш(0)\int_0^{\infty} |K(j\omega)|^2 df$, подсчитывают среднее значение квадрата шумового напряжения на выходе четырехполюсника. Затем определяют отношение сигнала к шуму.

## Приложение Д

### Дискретные сигналы и их обработка

**§ Д.1. Теорема Котельникова.** Положим, что некоторый аналоговый сигнал $x(t)$ (см. §9.7, рис. 9.4, *а*) (если его мысленно периодизировать во времени) содержит гармоники в диапазоне частот $0 - f_m$. Каждая гармоника ряда Фурье, в который мог бы быть разложен периодизированный аналоговый сигнал, характеризовалась бы двумя величинами — амплитудой и фазой. Поэтому для отображения в дискретизирован-

ном сигнале всех частот аналогового сигнала надо при дискретизации взять $2f_m$ отсчетов[1].

Если время отсчета обозначить $T$, интервал между отсчетами $\Delta$, число отсчетов $N$, то $T = N\Delta$, а

$$\Delta = \frac{1}{2f_m}, \qquad \text{(а)}$$

$$T = \frac{N}{2f_m}. \qquad \text{(б)}$$

Соотношение (а) выражает собой содержание теоремы В. А. Котельникова, сформулированной им в 1933 г.:

любую функцию времени, содержащую гармоники в диапазоне частот $0 - f_m$, можно передавать с помощью чисел, следующих друг за другом с интервалом в $\frac{1}{2f_m}$ секунд.

**§ Д.2. Частотный спектр дискретизированного сигнала.** Будем уменьшать ширину каждого импульса, сохраняя его площадь. Тогда дискретизированный сигнал рис. 9.4, *б* можно представить в виде суммы произведений двух функций

$$x_д(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\Delta)\delta(t - n\Delta). \qquad \text{(Д.1)}$$

Положим, что аналоговый сигнал $x(t)$ имеет частотный спектр $X(j\omega)$. Периодическую функцию (рис. Ж.1, *в*) $b(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t - n\Delta)$ разложим в ряд Фурье

$$b(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \dot{C}_l e^{j\frac{2\pi lt}{\Delta}} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \dot{C}_l e^{j\omega_p lt},$$

где $\omega_p = 2\pi/\Delta$ — частота дискретизации.

Коэффициенты этого ряда

$$\dot{C}_l = \frac{1}{\Delta}\int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \delta(t)\, e^{-j\frac{2\pi lt}{\Delta}}dt = \frac{1}{\Delta},$$

а спектр $b(t)$

$$B(j\omega) = \frac{2\pi}{\Delta}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega - \frac{2\pi l}{\Delta}\right). \qquad \text{(Д.2)}$$

В соответствии с тем, что $x_д(t)$ — это произведение двух временных функций, спектр дискретизированного сигнала $X_д(j\omega)$ определим через свертку спектральных плотностей этих функций

$$X_д(j\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X[j(\omega - \beta)]B(j\beta)d\beta =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2\pi}{\Delta} X[j(\omega - \beta)]\delta\left(\omega - \frac{2\pi l}{\Delta}\right)d\beta =$$

$$= \frac{1}{\Delta}\sum_{l=-\infty}^{\infty} X\left[j\left(\omega - \frac{2\pi l}{\Delta}\right)\right]. \qquad \text{(Д.3)}$$

т.е. $X_д(j\omega)$ представляет собой поделенную на $\Delta$ сумму частотных спектров исходного сигнала $x(t)$, сдвинутых по оси частот на интервалы $\omega_p = 2\pi/\Delta$, равные угловой частоте, с которой следуют импульсы дискретизации.

Для того чтобы периодическое повторение спектра, вызванное периодизацией во времени, не изменяло повторяемый спектр, необходимо и достаточно выполнение неравенства $\omega_p \geqslant 2\omega_m$, где $\omega_m$ — наивысшая частота в спектре сигнала $x(t)$. Обычно берут $\omega_p = (2 - 5)2\omega_m$, после чего определяют $\Delta = 2\pi/\omega_p$.

**§ Д.3. Дискретизация частотного спектра.** Пусть сигнал имеет длительность $T_c$ и частотный спектр $S_c(j\omega)$. Дискретизируем спектр $S_c(j\omega)$ с интервалами дискретизации по частоте $\Omega_д = \frac{2\pi}{T_c}$. По аналогии с предыдущим $S_д(j\omega)$ запишем так:

$$S_д(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} S(jk\Omega_д)\delta(\omega - k\Omega_д) = S(j\omega)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega - k\Omega_д). \qquad \text{(Д.4)}$$

Временной сигнал, соответствующий $S_д(j\omega)$,

$$S_д(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} S(jk\Omega_д)\delta(\omega - k\Omega_д) = S(j\omega)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega - k\Omega_д). \qquad \text{(Д.5)}$$

Функцию $\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega - k\Omega_д)$ разложим в ряд Фурье

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega - k\Omega_д) = \sum_{r=-\infty}^{\infty}\dot{C}_r e^{jr\omega T_c}. \qquad \text{(Д.6)}$$

Коэффицненты

$$\dot{C}_r = \frac{1}{\Omega_д}\int_{-\Omega_д/2}^{\Omega_д/2}\delta(\omega - k\Omega_д)e^{-jrT_c\omega}d\omega = \frac{1}{\Omega_д}, \qquad \text{(Д.7)}$$

поэтому

$$S_д(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_д(j\omega)\, e^{j\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega - k\Omega_д)\, e^{j\omega t}d\omega, \qquad \text{(Д.8)}$$

т.е. дискретизированному с частотой $\Omega_д$ частотному спектру во временной области соответствует периодический сигнал с периодом $T_c$. Если на интервале $0 - T_c$ сделано $N$ отсчетов, то $\Delta = \frac{T_c}{N} = \frac{2\pi}{\omega_p} = \frac{2\pi}{N\Omega_д}$.

На выбор $\Omega_д$ жестких условий, подобно наложенным на $\Delta$, не вводят.

---

[1] На периоде высшей гармоники $\frac{1}{f_m}$ должно быть взято по крайней мере два отсчета, иначе не будет учтено влияние высшей гармоники на величину отсчета.

**§ Д.4. Прямое преобразование Фурье дискретизированного сигнала.** На интервале $0 - T_c$ $x_д(t) = \sum\limits_{n=0}^{N-1} x(n\Delta)\,\delta(t - n\Delta)$ может быть представлен комплексным рядом Фурье (предполагается, что этот массив значений повторяется бесконечное число раз с периодом $T_c = N\Delta$)

$$x_д(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{C}_k e^{j\frac{2\pi k t}{T_c}}. \qquad (Д.9)$$

Здесь

$$\dot{C}_k = \frac{1}{T_c}\int_0^{T_c} x_д(t) e^{-j\frac{2\pi k t}{T_c}} dt.$$

Введя безразмерную переменную $\alpha = t/\Delta$ и обозначив $x(n\Delta) = x(n)$, получим

$$\dot{C}_k = \frac{1}{N\Delta}\int_0^{N\Delta}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\delta[(\alpha - n)\Delta] e^{-j\frac{2\pi k\alpha}{N}} d(\Delta\alpha) = \frac{1}{N}\int_0^{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\,\delta(\alpha - n) e^{-j\frac{2\pi k\alpha}{N}} d\alpha.$$

Учитывая фильтрующее свойство δ-функции, имеем

$$\dot{C}_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi k n}{N}}. \qquad (Д.10)$$

Формула (Д.10) дискретного преобразования Фурье (ДПФ) является аналогом формулы $S(j\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$ для непрерывных сигналов.

Свойства коэффициентов $\dot{C}_k$:

1) $\dot{C}_0 = \frac{1}{N}\sum\limits_{n=0}^{N-1} x(n)$;

2) $\dot{C}_k = \dot{C}_{k\pm aN}$, где a — целое число;

3) если число отсчетов $N$ четное, то $\dot{C}_{\frac{N}{2}} = \frac{1}{N}\sum\limits_{n=0}^{N-1} x(n)(-1)^n$;

4) если отсчетные значения $x(n)$ вещественные, то

$$\dot{C}_{N-k} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi(N-k)n}{N}} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{j\frac{2\pi nk}{N}} = \overset{*}{C}_k. \qquad (Д.11)$$

В качестве примера определим коэффициенты ДПФ сигнала $x_д(t)$ на интервале $0 - T_c$, заданного шестью дискретными значениями {0,5; 1; 0,5; 0; 0; 0}. Имеем $\dot{C}_0 = \frac{1}{6}(0,5 + 1 + 0,5) = \frac{1}{3}$; $\dot{C}_1 = \frac{1}{6}(0,5 + 1e^{-j\frac{\pi}{3}} + 0,5e^{-j\frac{2\pi}{3}}) = \frac{1}{8}(1 - j\sqrt{3})$; $\dot{C}_2 = \frac{1}{6}(0,5 + 1e^{-j\frac{2\pi}{3}} + 0,5e^{-j\frac{4\pi}{3}}) = \frac{1}{24}(1 - j\sqrt{3})$; $\dot{C}_3 = 0$; $\dot{C}_4 = \overset{*}{C}_2$; $\dot{C}_5 = \dot{C}_4$.

Если применить прямое преобразование Фурье (Д.12) к дискретизированному сигналу $x_д(t)$ и затем провести дискретизацию спектра по частоте с интервалом $\Omega_д$,



то для ДПФ получим

$$\dot{S}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \quad (k = 0, 1, 2, ..., N-1). \qquad (Д.12)$$

Через $\dot{S}_k$ обозначено $\dot{S}(k\Omega_д)$, а через $x(n) \to x(n\Delta)$ (Д.12) отличается от (Д.10) множителем $1/N$, поэтому $\dot{C}_k = \dot{S}_k/N$.

Для определения выборочных значений спектра $S_C(k\Omega_д)$ надо $\dot{S}_k$, вычисленные по (Д.12), умножить на величину дискретизации по времени $\Delta$ в соответствии с (Д.3). Дискретную функцию $e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ принято обозначать $W$. Тогда

$$S(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W^{nk} \quad (k = 0, 1, 2, ..., N-1). \qquad (Д.13)$$

В научно-технической литературе не принято ставить точки над $S(k)$ и $x(n)$, хотя эти величины в общем случае комплексные.

**§ Д.5. Определение непрерывного сигнала $x(t)$ по коэффициентам ДПФ.** Вследствие периодичности коэффициентов $\dot{C}_k$, а также функции $e^{-j\frac{2\pi k t}{N}}$ по индексу $k$ с периодом $N$ выражение (Д.9) можно записать так:

$$x_д(t) = \sum_{k=0}^{N-1} \dot{C}_k e^{j\frac{2\pi k t}{T_c}}. \qquad (Д.14)$$

Так как $\dot{C}_{N-K} = \overset{*}{C}_k$, то

$$x(t) = \dot{C}_0 + 2|\dot{C}_1|\cos\left(\frac{2\pi t}{T_c} + \varphi_1\right) + 2|\dot{C}_2|\cos\left(\frac{4\pi t}{T_c} + \varphi_2\right) + \dots$$

$$\dots + 2|\dot{C}_{N/2}|\cos\left(\frac{2\pi N t}{2T_c} + \varphi_{N/2}\right) \varphi_k = \arg\dot{C}_k.$$

Для примера § Д.3:

$$x(t) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{2\pi t}{T_c} - 60°\right) + \frac{1}{3}\cos\left(\frac{4\pi t}{T_c} - 120°\right).$$

**§ Д.6. Обратное дискретное преобразование Фурье.** В формуле (Д.14) от непрерывного времени $t$ перейдем к дискретному $t = n\Delta$ и обозначим $x(n\Delta)$ через $x(n)$:

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} \dot{C}_k e^{j\frac{2\pi kn}{N}} \quad (n = 0, 1 \dots, N-1). \qquad (Д.15)$$

Формулу (Д.15) называют формулой обратного дискретного преобразования Фурье (ОДПФ). Она является аналогом формулы обычного обратного преобразования Фурье:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \qquad (Д.16)$$

Если применить (Д.16) к дискретизированному спектру (Д.4) и затем провести дис-

кретизацию сигнала по времени с интервалом $\Delta$, то для ОДПФ получим

$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} S(k)W^{-kn} \quad (n = 0, 1, \dots N-1). \qquad (Д.17)$$

Отличие (Д.17) от (Д.15) в наличии множителя $1/N$ и в отсутствии точек над $\dot{S}_k$ и $\dot{x}(n)$.

Перейдя от (Д.17) к комплексно сопряженному с ним выражению и умножив на $N$, получим

$$N\overset{*}{x}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} \overset{*}{S}(k)W^{kn}. \qquad (Д.18)$$

Правая часть (Д.18) представляет собой ДПФ последовательности $\overset{*}{S}(k)$. Поделим (Д.18) на $N$ и перейдем к комплексно сопряженному с ним выражению

$$x(n) = \frac{1}{N}\left[\sum_{k=0}^{N-1} \overset{*}{S}(k)W^{nk}\right]^*. \qquad (Д.19)$$

Из формулы (Д.19) следует, что $x(n)$ или ОДПФ можно вычислять по тому же алгоритму, что и ДПФ.

**§ Д.7. Вычисление дискретного преобразования Фурье. Быстрое преобразование Фурье.** Если вычисление проводить по фомуле (Д.13), то надо произвести $N^2$ умножений и $N(N-1)$ сложений комплексных чисел, а всего $N^2 + N(N-1)$ операций. С целью уменьшения числа операций разработаны алгоритмы быстрого преобразования Фурье (БПФ). В основу их положено разложение $N$ точечного ДПФ на набор ДПФ меньшего порядка за счет использования следующих свойств дискретной экспоненты $W_N^{kn} = e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$:

1. Свойство симметрии $W_N^{k(N-n)} = (W_N^{kn})^*$.
2. Свойство периодичности $W_N^{k(n+N)} = W_N^{(k+N)n}$.
3. $W_N^r = W_{N/r}$, так как $e^{-j\frac{2\pi r}{N}} = e^{-j\frac{2\pi}{N/r}}$.
4. $W_N^{N/2} = -1$, так как $e^{-j\frac{2\pi}{N}\frac{N}{2}} = e^{-j\pi} = -1$.

Алгоритмы БПФ, основанные на разложении временной последовательности $x(n)$ на уменьшающееся число подпоследовательностей, называют алгоритмами БПФ с прореживанием по времени. Если $N$ целая степень числа 2, т. е. $N = 2^\nu$, то число умножений комплексных чисел равно $\frac{N}{2}\log_2 N$, а число сложений — $N\log_2 N$.

Алгоритмы БПФ, в которых на уменьшающиеся последовательности разлагается последовательность коэффициентов $S(k)$ дискретного преобразования Фурье, называют алгоритмами БПФ с прореживанием по частоте.

**§ Д.8. Дискретная свертка во временно́й и частотной областях.** Запишем интеграл Дюамеля (формулу свертки):

$$x_{вых}(\tau) = \int_0^t x_{вх}(\tau)\, h^\delta(t-\tau)\, d\tau, \qquad (Д.20)$$

где $x_{вх}(t)$, $x_{вых}(t)$—входной и выходной сигналы; $h^\delta(t)$ — импульсная переходная характеристика четырехполюсника. При цифровой обработке сигналов вместо обычной свертки используют дискретную. С этой целью разобьем интервал времени $0-T_c$ на $N$ одинаковых интервалов длительностью $\Delta$, текущее значение интервала $n\Delta$ обозначим $n$ $(0, 1, 2, \dots, N-1)$, дискретизированные значения $x_{вых}(t)$ обозначим $x_{вых\,m}$, $x_{вх}(\tau) \to x_{вх\,n}$. В свою очередь



$$h^\delta(t-\tau) \to h^\delta_{m-n} \quad (m = 0, 1, \dots, N-1).$$

Дискретную свертку записывают аналогично свертке обычной

$$x_{вых\,m} = \sum_{n=0}^{N-1} x_{вх\,n} h^\delta_{m-n}. \qquad (Д.21)$$

Для приведения в соответствие с формулой (Д.20) надо выполнить условие $h^\delta(m) = h^\delta(n)\Delta$, где $h^\delta(m)$ — безразмерная импульсная характеристика. Дискретную свертку по (Д.21) называют линейной, если $x_{вх\,n}$ и $h^\delta_{m-n}$ — нулевые вне интервалов их определения, т. е. не являются периодическими. Если $x_{вх\,n}$ и $h^\delta_n$ имеют соответственно $N_1$ и $N_2$ отсчетов, то при линейной свертке $x_{вых\,m}$ имеет длину в $N_1 + N_2 - 1$ отсчетов. Свертку по (Д.21) называют прямой. Она требует $N_1 N_2$ умножений. Дискретную свертку в частотной области вычисляют с помощью алгоритма БПФ и называют ее быстрой или высокоскоростной. С этой целью текущие зачения $x_{вх\,n}$ и $h^\delta_{m-n}$ выражают в виде ОДПФ от спектров соответствующих функций:

Тогда $x_{вх\,n} = \sum_{k=0}^{N-1} \dot{C}_{xвхk}\, e^{j\frac{2\pi nk}{N}}$; $h^\delta_{m-n} = \sum_{r=0}^{N-1} \dot{C}_{h^\delta_k}\, e^{\frac{j2\pi r(m-n)}{N}}$

$$x_{вых\,m} = \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{r=0}^{N-1} \dot{C}_{x\,вх\,k}\dot{C}_{h^\delta_r}\, e^{j\frac{2\pi rm}{N}} \sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi(k-r)n}{N}}.$$

Но

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi(k-r)n} = \begin{cases} N, \text{ если } k=r; \\ 0, \text{ если } k \neq r \text{ (вся сумма векторов} \\ \text{образует правильный замкнутый многоугольник)}. \end{cases}$$

Поэтому

$$x_{вых\,m} = \sum_{k=0}^{N-1} \dot{C}_{x\,вых\,k}\dot{C}_{h^\delta_k} N e^{j\frac{2\pi mk}{N}}. \qquad (Д.22)$$

Формула (Д.22) означает, что в $x_{вых\,m}$ есть ОДПФ от произведения $\dot{C}_{x\,вх\,k}\dot{C}_{h^\delta_k}N$. В ней учтено, что $r = k$ и потому взята одна сумма, а не две (суммировать дважды по одному индексу не имеет смысла).

С использованием предыдущих обозначений запишем $x_{вых\,m}$ в виде

$$x_{вых\,m} = \sum_{k=0}^{N-1} \dot{C}_{x\,вых\,k}\, e^{j\frac{2\pi mk}{N}} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \dot{S}_{x\,вых\,k} W^{-mk}. \qquad (Д.23)$$

Следовательно,

$$\dot{C}_{x\,вых\,k} = \dot{C}_{x\,вх\,k}\, \dot{C}_{h^\delta_k} N \qquad (Д.24)$$

и

$$\dot{S}_{вых\,k} = \dot{S}_{x\,вх\,k}\, \dot{S}_{h^\delta_k}. \qquad (Д.25)$$

Таким образом, коэффициенты ДПФ свертки являются произведениями коэффициентов ДПФ свертываемых функций. Поэтому для вычисления свертки двух последовательностей надо вначале найти их ДПФ, перемножить коэффициенты, а затем применить ОДПФ. Причем для вычисления ДПФ и ОДПФ можно использовать алгоритм БПФ. Однако в этом случае свертка получается циклической или круговой (периодической), а саму процедуру называют *теоремой о круговой свертке ДПФ*.

При использовании ДПФ и ОДПФ дискретизация во временной области приводит к тому, что спектр выходного сигнала становится периодическим, а при дискретизации в частотной области периодическим становится сам выходной сигнал с периодом, равным числу выборок. Для того чтобы с помощью периодической свертки можно было вычислять линейную, необходимо период круговой свертки сделать равным $L = 2^v \geqslant (N_1 + N_2 - 1)$ отсчетам. Для этого последовательности $x_{\text{вх}\,n}$ и $h_n^\delta$ (длиной $N_1$ и $N_2$) дополняют до длины $L$ необходимым числом нулевых отсчетов. Затем находят $L$ точечные ДПФ дополненных последовательностей, перемножают их и выполняют ОДПФ произведения.

Для осуществления быстрой свертки необходимо вычислить два БПФ для $L$ точек и провести $L$ комплексных умножений, т. е. всего $[2\left(\frac{L}{2}\log_2 L\right) + L]$ комплексных умножений или $4L(\log_2 L + 1)$ действительных умножений. Быстрая свертка эффективнее прямой при $L \geqslant 32$.

## Приложение Е

### Частотные преобразования

**§ Е.1. Классификация частотных преобразований.** Известны два основных направления частотных преобразований электрических цепей. Первое направление объединяет преобразования, которые позволяют от некоторой исходной схемы (схемы прототипа) — частотные свойства которой изучены — путем преобразования частоты перейти к некоторой другой (преобразованной) схеме с новыми элементами и с новыми частотными свойствами, сравнительно легко получаемыми из частотных свойств исходной схемы. В первую группу входят частотные преобразования первого и второго рода, нашедшие широкое применение. Второе направление основано на преобразовании Брутона. Оно состоит в том, что сопротивления всех элементов исходной схемы делят на комплексную частоту $p$. При этом элементы $R$, $L$, $C$ исходной схемы заменяют на элементы $C$, $R$, $D$ преобразованной схемы соответственно. Частотные свойства каждого элемента, естественно, изменяются, но частотные свойства всей схемы остаются без изменений. Преобразование позволяет избавиться от индуктивных элементов, элементов громоздких и с большой массой. Преобразование используют в теории фильтров.

**§ Е.2. Частотные преобразования первого рода.** Их осуществляют, заменяя комплексную частоту $p$ в исходной схеме на некоторую функцию комплексной частоты $s$.

Рассмотрим три примера. В первом из них заменим $p$ на $\omega_0/s$, во втором — на $k\frac{s^2 + \omega_0^2}{\omega_0 s}$, в третьем — на $\frac{\omega_0 s}{k(s^2 + \omega_0^2)}$. Первое преобразование дает возможность перейти от схемы, хорошо пропускающей низкие частоты (например, от схемы рис. Е.1, *а*), к схеме, хорошо пропускающей высокие частоты (рис. Е.1, *б*); $\omega_0$ — некоторый масштабный множитель. Элементам $L_1$ и $C_1$ схемы рис. Е.1, *а* отвечают соответственно $C_2$ и $L_2$ схемы рис. Е.1, *б*. Для выявления связи $L_1$ и $C_1$ с $C_2$ и $L_2$ запишем сопротивление элемента $L_1$ на частоте $p$, заменим в нем $p$ на $\omega_0/s$ и сопоставим его с сопротивлением элемента $C_2$ на частоте $s$. В результате получим $pL_1 = \omega_0 L_1/s = 1/(sC_2)$, отсюда $C_2 = 1/(\omega_0 L_1)$. Поступая аналогично по отношению к $C_1$ и $L_2$, имеем $1/(pC_1) = s/(\omega_0 C_1) = sL_2$, следовательно, $L_2 = 1/(\omega_0 C_1)$.



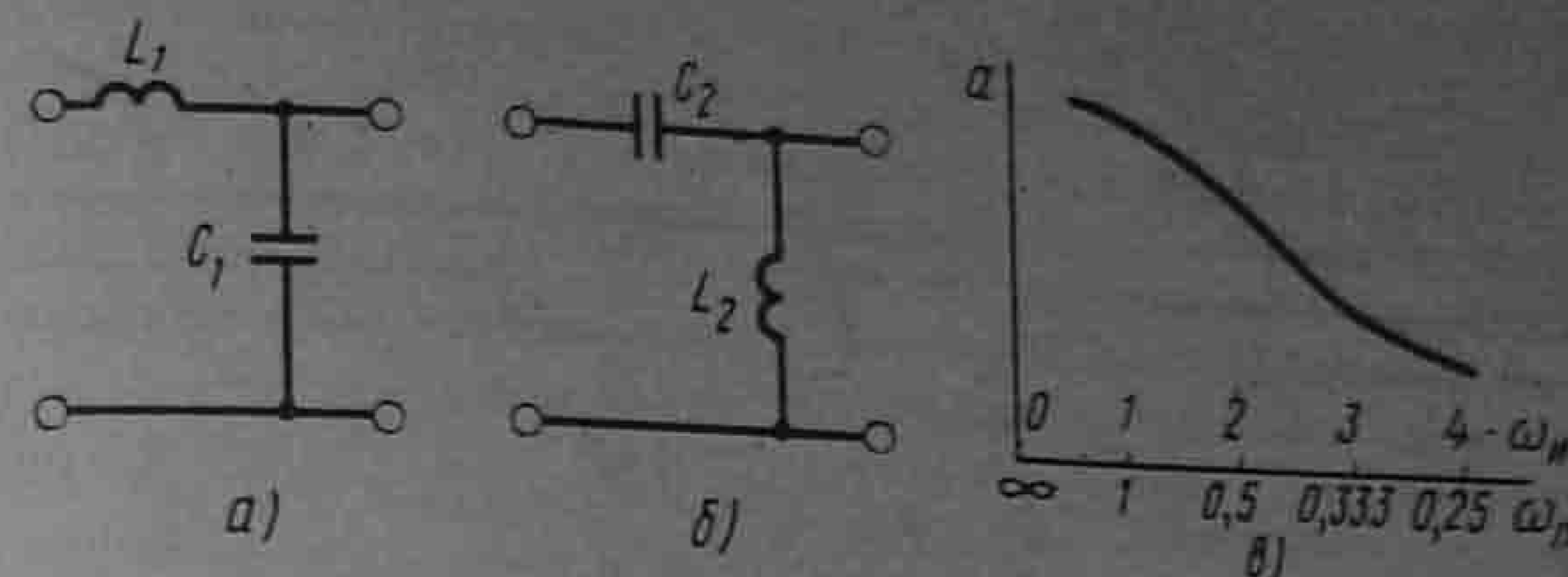



Рис. Е.1

Передаточная функция преобразованной схемы рис. Е.1, *б*

$$K_{2п}^{(s)} = \frac{pL_2}{pL_2 + \dfrac{1}{pC_2}} = \frac{L_2C_2s^2}{1 + L_2C_2s^2}$$

может быть получена из передаточной функции непреобразованной схемы рис. Е.1, *а*.

$$K_{1н}(p) = \frac{\dfrac{1}{pC_1}}{pL_1 + \dfrac{1}{pC_1}} = \frac{1}{1 + L_1C_1p^2}$$

заменой

$$p \to \omega_0/s, \quad L_1 \to 1/(\omega_0 C_2),\ C_1 \to 1/(\omega_0 L_2).$$

Из равенства $K_{2п}(s) = K_{1н}(\omega_0/s)$ следует, что схемы рис. Е.1, *а*, *б* имеют одинаковые частотные характеристики, только направление отсчета частоты по оси частот для преобразованной схемы рис. Е.1, *б* противоположно направлению отсчета частоты для исходной схемы рис. Е.1, *а*.

Если по оси частот на рис. Е.1, *в* частота $\omega_н$ для исходной схемы рис. Е.1, *а* ($p = j\omega_н$) откладывается в равномерном масштабе и отсчитывается слева направо, то зависимость затухания или передаточной функции преобразованной схемы изображается той же кривой, что и для исходной схемы, только частота для преобразованной схемы $\omega_п (s = j\omega_п)$ по оси абсцисс откладывается в неравномерном масштабе $\omega_п = \omega_0/\omega_н$ (это следует из соотношения $p = \omega_0/s$ или $j\omega_н = \omega_0/j\omega_п = -j\omega_0/\omega_п$). Знак минус означает изменение направления отсчета частоты $\omega_п$ по сравнению с направлением отсчета частоты $\omega_н$.

В качестве примера на рис. Е.1, *в* дана оцифровка по оси абсцисс для частот $\omega_н$ и $\omega_п$ при $\omega_0 = 1$. Преобразование фильтра низких частот (ФНЧ) рис. Е.2, *а* в полосно-пропускающий фильтр (ППФ) рис. Е.2, *б* осуществляется путем замены $p$ на $\varphi(s) = k(s^2 + \omega_0^2)/\omega_0 s$. Положим, что параметры ФНЧ ($L_н$ и $C_н$) известны, а также известна желаемая резонансная частота $\omega_0$ рис. Е.2, *в* и полоса пропускания $\Delta\omega$ ППФ. Частотная характеристика ФНЧ рис. Е.2, *г* может рассматриваться как частотная характеристика ППФ при правильной оцифровке по оси частот на рис. Е.2, *г* для этого фильтра и определения значений $L_{п1}$, $C_{п1}$, $L_{п2}$ и $C_{п2}$ через $L_н$, $C_н$, $\Delta\omega$ и $\omega_0$. Индуктивному элементу $L_н$ при переходе от схемы ФНЧ к схеме ППФ соответствуют последовательно соединенные $L_{п1}$ и $C_{п1}$, а емкостному элементу $C_н$ — параллельно соединенные $L_{п2}$ и $C_{п2}$. Для того чтобы выявить соответствие между $L_{п1}$, $C_{п1}$ и $L_н$, в выражении для сопротивления $pL_н$ заменим $p$ на $k(s^2 + \omega_0^2)/\omega_0 s$ и сопоставим

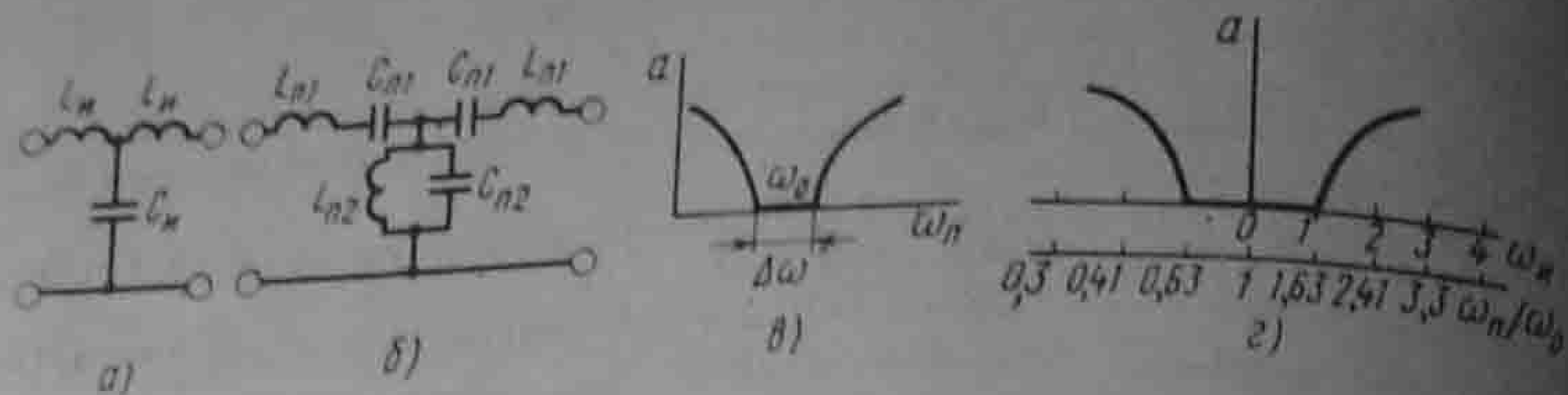



Рис. Е.2

полученную формулу с формулой для последовательно соединенных $L_{п1}$ и $C_{п1}$ на частоте $s$:

$$\frac{k(s+\omega_0^2)}{\omega_0 s}L_н=\frac{s^2+\dfrac{1}{L_{п1}C_{п1}}}{s\cdot\dfrac{1}{L_{п1}}}.$$

Из сопоставления следует, что $L_{п1}=kL_н/\omega_0$, $C_{п1}=1/(k\omega_0 L_н)$.

Поступая аналогичным образом для перехода от $C_н$ к параллельно соединенным $L_{п2}$ и $C_{п2}$, найдем

$$\frac{1}{pC_н}=\frac{\omega_0 s}{k(s^2+\omega_0^2)C_н}=\frac{s\dfrac{1}{C_{п2}}}{s^2+\dfrac{1}{L_{п2}C_{п2}}}.$$

Отсюда $L_{п2}=1/(k\omega_0 C_н)$, $C_{2п}=C_н k\omega_0$.

Для оцифровки оси абсцисс частотной характеристики преобразованной схемы следует выявить соответствие между частотами $\omega_н$ и $\omega_п$. С этой целью в выражении $p=k(s^2+\omega_0^2)/(\omega_0 s)$ следует заменить $p$ на $j\omega_н$, а $s$ на $j\omega_п$ и решить полученное уравнение относительно $\omega_п$:

$$\omega_н=k\left(\frac{\omega_п}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega_п}\right)\ \text{или}\ \frac{\omega_п}{\omega_0}=\frac{\omega_н}{2k}\pm\sqrt{1+\left(\frac{\omega_н}{2k}\right)^2}. \tag{E.1}$$

Из (Е.1) следует, что оцифровка по оси $\omega_п/\omega_0$ неравномерна. Частоте $\omega_н=0$ соответствует $\omega_п/\omega_0=1$. Два знака перед радикалом в (Е.1) указывают на то, что частотная характеристика ППФ имеет две ветви, одна из которых будет являться зеркальным отражением другой относительно вертикали, проведенной через точку $\omega_п/\omega_0=1$.

Придавая $\omega_н$ отрицательные значения, получим повторение частотной характеристики преобразованной схемы в области отрицательных частот, т. е. при частотном преобразовании характеристика может оказаться повторенной. На рис. Е.2, г оцифрована ось $\omega_п/\omega_0$ для полосно-пропускающего фильтра при $k=\omega_0/\Delta\omega=1$.

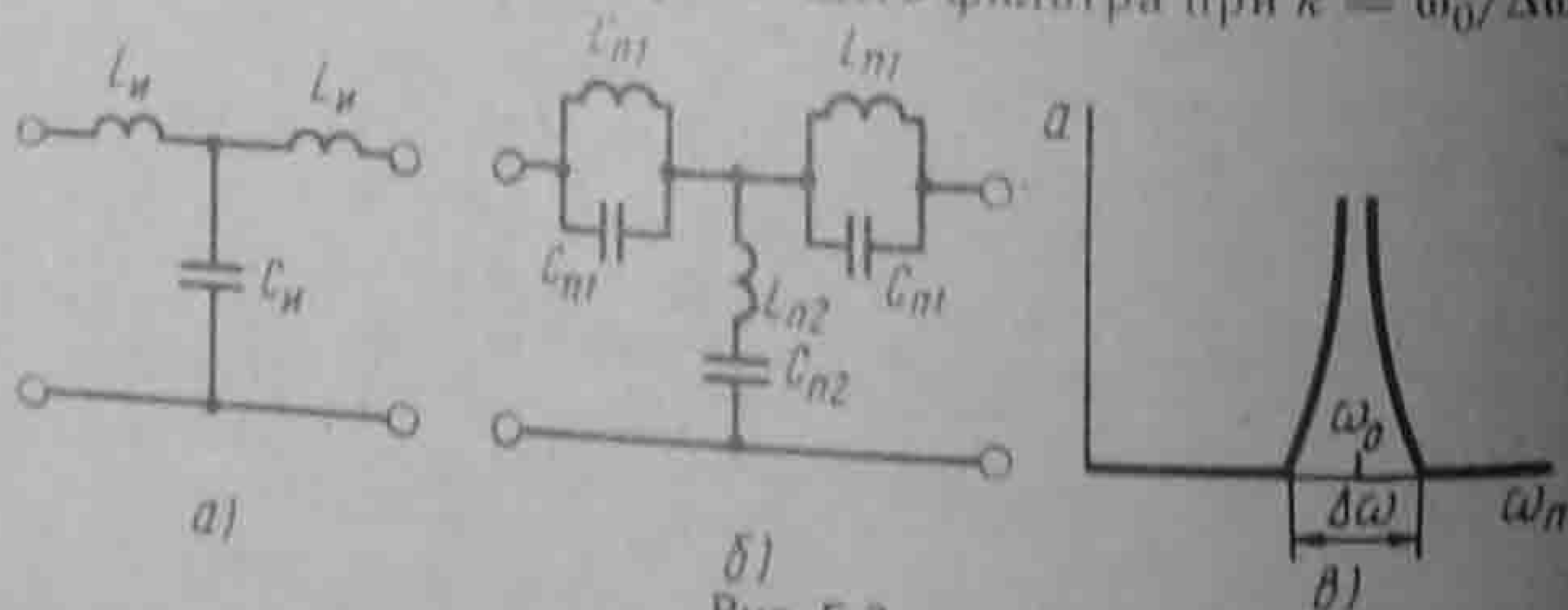



Рис. Е.3



Преобразование ФНЧ рис. Е.3, а в полосно-задерживающий фильтр (заграждающий ПЗФ) рис. Е.3, б осуществляется путем замены комплексной частоты $p$ на $\dfrac{\Delta\omega}{\omega_0}\left(\dfrac{s}{\omega_0}+\dfrac{\omega_0}{s}\right)^{-1}=\dfrac{\omega_0 s}{k(s^2+\omega_0^2)}$ и заменой $L_н$ на параллельно соединеные $L_{п1}$ и $C_{п1}$, а $C_н$ — на последовательно соединеные $L_{п2}$ и $C_{п2}$. Под $\omega_0$ понимают резонансную частоту, а под $\Delta\omega$ — ширину полосы затухания (рис. Е.3, в) $k=\omega_0/\Delta\omega$. Для определения значений $L_{п1}$, $C_{п1}$, $L_{п2}$ и $C_{п2}$ через $L_н$, $C_н$, $k$ и $\omega_0$ надлежит сопротивление $pL_н$ заменить на $\dfrac{\omega_0 s}{k(s^2+\omega_0^2)}L_н$ и сопоставить его с сопротивлением параллельно соединенных $L_{п1}$ и $C_{п1}$ на частоте $s$:

$$\frac{\omega_0 s}{k(s^2+\omega_0^2)}L_н=\frac{s\dfrac{1}{C_{п1}}}{s^2+\dfrac{1}{C_{п1}L_{п1}}}.$$

Получим $L_{п1}=L_н/(k\omega_0)$; $C_{п1}=k/(\omega_0 L_н)$.

Для нахождения $L_{п2}$ и $C_{п2}$ сопоставим сопротивление $\dfrac{1}{pC_н}=\dfrac{s^2+\omega_0^2}{\dfrac{\omega_0}{k}C_н s}$ с сопротивлением последовательно соединенных $L_{п2}$ и $C_{п2}$ на частоте $s$:

$$\frac{s^2+\omega_0^2}{\dfrac{\omega_0 C_н}{k}s}=\frac{s^2+\dfrac{1}{L_{п2}C_{п2}}}{\dfrac{1}{L_{п2}}s},$$

отсюда $L_{п2}=k/(\omega_0 C_н)$; $C_{п2}=C_н/(k\omega_0)$.

С целью получения соответствия оцифровки по оси абсцисс на частотной характеристике ФНЧ с оцифровкой по оси абсцисс на той же частотной характеристике, но для ПЗФ, в формуле $p=\dfrac{\omega_0 s}{k(s^2+\omega_0^2)}$ заменим $p$ на $j\omega_н$, а $s$ на $j\omega_п$.

В результате получим уравнение

$$\omega_н=\frac{\omega_0\omega_п}{k(\omega_0^2-\omega_п^2)}.$$

Решим его относительно $\omega_п/\omega_0$

$$\frac{\omega_п}{\omega_0}=-\frac{1}{2k\omega_н}\pm\sqrt{1+\left(\frac{1}{2k\omega_н}\right)^2}. \tag{E.2}$$

Формула (Е.2) позволяет осуществить оцифровку оси абсцисс на частотной характеристике ФНЧ для ПЗФ.

В заключение рассмотрим свойства преобразования, при котором $p$ заменяют на $\varphi(s)=1/(s+a)$. В этом случае индуктивный элемент индуктивностью $L$ заменяют на параллельное соединение конденсатора емкостью $C=1/L$ и резистора сопротивлением $R=1/a$, а конденсатор емкостью $C$ — на последовательное соединение резистора сопротивлением $R=a/C$ и индуктивного элемента индуктивностью $L=1/C$.

**§ Е.3. Частотные преобразования второго рода.** Частотное преобразование второго рода представляет собой преобразование, состоящее из двух операций: замены комплексной частоты $p$ для сопротивлений исходной схемы на некоторую функцию

$\varphi(s)$ комплексной частоты $s$ и умножения всех сопротивлений на некоторую функцию $W(s)$, подобранную таким образом, чтобы получить физически осуществимые сопротивления.

**Пример 177.** Преобразовать каноническую схему двухполюсника, состоящего из $LC$-элементов, в каноническую схему двухполюсника, состоящую из $RC$-элементов.

Решение. Входная проводимость $LC$-двухполюсника

$$Y_{LC}(p) = a_1 p + \frac{a_0}{p} + \sum \frac{2a_k p}{p^2 + \omega_k^2}.$$

Заменим $p$ на $\varphi(s) = \sqrt{s}$ и умножим результат на $W(s) = 1/\sqrt{s}$:

$$\frac{1}{\sqrt{s}}\left[a_1\sqrt{s} + \frac{a_0}{\sqrt{s}} + \sum \frac{2a_k\sqrt{s}}{s + \omega_k^2}\right] = a_1 + \frac{a_0}{s} + \sum \frac{2a_k}{s + \omega_k^2}.$$

В результате получили входное сопротивление канонической схемы двухполюсника, состоящего из $RC$-элементов. Следовательно,

$$Z_{RC}(s) = \frac{1}{\sqrt{s}} Y_{LC}(\sqrt{s}).$$

Аналогично, входное сопротивление двухполюсника из $RC$-элементов преобразуется во входную проводимость двухполюсника из $LC$-элементов: $Y_{LC}(s) = \sqrt{s}\, Z_{RC}(\sqrt{s})$.

В заключение отметим, что в частном случае преобразования второго рода проводят, умножая сопротивления исходной схемы на некоторую функцию $W(p)$, не заменяя $p$ на $\varphi(s)$.

**§ Е.4. Частотные преобразования цепей с распределенными параметрами.** По отношению к цепям с распределенными параметрами частотные преобразования применяют: 1) для перехода от одного типа цепей к другому (например, от $LC$-цепей с распределенными параметрами без потерь к $RC$-цепям с распределенными параметрами, от $LC$-цепей к безындукционным $RGC$-цепям и т. д.); 2) для перехода от электрических цепей с распределенными параметрами к цепям с сосредоточенными параметрами.

Параметры однородной линии с распределенными параметрами на единицу длины обозначим следующим образом: $L_0$ — индуктивность; $R_0$ — продольное сопротивление; $C_0$ — емкость; $G_0$ — поперечная проводимость; $l$ — длина линии; $U_2$ и $I_2$ — напряжение и ток в конце линии; $U_1$ и $I_1$ — напряжение и ток в начале линии.

Постоянная распространения $\gamma = \sqrt{(R_0 + pL)(G_0 + pC_0)}$.

Волновое сопротивление $Z_в = \sqrt{(R_0 + pL_0)/(G_0 + pC_0)}$.

Запишем уравнение линии в A-форме:

$$U_1 = AU_2 + BI_2;$$

$$I_1 = CU_2 + DI_2, \qquad (E.3)$$

где $A = D = \operatorname{ch}\gamma l$; $B = Z_в \operatorname{sh}\gamma l$; $C = \operatorname{sh}\gamma l / Z_в$.

Систему (E.3) представим в $Z$-форме, имея в виду, что $Z_{11} = Z_{22} = A/C = Z_в \operatorname{cth}\gamma l$, $Z_{12} = Z_{21} = 1/C = Z_в/\operatorname{sh}\gamma l$. В результате получим

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = Z_в \begin{bmatrix} \operatorname{cth}\gamma l & \operatorname{csh}\gamma l \\ \operatorname{csh}\gamma l & \operatorname{cth}\gamma l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}.$$

Обозначим $L_п = lL_0$; $R_п = lR_0$; $G_п = lG_0$; $C_п = lC_0$. Тогда $(\gamma l)^2 = L_п C_п p^2 + (L_п C_п + C_п R_п)p + R_п G_п$. Для $LC$-линии без потерь $(R_0 = G_0 = 0)$ $\gamma l_{LC} = p\sqrt{L_п C_п}$; $Z_в = \sqrt{L_0/C_0}$. Для $RC$-линии $(L_0 = G_0 = 0)$ $\gamma l_{RC} = \sqrt{pC_п R_п}$; $Z_в = \sqrt{R_0/(pC_0)}$.



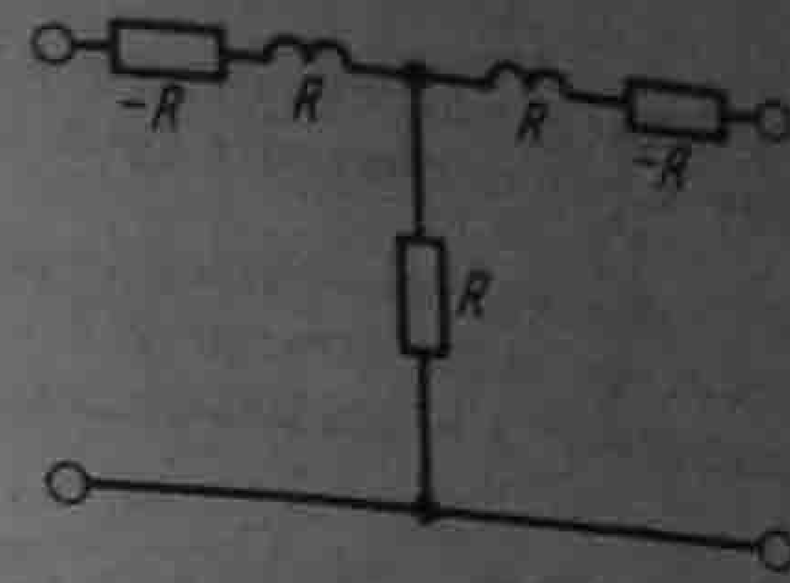



Рис. Е.4

Для безындукционной $RGC$-линии $(L_0 = 0)$

$$\gamma l_{R,G,C} = \sqrt{R_п C_п p + R_п C_п};\quad Z_в = \sqrt{R_0/(G_0 + pC_0)}.$$

Линия $LC$ без потерь переходит в $RC$-линию, а $Z$-матрица $LC$-линии преобразуется в $Z$-матрицу $RC$-линии, если в $Z$-матрице $LC$-линии положить $p = \sqrt{s}\sqrt{R_п/L_п}$ и умножить ее на $W(s) = \sqrt{R_0/(L_0 s)}$.

Линия с распределенными параметрами $RC(L_0 = G_0 = 0)$ переходит в линию с распределенными параметрами $L, C(R_0 = G_0 = 0)$, если в $Z$-матрице $LC$-линии положить $p = \varphi(s) = s^2 L_п/R_п$ и умножить ее на $W(s) = s\,L_0/R_0$.

Аналогично осуществляют переход от $LC$-линии без потерь к безындукционной $RGC$-линии и обратный переход, а также от $RC$-линии к $RGCL$-линии с потерями. Различие при этих переходах только в том, какую функцию $p = \varphi(s)$ следует взять и каков должен быть множитель $W(s)$.

Определим, как путем частотных преобразований производят переход от цепей с распределенными параметрами к цепям с сосредоточенными параметрами. С этой целью рассмотрим преобразование, которое позволит осуществить переход от безындукционной $RC$-цепи с распределенными параметрами к цепям с сосредоточенными параметрами, содержащими индуктивные элементы и положительные и отрицательные резисторы. Запишем выражение для $Z$-матрицы $RC$-цепи

$$\sqrt{\frac{R_0}{pC_0}} \begin{bmatrix} \operatorname{cth}\sqrt{pC_п R_п} & \operatorname{csh}\sqrt{pC_п R_п} \\ \operatorname{csh}\sqrt{pC_п R_п} & \operatorname{cth}\sqrt{pC_п R_п} \end{bmatrix}. \qquad (E.4)$$

Подставив

$$s = \operatorname{ch}\sqrt{pC_п R_п} \qquad (E.4a)$$

и умножив полученную матрицу на $W(s) = \sqrt{pC_п R_п}\,\operatorname{sh}\sqrt{pC_п R_п}$, получим $Z$-матрицу преобразованной цепи

$$R_п \begin{bmatrix} s & 1 \\ 1 & s \end{bmatrix}.$$

Этой матрице соответствует $T$-схема с сосредоточенными параметрами, изображенная на рис. Е.4 $(R_п = R)$.

Таким образом, при частотной подстановке (E.4a) $RC$-цепь с распределенными параметрами $(L_0 = G_0 = 0)$ оказалась приведенной к схеме рис. Е.4 с сосредоточенными параметрами, которая содержит индуктивные элементы и положительные и отрицательные резисторы.

**§ Е.5. Преобразование Брутона.** Как упоминалось в § Е.1, преобразование Брутона состоит в том, что сопротивления всех элементов исходной схемы делят на частоту $p$. При этом исходная цепь с элементами $R_в$, $L_в$, $C_в$ становится безындуктивной с эле-

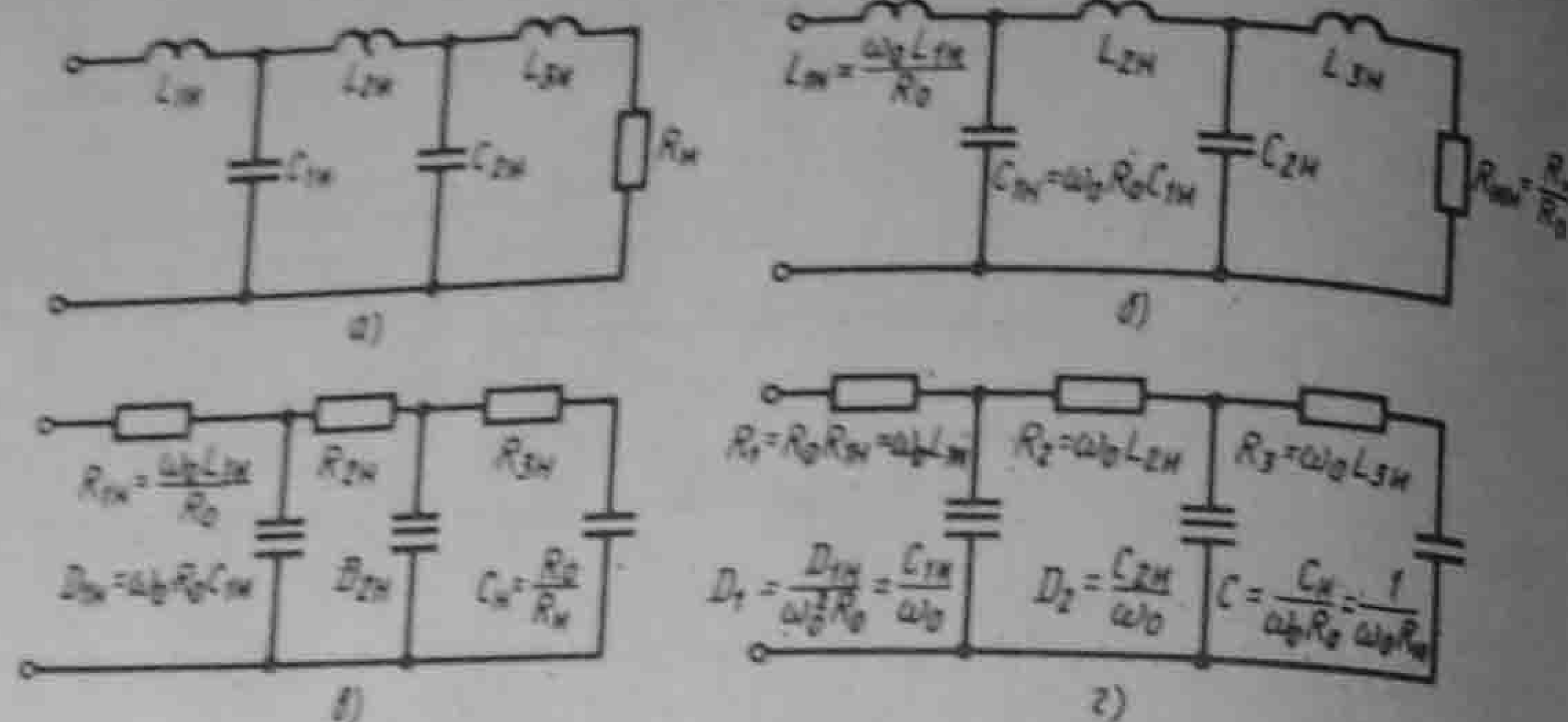



Рис. Е.5

ментами $C$, $R$, $D$, где $D$ — емкостный элемент второго порядка (Приложение Б). Частотные свойства исходной и преобразованной схем одинаковы.

Преобразование Брутона проведем одновременно с нормированием и последующей денормировкой параметров схемы.

Сначала рассмотрим вопрос о нормировке параметров. Пусть элементы $R_н$, $L_н$, $C_н$, $D_н$ некоторой исходной схемы соединены последовательно. Сопротивление исходной схемы на частоте $\omega$

$$Z_н = R_н + j\omega L_н + \frac{1}{j\omega C_н} + \frac{1}{(j\omega)^2 D_н}.$$

Нормируем это сопротивление по величине, поделив на некоторое сопротивление $R_0$(Ом) и затем нормируем по частоте $\omega_0$ (рад/с), введя нормированную частоту $x = \omega/\omega_0$. Если речь идет о фильтрах, то $\omega_0$ берут равной либо частоте среза НЧ-фильтра, либо центральной частоте полосы пропускания ПП-фильтра.

Индексом н будем снабжать нормированные по величине и по частоте значения величин. Нормированное сопротивление схемы в безразмерных единицах:

$$Z_н = R_н + jxL_н + \frac{1}{jxC_н} + \frac{1}{(jx)^2 D_н} = \frac{R_н}{R_0} + \frac{jx\omega_0 L_н}{R_0} + \frac{1}{jx\omega_0 C_н R_0} + \frac{1}{(jx)^2\omega_0^2 R_0 D_н}.$$

Почленно сопоставляя, находим связи между нормированными и ненормированными величинами:

$$R_н = R_н/R_0,\ L_н = (\omega_0 L_н)/R_0,\ C_н = \omega_0 R_0 C_н,$$

$$D_н = \omega_0^2 R_0 D_н. \tag{а}$$

В качестве исходной схемы, к которой применим преобразование Брутона, возьмем схему рис. Е.5, *а*. От нее сначала перейдем к схеме с нормированными параметрами рис. Е.5, *б* с нулевой размерностью. Схему рис. Е.5, *б* преобразуем по Брутону, поделив сопротивление каждого элемента на $p = jx$. При этом все продольные индуктивные элементы перейдут в резистивные. Так, например, сопротивление $\left(jx\frac{\omega_0 L_{1н}}{R_0}\right) : jx$ становится резистивным $R_{1н} = \frac{\omega_0 L_{1н}}{R_0}$. Все емкостные элементы перейдут в емкостные элементы второго порядка, например, $\frac{1}{jxC_{1н}} : jx = \frac{1}{(jx)^2 D_{1н}}$, $D_{1н} = C_{1н} = \omega_0 R_0 C_{1н}$. Резистивное сопротивление $R_{нн}$ переходит в емкостное $\frac{R_н}{R_0 jx} = \frac{1}{jx\frac{R_0}{R_н}} = \frac{1}{jxC_н}$ так, что $C_н = R_0/R_н$. Схема, преобразованная по Брутону, с нормированными безразмерными параметрами изображена на рис. Е.5, *в*. Используя формулы (а), осуществим денормировку. Окончательная схема с денормированными параметрами изображена на рис. Е.5, *г*. Параметры ее зависят от $\omega_0$ и параметров исходной схемы.



В схеме рис. Е.5, *г* два емкостных элемента второго порядка $D_1$ и $D_2$. Каждый из них реализуем схемой рис. 4.10, *а*. В каждой из этих схем полагаем $Z_1 = Z_3 = \frac{1}{pC_A}$, $Z_2 = Z_4 = R$, а сопротивление $Z_5$ берем резистивным и различным. При реализации $D_1$ берем $Z_5 = R_{51} = \frac{R^2 C_A^2}{D_1}$, при реализации $D_2$ принимаем $Z_5 = R_{52} = \frac{R^2 C_A^2}{D_2}$. Числовые значения $R$ и $C_A$ берем такими, чтобы была обеспечена нормальная работа операционных усилителей в схемах рис. 4.10, *а*.

В заключение обратим внимание на то, что нормирование параметров в § Е.5 выполнено несколько иначе, чем это принято в литературе по электрическим фильтрам и описано в § 10.11. Отличие в том, что в § Е.5 $R_0$ (Ом), $\omega_0$ (рад/с), тогда как обычно в литературе по фильтрам и в § 10.10 (при нормировке) полагают, что $R_0$ и $\omega_0$ имеют нулевую размерность. В § Е.5 в нормированной схеме рис. Е.5, *б* параметры имеют нулевую размерность, тогда как в нормированных схемах, когда $R_0$ и $\omega_0$ приняты безразмерными, $L_н$ (Гн), $C_н$ (Ф), $R_н$ (Ом). Сделано это для того, чтобы при преобразовании схемы по Брутону при переходе от рис. Е.5, *б* к рис. Е.5, *в* все элементы схемы рис. Е.5, *в*, как и схемы рис. Е.5, *б*, имели нулевую размерность и чтобы после денормировки элементы окончательной схемы рис. Е.5, *г* имели естественную размерность, т. е. чтобы все $R$ (Ом), $D\left(\frac{А \cdot с^2}{В}\right)$ и $C$ (Ф).

## Приложение Ж

### Z-преобразование цифровых сигналов

**§ Ж.1. Прямое *Z*-преобразование цифровых сигналов.** На рис. Ж.1, *а* изображен некоторый аналоговый сигнал, а на рис. Ж.1, *б* — соответствующий ему цифровой сигнал, заданный последовательностью ординат $x(nT)$, или проще $x(n)$:

$$x(n) = \ldots x(-1), x(0), x(1), x(2), \ldots . \tag{Ж.1}$$

Эту последовательность в общем виде можно представить суммой

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\,\delta(n-k), \tag{Ж.2}$$

здесь $\delta(n-k)$ — единичный импульс (площадь его равна 1) при $n=k$; $\delta(n-k)=1$ и $\delta(n-k)=0$ при $k \neq n$ (функцию $\delta(n-k)$, обладающую таким свойством, называют функцией Кронекера). Переход от аналогового сигнала $x(t)$ к цифровому $x(n)$ осуществляют с помощью цифрового преобразователя (АЦП), который выполняют в виде микросхемы. Он является типовым элементом электронных схем.

Подобно тому как непрерывный аналоговый сигнал $x(t)$ может быть подвергнут прямому преобразованию Лапласа (гл. 8)

$$X(p) = \int_0^{\infty} x(t)\,e^{-pt}\,dt,$$

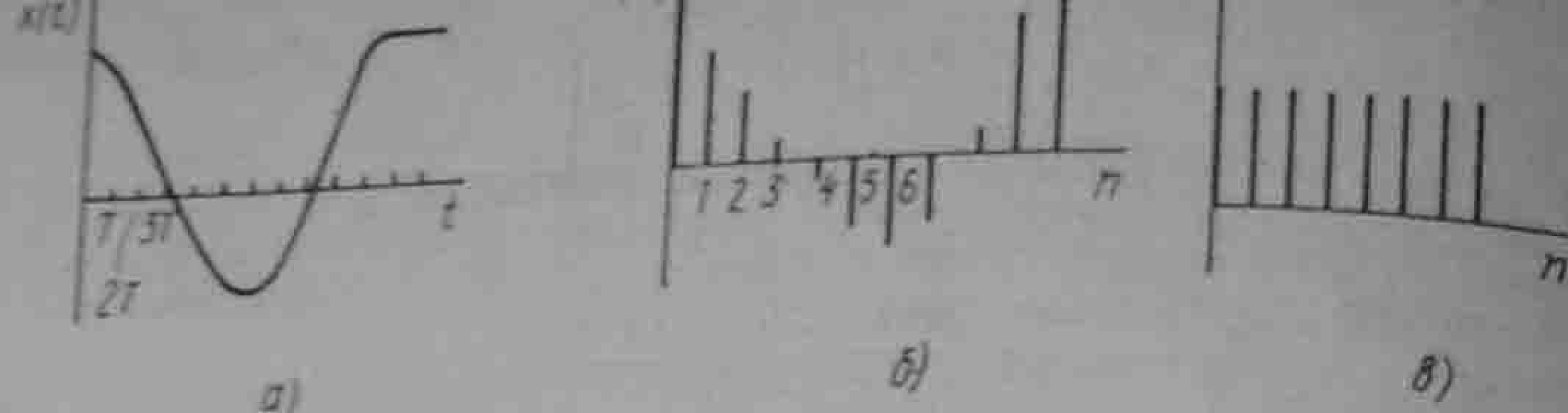


Рис. Ж.1

функция $x(n)$ может быть подвергнута прямому $z$-преобразованию

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty} x(n)\,z^{-n}. \qquad (Ж.3)$$

Суммирование начинают с $n=0$, полагая, что $x(n)$ равно нулю при $n<0$.

Последовательность единичных импульсов, возникающих при $n=0, 1, 2, \ldots$ (рис. Ж.1, в), принято обозначать $u(n)$. При $n\geqslant 0$ $u(n)=1$.

Степенной ряд $x(n)=a^n$ при $n\geqslant 0$ $a^0$, $a^1$, $a^2, \ldots$ с помощью функции $u(n)$ может быть записан так: $x(n)=a^n u(n)$. Линейно нарастающую функцию $x(n)=0, 1, 2, 3, \ldots$ представим так $x(n)=nu(n)$.

Запишем несколько типовых цифровых функций, их $z$-преобразования и отметим радиусы сходимости $R$. Под радиусом сходимости функции $x(n)$ при ее $z$-преобразовании понимают радиус $R$ области в плоскости комплексного переменного $z=re^{j\theta}$, для которой выполняется неравенство $\sum_{n=0}^{\infty}|x(n)\,r^{-n}|<\infty$:

а) $nu(n)$ $\quad X(z)=\dfrac{z}{(z-1)^2}=\dfrac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$ $\quad (R=1)$;

б) $\delta(n)$ $\quad X(z)=1\cdot z^0=1$ $\quad (R=0)$;

в) $u(n)$ $\quad X(z)=\dfrac{1}{1-z^{-1}}$ $\quad (R=1)$;

г) $x(n)=\delta(n-m)$ $\quad X(z)=z^{-m}$ $\quad (R=0)$;

д) $x(n)=a^n u(n)$ $\quad X(z)=\dfrac{z}{z-a}=\dfrac{1}{1-az^{-1}}$ $\quad (R=|a|)$;

е) $x(n)=[\sin n\varphi]u(n)$ $\quad X(z)=\dfrac{z^{-1}\sin\varphi}{z^{-2}-2z^{-1}\cos\varphi+1}$ $\quad (R=1)$;

ж) $x(n)=[\cos n\varphi]u(n)$ $\quad X(z)=\dfrac{1-z^{-1}\cos\varphi}{z^{-2}-2z^{-1}\cos\varphi+1}$ $\quad (R=1)$.

**§ Ж.2. Решение дифференциальных уравнений путем сведения их к разностным.** Линейному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами может быть сопоставлено разностное уравнение.

Первая производная по времени от непрерывной аналоговой функции $y(t)$ может быть аппроксимирована конечной разностью

$$\left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=nT}=\frac{y(n)-y(n-1)}{T} \quad \text{и} \quad \left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=(n-1)T}=\frac{y(n-1)-y(n-2)}{T}.$$



Вторая производная

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}=\frac{\left.\dfrac{dy(t)}{dt}\right|_{t=nT}-\left.\dfrac{dy(t)}{dt}\right|_{t=(n-1)T}}{T}=$$

$$=\frac{y(n)-2y(n-1)+y(n-2)}{T^2}.$$

Аналогично определяют производные и более высоких порядков.

В качестве примера запишем уравнение $\dfrac{d^2y(t)}{dt^2}+2\dfrac{dy(t)}{dt}+3y(t)=mx(t)$ с начальными условиями $y(0_-)=0$ и составим соответствующее ему разностное уравнение

$$\frac{y(n)-2y(n-1)+y(n-2)}{T^2}+2\frac{y(n)-y(n-1)}{T}+3y(n)=mx(n)$$

или

$$y(n)[1+2T+3T^2]-y(n-1)[2+2T]+y(n-2)=T^2mx(n). \qquad (Ж.4)$$

По уравнению (Ж.4) можно последовательно определить значения $y(n)$, придавая значения $n$ сначала 0, затем 1, 2, 3, ... и т. д., и учитывать при этом, что $y(-1)=y(-2)=0$, а $x(0)$, $x(1)$, $x(2)$ ... известны.

Рассмотрим пример. Пусть в (Ж.4) $T=1$, $m=1$, $x(0)=1$, $x(1)=2$, $x(2)=3$ и т. д. Тогда уравнение запишем так:

$$6y(n)-4y(n-1)+y(n-2)=x(n)$$

при $n=0$ $6y(0)-4\cdot 0+0=x(0)=1$, отсюда $y(0)=1/6$,
при $n=1$ $6y(1)-4y(0)+y(-1)=x(1)=2$; находим $y(1)=4/9$,
при $n=2$ $6y(2)-4y(1)+y(0)=x(2)=3$, следовательно $y(2)=83/18$ и т. д.

**§ Ж.3. Дискретная свертка.** Положим, что при нулевых начальных условиях на вход некоторого аналогового четырехполюсника (рис. Ж.2, а) воздействует аналоговое напряжение $u_1(t)=x(t)$, а импульсная переходная функция четырехполюсника (реакция на импульс единичной площади в виде $\delta$-функции) $h^\delta(t)$ известна. Тогда напряжение на выходе четырехполюсника $u_2(t)=y(t)$ определим по одной из двух форм записи интеграла Дюамеля $y(t)=\int_0^t x(\tau)\,h^\delta(t-\tau)\,d\tau$ или $y(t)=\int_0^t x(t-\tau)h^\delta(\tau)d\tau$ (полагаем $x(t)=0$ и $h^\delta(t)=0$ при $t<0$).

Аналогом этих формул, когда сигнал взят в цифровой форме, являются формулы:

$$y(n)=\sum_{k=0}^{\infty} x(k)\,h^\delta(n-k); \qquad (Ж.5)$$

$$y(n)=\sum_{k=0}^{\infty} x(n-k)\,h^\delta(k). \qquad (Ж.6)$$

**§ Ж.4. Теорема смещения для цифрового сигнала.** Если $x(t)=0$ при $t<0$, то изображение по Лапласу аналогового сигнала $x(t)\doteq X(p)$ и в соответствии с теоремой смещения (см. § 8.40) изображение функции $x(t-t_0)\doteq e^{-pt_0}X(p)$.

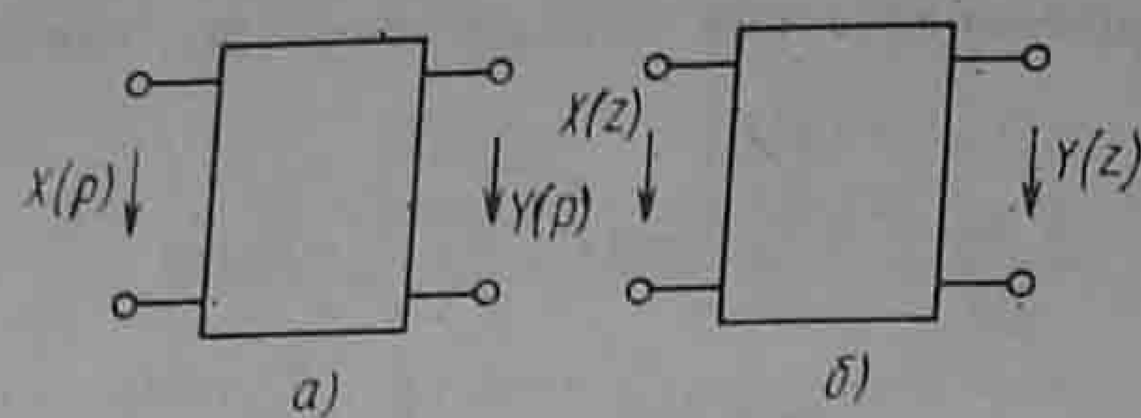



Рис. Ж.2

Аналогично, если последовательности $x(n)$ (при $n<0$ $x(n)=0$) соответствует $X(z)$, то последовательности $X(n-1)$ будет соответствовать $z^{-1}X(z)$, а последовательности

$$x(n-m) \to z^{-m} X(z). \qquad (Ж.7)$$

Формула (Ж.7) следует из (Ж.3) с учетом того, что функция $x(n-m)=0$ при $n<0$.

Таким образом, умножение функции $X(z)$ на $z^{-m}$ означает задержку ее на $m$ интервалов дискретизации $T$.

**§ Ж.5. Передаточная функция цифрового четырехполюсника.** При использовании преобразования Лапласа для аналогового сигнала передаточная функция четырехполюсника (рис. Ж.2, *а*) на комплексной частоте $p$ $K(p)=Y(p)/X(p)$.

Передаточную функцию для синусоидального процесса получаем, заменяя $p$ на $j\omega$ $K(j\omega)=Y(j\omega)/M(j\omega)$.

Для цифрового входного сигнала вместо $X(p)$ будет $X(z)$. Поэтому передаточная функция цифрового четырехполюсника (системная функция цифровой системы) рис. Ж.2, *б*

$$K(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}. \qquad (Ж.8)$$

Составим $K(z)$ примера, описывающего разностное уравнение (Ж.4). В соответствии с формулой (Ж.7)

$$y(n-1)\to z^{-1}Y(z),\quad y(n-2)\to z^{-2}Y(z),\quad x(n)\to X(z).$$

Уравнение (Ж.4) запишем так:

$$Y(z)[(1+2T+T^2)-z^{-1}2(1+T)+z^{-2}]=mT^2X(z);$$

$$K(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{mT^2}{z^{-2}-2(1+T)z^{-1}+(1+2T+T^2)}.$$

**§ Ж.6. Соответствие между комплексной частотой $p$ и параметром $z$ дискретного $Z$-преобразования.** Выведем соответствие между переменной $p$ преобразования по Лапласу аналогового сигнала и переменной $z$ дискретного $Z$-преобразования цифрового сигнала, полагая, что $\underset{t<0}{y(t)}=0$ и $\underset{n<0}{y(n)}=0$.

Для аналогового сигнала $\frac{dy(t)}{dt}=py$, $\left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=nT}=py_{t=nT}$.

Для цифрового $\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=nT}=\frac{y(n)-y(n-1)}{T}=\frac{y(n)-z^{-1}y(n)}{T}=y(n)\frac{1-z^{-1}}{T}$.

Сопоставляя эти два выражения и учитывая, что $y_{t=nT}=y(n)$, получим

$$p=\frac{1-z^{-1}}{T}. \qquad (Ж.9)$$



**§ Ж.7. Обратное $z$-преобразование.** Обратное $z$-преобразование осуществляют по формуле

$$x(n)=\frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{n-1}\,dz. \qquad (Ж.10)$$

Контурный интеграл берется по замкнутому пути $C$ в области сходимости функции $X(z)$ на плоскости $z$. Формула (Ж.10) — это аналог формулы обратного преобразования Лапласа:

$$x(t)=\frac{1}{2\pi j}\oint_C X(p)\,e^{pt}\,dp.$$

Известно, что нахождение оригинала $x(t)$ по изображению осуществляют обычно не путем взятия контурного интеграла, а более простым путем, разлагая $X(p)=N(p)/M(p)$ на сумму простых дробей (см. § 8.49), т. е. $X(p)=\sum_{k=1}^{M}\frac{A_k}{p-p_k}$ ($p_1\div p_M$ — корни уравнения $M(p)=0$), и затем, учитывая, что $\frac{A_k}{p-p_k}\doteq A_k e^{p_k t}$, получаем

$$x(t)=\sum_{k=1}^{M}A_k e^{p_k t}.$$

Аналогично поступают и при обратном $z$-преобразовании.

Функцию $X(z)$ записывают в виде
$$\frac{N(z^{-1})}{M(z^{-1})}=\frac{\sum_{i=0}^{N}a_i z^{-i}}{1+\sum_{k=1}^{M}b_k z^{-k}} \qquad (Ж.11)$$

и находят корни $z^{-1}$ знаменателя $M(z^{-1})=0$. Положим, что все они действительны и различны $z_k^{-1}=1/p_k$ или $z_k=p_k$, тогда $X(z)$ можно представить суммой простых дробей

$$X(z)=\frac{B_1}{1-p_1z^{-1}}+\frac{B_2}{1-p_2z^{-1}}+\ldots+\frac{B_M}{1-p_Mz^{-1}}. \qquad (Ж.12)$$

Здесь

$$B_k=\operatorname*{Res}_{z=p_k}X(z)=(1-p_kz^{-1})X(z)\big|_{z=p_k}. \qquad (Ж.13)$$

Переход от $X(z)$ к цифровой функции времени $x(n)$ осуществляют с помощью соотношения $a^n u(n)\to\frac{1}{1-az^{-1}}$ (см. формулу (Ж.3*а*), пункт д). В результате получим

$$x(n)=(B_1p_1^n+B_2p_2^n+\ldots+B_Mp_M^n)u(n). \qquad (Ж.14)$$

**Пример 178.** Пусть $\frac{N(z^{-1})}{M(z^{-1})}=\frac{0{,}5}{0{,}5z^{-2}-1{,}5z^{-1}+1}$. $M(z^{-1})=0$ имеет корни $z_{1,2}^{-1}=1$ и 2.

Им соответствуют $p_1=1/z^{-1}=1$ и $p_2=1/z_2^{-1}=\frac{1}{2}$.

$$B_1=(1-p_1z^{-1})X(z)\Big|_{z=p_1}=\frac{(1-p_1z^{-1})0,5}{(1-p_1z^{-1})(1-p_2z^{-1})}\Big|_{z=p_1}=\frac{0,5}{1-p_2z^{-1}}=\frac{0,5}{1-\frac{1}{2}\cdot 1}=1\,.$$

$$B_2=(1-p_2z^{-1})X(z)|_{z=p_2}=-0,5\,.$$

Отсюда $X(z)=\dfrac{1}{1-1\cdot z^{-1}}-\dfrac{0,5}{1-0,5z^{-1}}$. По формуле (Ж.14), цифровая функция времени $x(n)=(1-0,5\cdot 0,5^n)u(n)=0,5;\ 0,75;\ 0,875;\ 0,9375\ldots$ .

Если среди корней уравнения $M(z^{-1})=0$ будет два комплексно сопряженных корня $p_\varrho=\alpha+j\beta$ и $p_r=\alpha-j\beta$, то и коэффициенты $B_\varrho$ и $B_r$ будут комплексно сопряженными ($B_\varrho=m+jq$, $B_r=m-jq$). Этим корням в формуле (Ж.14) будет соответствовать вещественное слагаемое

$$B_\varrho p_\varrho^n+B_rp_r^n=2\,|\,B_\varrho\,||\,p_\varrho\,|^n\cos(\nu+n\varphi); \tag{Ж.15}$$

$$\nu=\operatorname{arctg}q/m,\ \varphi=\operatorname{arctg}\beta/\alpha.$$

Если знаменатель $X(z)$ в формуле (Ж.11) будет иметь корень $z_r=p_r$ кратности $r$, то соответствующее этому корню слагаемое в формуле (Ж.14) определим как вычет функции $X(z)$ в кратном полюсе

$$\frac{1}{(r-1)!}\frac{d^{r-1}}{dz^{r-1}}[(z-p_r)^rX(z)]_{z=p_r}$$

(см. аналогично в § 8.50 для операторного метода).

**§ Ж.8. Соответствие между полюсами аналогового и цифрового четырехполюсников.** Передаточную функцию аналогового четырехполюсника представим в виде

$$K(p)=\frac{\sum\limits_{k=0}^{N}a_kp^k}{\sum\limits_{k=0}^{M}b_kp^k}=\sum_{k=1}^{M}\frac{A_k}{p-p_k}. \tag{Ж.16}$$

Полагаем, что корни $p_k$ различны и нет кратных корней. Оригиналом (Ж.16) будет импульсная переходная функция

$$h^\delta(t)=\sum_{k=1}^{M}A_ke^{p_kt}. \tag{a}$$

Дискретизируем $h^\delta(t)$: $h^\delta(n)=h^\delta(t)|_{t=nT}$.

В соответствии с формулой (а)

$$h^\delta(n)=\sum_{k=1}^{M}A_ke^{p_knT}. \tag{Ж.17}$$

Для нахождения передаточной (системной) функции цифрового четырехполюсника подвергнем $h^\delta(n)$ $z$-преобразованию



$$K(z)=\sum_{n=0}^{\infty}h^\delta(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{M}A_ke^{p_knT}z^{-n}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{M}A_k(e^{p_kT}z^{-1})^n.$$

Но, по формуле (Ж.3), пункт д),

$$\sum_{n=0}^{\infty}(e^{p_kT}z^{-1})^n=\frac{1}{1-e^{p_kT}z^{-1}}, \tag{Ж.18}$$

поэтому $K(z)=\sum\limits_{k=1}^{M}\dfrac{A_k}{1-e^{p_kT}z^{-1}}$.

Сопоставляя (Ж.16) и (Ж.18), получаем соответствие

$$\frac{1}{p-p_k}\to\frac{1}{1-e^{p_kT}z^{-1}}. \tag{Ж.19}$$

Таким образом, полюсу $p_k$ аналогового четырехполюсника отвечает полюс $e^{p_kT}$ цифрового.

**§ Ж.9. Переход от передаточной функции аналогового четырехполюсника к передаточной функции соответствующего цифрового.** Известны два основных способа перехода. В первом в $K(p)=\sum\limits_{k=1}^{M}\dfrac{A_k}{p-p_k}$ каждый член суммы заменяют на $\dfrac{A_k}{1-e^{p_kT}z^{-1}}$ в соответствии с (Ж.19). Этот метод называют *методом инвариантности* переходной характеристики.

Второй метод — *метод билинейного преобразования* состоит в том, что в $K(p)$ заменяют $p$ на $\dfrac{2}{T}\dfrac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$. Эта замена может быть обоснована так: возьмем натуральный логарифм равенства $e^{pT}=z$. Получим $pT=\ln z$. Разложим $\ln z$ в ряд и возьмем первый член ряда $\ln z=2\left[\dfrac{z-1}{z+1}+\ldots\right]$. Отсюда $p=\dfrac{2}{T}\dfrac{z-1}{z+1}=\dfrac{2}{T}\dfrac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$.

Рассмотрим эти методы на примере.

Пусть $K(p)=\dfrac{4p}{(p+1)(p+3)}=\dfrac{-2}{p+1}+\dfrac{6}{p+3}$.

Согласно первому методу,

$$K(z)=\frac{-2}{1-e^{-T}z^{-1}}+\frac{6}{1-e^{-3T}z^{-1}}=\frac{4+(-6e^{-T}+2e^{-3T})z^{-1}}{1-(e^{-T}+e^{-3T})z^{-1}+e^{-4T}z^{-2}}.$$

По второму методу

$$K(z)=\frac{-2}{1+\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}+\frac{6}{3+\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}=$$

$$=\frac{8T}{(2+T)(2+3T)}\frac{1-z^2}{1-\frac{8-6T^2}{(2+T)(2+3T)}z^{-1}+\frac{4-4T+3T^2}{(2+T)(2+3T)}z^{-2}}.$$

## Приложение 3

### Цифровые фильтры

**§ 3.1. Введение.** На рис. 3.1 изображена структурная схема цифровой обработки сигналов. Аналоговый сигнал $x(t)$ поступает на аналогово-цифровой преобразователь (АЦП). Он выполнен в виде микросхемы и является типовым элементом электроники. С выхода АЦП цифровой сигнал $x(n)$ поступает на цифровой фильтр, где осуществляется цифровая фильтрация. Сигнал с выхода фильтра $y(n)$ поступает либо в цифровом виде, либо, как показано на рис. 3.1, в цифроаналоговый преобразователь (своя типовая микросхема), который преобразует $y(n)$ в $y(t)$. Цифровая обработка сигналов применяется уже свыше 30 лет в системах связи, радио и гидролокации, медицине, разведке полезных ископаемых и для других целей.

Цифровая обработка сигналов осуществляется двумя способами, которые условно называют аппаратурным и программным. Аппаратурная обработка рассмотрена в Приложении 3. Программная осуществляется с помощью специальных программ на ЦВМ с относительно большим объемом памяти, реализующих прямое и обратное дискретное преобразование Фурье и дискретную свертку. Ее основные положения рассмотрены в приложении Д (без программ для ЦВМ).

Программная реализация подробно рассмотрена, например, в [15].

**§ 3.2. Элементная база цифровых фильтров.** Аналоговые фильтры, как известно, состоят из элементов $L$, $C$, $R$, а в некоторых случаях еще и из управляемых источников. Цифровые фильтры состоят совсем из других элементов, а именно: а) элементов $z^{-1}$, осуществляющих единичные задержки на один такт $T$ (регистры сдвига для хранения предыдущих значений входных и выходных сигналов), обозначают их в соответствии с рис. 3.2, *а*;

б) перемножителей, которые выполняют умножение или масштабирование. Их обозначают, как показано на верхнем и нижнем рис. 3.2, *б*;

в) сумматоров (они же могут выполнять и вычитание), обозначают их в соответствии с верхним или нижним рис. 3.2, *в*. Места соединений элементов (узлы) обозначают точками. Если на схеме фильтра не записана величина передачи на линии, соединяющей узлы, то она принимается за 1. В качестве примера на рис. 3.2, *г* изображена схема цифрового фильтра, для которого $K(z)=\dfrac{a_0}{1-a_0e^{pT}z^{-1}}$.

**§ 3.3. Классификация цифровых фильтров по виду передаточной функции $K(z)$.** Если $K(z)$ ЦФ описывается полиномом по степеням $z^{-1}$ с конечным числом слагаемых $N$

$$K(z)=a_0+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+\ldots+a_Nz^{-N}, \tag{3.1}$$

то такой ЦФ называют *фильтром с конечной импульсной характеристикой* $h^\delta(n)$ (*КИХ-фильтр*). Название объясняется тем, что в этом случае $h^\delta(n)$ содержит конечное число слагаемых $[h^\delta(n)=0$ для $n>N$ и $n<0]$.

Если у ЦФ

$$K(z)=\frac{a_0z^0+a_1z^{-1}+\ldots+a_Nz^{-N}}{1+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+\ldots+b_Mz^{-M}}, \tag{3.2}$$

то его называют *фильтром с бесконечной импульсной характеристикой* (*БИХ-*



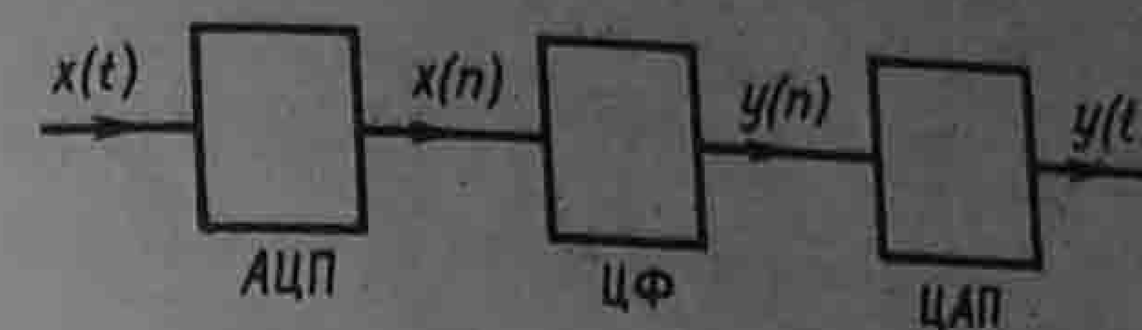



Рис. 3.1

*фильтр*). Ему соответствует $h^\delta(n)$ в виде бесконечной последовательности $[h^\delta(n)=0$ при $n<0]$.

Далее рассматриваются только БИХ-фильтры.

**§ 3.4. Алгоритм получения передаточной функции цифрового фильтра.** В руководствах по аналоговым фильтрам [9, 17] приведены таблицы полиномов знаменателя передаточной функции $K(p)$ низкочастотных аналоговых фильтров, аппроксимированные различными способами (по Чебышеву, Баттерворту, Бесселю и др.). Частота среза $\omega_c$ в этих таблицах принята равной 1 (нормирована). Полиномы подсчитаны при заданном максимальном отклонении модуля $K(p)$ в полосе пропускания от 1 и заданном затухании в полосе затухания при $\omega=k\omega_c$ (задано $k>1$).

Алгоритм получения $K(z)$ цифрового фильтра, основанный на инвариантности импульсной переходной характеристики, включает следующие этапы:

1. По заданным требованиям к цифровому фильтру выписываем из таблиц $K(p)$ аналогового фильтра, полагая, что он должен удовлетворять тем же требованиям по затуханию и по максимальному отклонению, что и цифровой.

2. Если $K(p)$ аналогового фильтра может быть представлен в виде $K(p)=\sum\limits_{k=1}^{M}\dfrac{A_k}{p-p_k}$, то переход к $K(z)$ осуществляют по формуле

$$K(z)=\sum_{k=1}^{M}\frac{A_k}{1-e^{p_kT}z^{-1}}. \tag{3.3}$$

3. Если $K(p)$ может быть представлен в виде $\dfrac{p+a}{(p+a)^2+b}$ и полюса $K(p)$ $p_{1,2}=-\delta\pm j\omega_0$, то $K(z)$ цифрового фильтра

$$K(z)=\frac{1-z^{-1}e^{-\delta T}\cos\omega_0T}{1-z^{-1}2e^{-\delta T}\cos\omega_0T+z^{-2}e^{-2\delta T}}. \tag{3.4}$$

Рассмотрим пример. Пусть аналоговый фильтр — прототип второго порядка при аппроксимации по Баттерворту (см. § 10.11) — имеет $K(p)=\dfrac{1}{p^2+\sqrt{2p}+1}$, корни полинома $p_{1,2}=-a\pm ja$, где $a=0{,}707$.

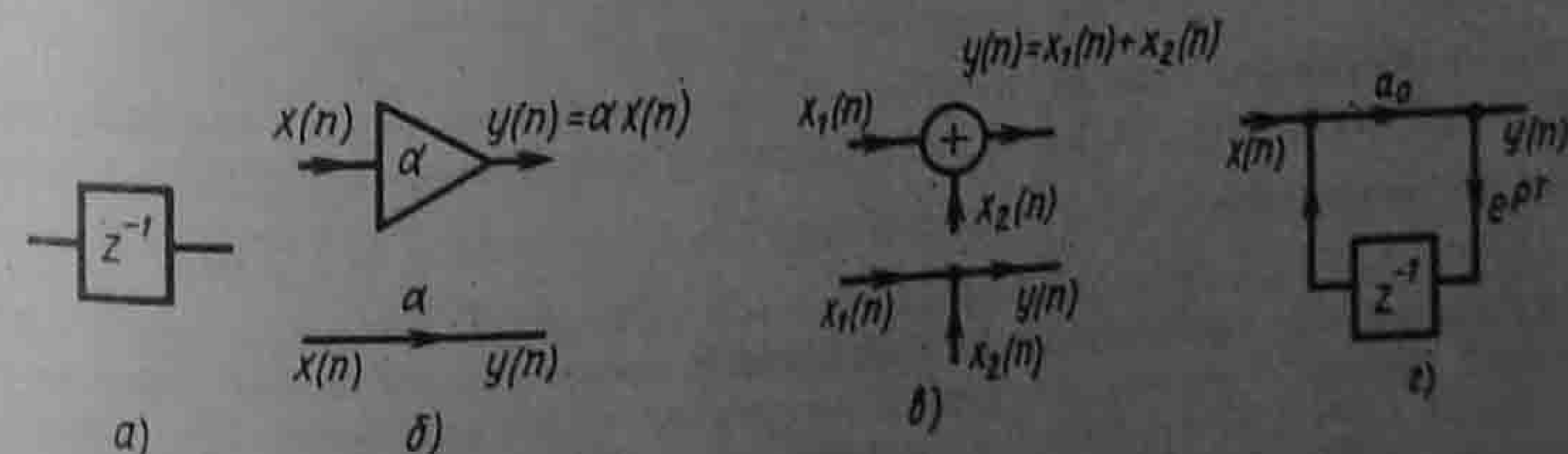



Рис. 3.2

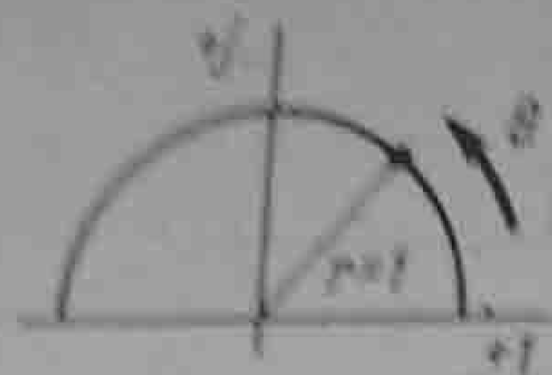



Рис. 3.3

$$K(p)=\frac{-j0{,}25}{p+a-ja}+\frac{j0{,}25}{p+a+ja}.$$

Используя формулу (3.3), имеем

$$K(z)=\frac{0{,}5e^{-aT}\sin aTz^{-1}}{1-2\cos aTe^{-aT}+e^{-2aT}z^{-2}}.$$

При $T=1$ с

$$K(z)=\frac{0{,}18z^{-1}}{1-0{,}753z^{-1}+0{,}24z^{-2}}.$$

**§ 3.5. Зависимость модуля и аргумента $K(z)$ от частоты.** Поскольку $K(z)=|K(z)|e^{j\varphi}$, то для выявления зависимости модуля $|K(z)|$ и аргумента φ от частоты ω в случае, когда ЦФ сконструирован на основе инвариантности импульсной характеристики, надо в $K(z)$ заменить $z$ на $re^{j\theta}$ при $r=1$ (см. рис. 3.3), где угол

$$\theta=\omega T, \tag{3.5}$$

т. е. между углом θ(рад) и частотой ω (рад/с) имеется линейная зависимость; $T$ — интервал дискретизации. Для примера § 3.4

$$K(e^{j\theta})=\frac{0{,}18e^{-j\theta}}{1-0{,}753e^{-j\theta}+0{,}24e^{-j2\theta}}.$$

На постоянном токе ($\omega=0$, $\theta=0$) $|K(z)|=0{,}373$. Чтобы нормализовать $K(z)$ примера, надо $K(z)$ умножить на $1/0{,}373\approx2{,}68$. В полосе пропускания НЧ фильтра θ изменя-
ется от 0 до $\omega_cT$, где нормированная частота среза $\omega_c=1$, в полосе затухания θ
изменяется от $\omega_cT$ до $\theta<\pi$.

У аналогового фильтра НЧ имеется только одна полоса пропускания от 0 до $\omega_c$. У соответствующего цифрового фильтра НЧ теоретически имеется несколько полос пропускания, так как функция $e^{j\theta}$ является периодической ($e^{j\theta}=e^{j(\theta+2k\pi)}$, где $k$ — целое положительное число). Случай $k\neq0$ не используется.

На рис. 3.4, *а* штриховкой показана полоса пропускания. Не используемые полосы показаны пунктиром. Групповое время запаздывания $\tau(\theta)=\frac{d\varphi(\theta)}{d\theta}$. Для цифровых фильтров, в основу формирования которых положено билинейное преобразование (см. § Ж.9), связь ω с θ получаем так: $p=j\omega=\frac{2}{T}\frac{1-e^{-j\theta}}{1+e^{-j\theta}}=j\frac{2}{T}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$, поэтому

$$\omega=\frac{2}{T}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}, \tag{3.6}$$

т. е. связь ω с θ оказывается нелинейной. Если известна частотная характеристика аналогового фильтра $K(j\omega)$, то для получения частотной характеристики соответствующего цифрового фильтра в этом случае надо $j\omega$ заменить на $j\frac{2}{T}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$.

**§ 3.6. Частотные преобразования цифровых фильтров.** Подобно тому как НЧ
аналоговый фильтр путем преобразования частоты (приложение Е) может быть
преобразован в ВЧ, ПП и ПЗ аналоговые фильтры, НЧ цифровой фильтр может быть
преобразован в ВЧ, ПП, ПЗ цифровые фильтры.



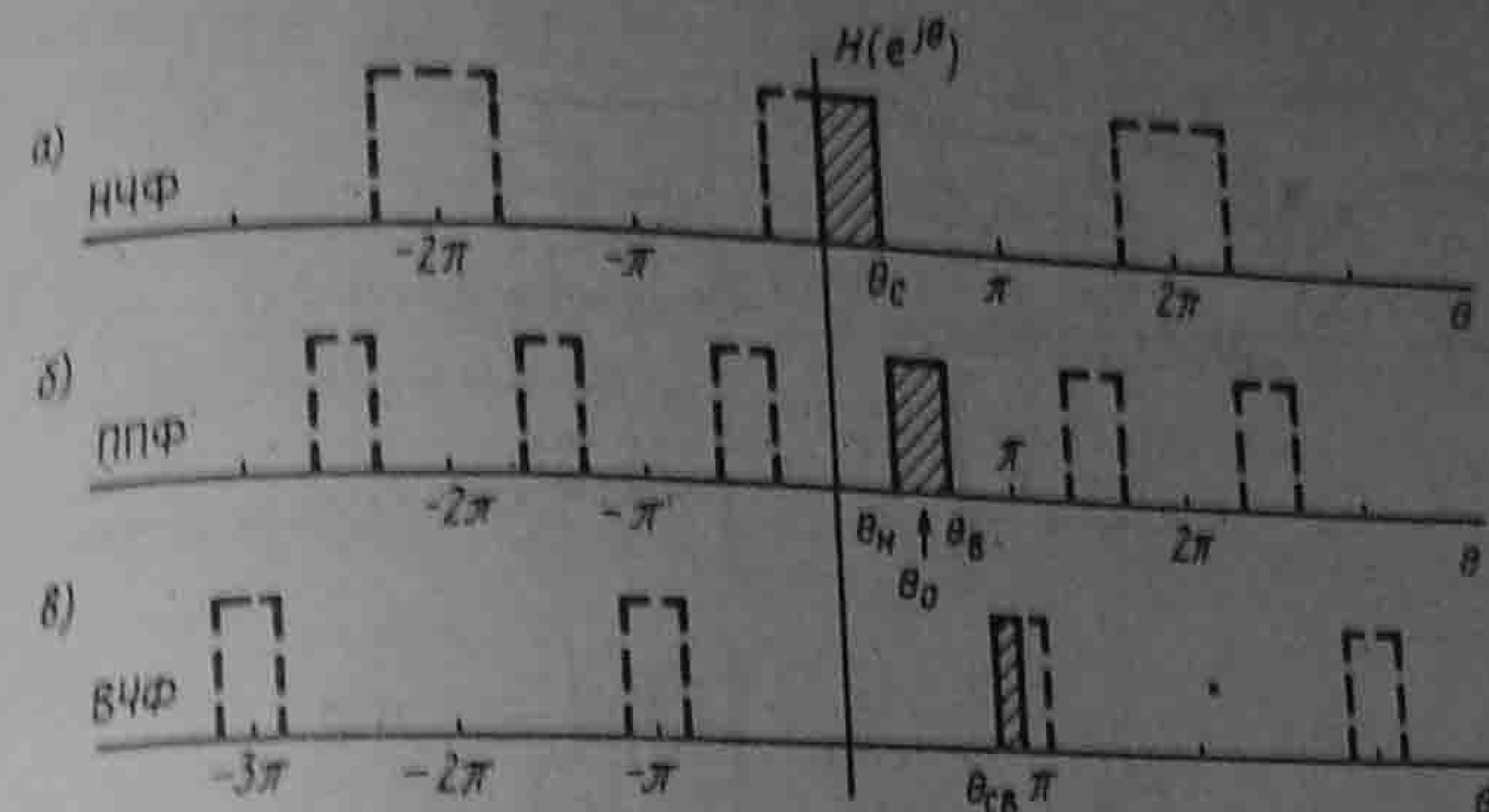



Рис. 3.4

1) Преобразование НЧ ЦФ в полосно-пропускающий ЦФ. НЧ ЦФ с частотой среза $\omega_c=1$ надо преобразовать в ПП ЦФ с центральной частотой $\theta_0$, верхней $\theta_в$ и нижней $\theta_н$. Частоты $\theta_0$, $\theta_в$, $\theta_н$ связаны уравнением

$$\cos\theta_0=\frac{\cos[(\theta_в+\theta_н)/2]}{\cos[(\theta_в-\theta_н)/2]},$$

т. е. две частоты из трех независимы.

$K(z)$ ПП ЦФ получают из $K(z)$ НЧ ЦФ путем замены

$$z^{-1}\to\frac{z^{-2}-\left(\frac{2\alpha\beta}{1+\beta}\right)z^{-1}+\frac{\beta-1}{\beta+1}}{\left(\frac{\beta-1}{\beta+1}\right)z^{-2}-\left(\frac{2\alpha\beta}{\beta+1}\right)z^{-1}+1}.$$

Здесь

$$\alpha=\cos\theta_0,\quad \beta=\frac{\operatorname{ctg}[(\theta_в-\theta_н)/2]}{\operatorname{tg}\frac{\theta_0}{2}}.$$

2) Преобразование НЧ ЦФ в ВЧ ЦФ. Полагаем, что НЧ ЦФ с частотой среза $\theta_c$ надо преобразовать в ВЧ ЦФ с частотой среза $\theta_{св}$. $K(z)$ ВЧ фильтра получают из $K(z)$ НЧ фильтра заменой

$$z^{-1}\to\frac{z^{-1}+\alpha}{1+\alpha z^{-1}},\quad где\quad \alpha=\frac{-\cos[(\theta_c-\theta_{св})/2]}{\cos[(\theta_c+\theta_{св})/2]}.$$

На рис. 3.4, *б*, *в* заштрихованы области работы ПП ЦФ и ВЧ ЦФ (пунктиром показаны не используемые области).

**§ 3.7. Реализация передаточных функций цифровых фильтров.** Известно несколь-
ко различных способов реализации ЦФ [9]. Рассмотрим один из вариантов так назы-
ваемого прямого метода. Он имеет преимущества в стоимости при $K(z)$ низких по-
рядков.
Передаточной функции

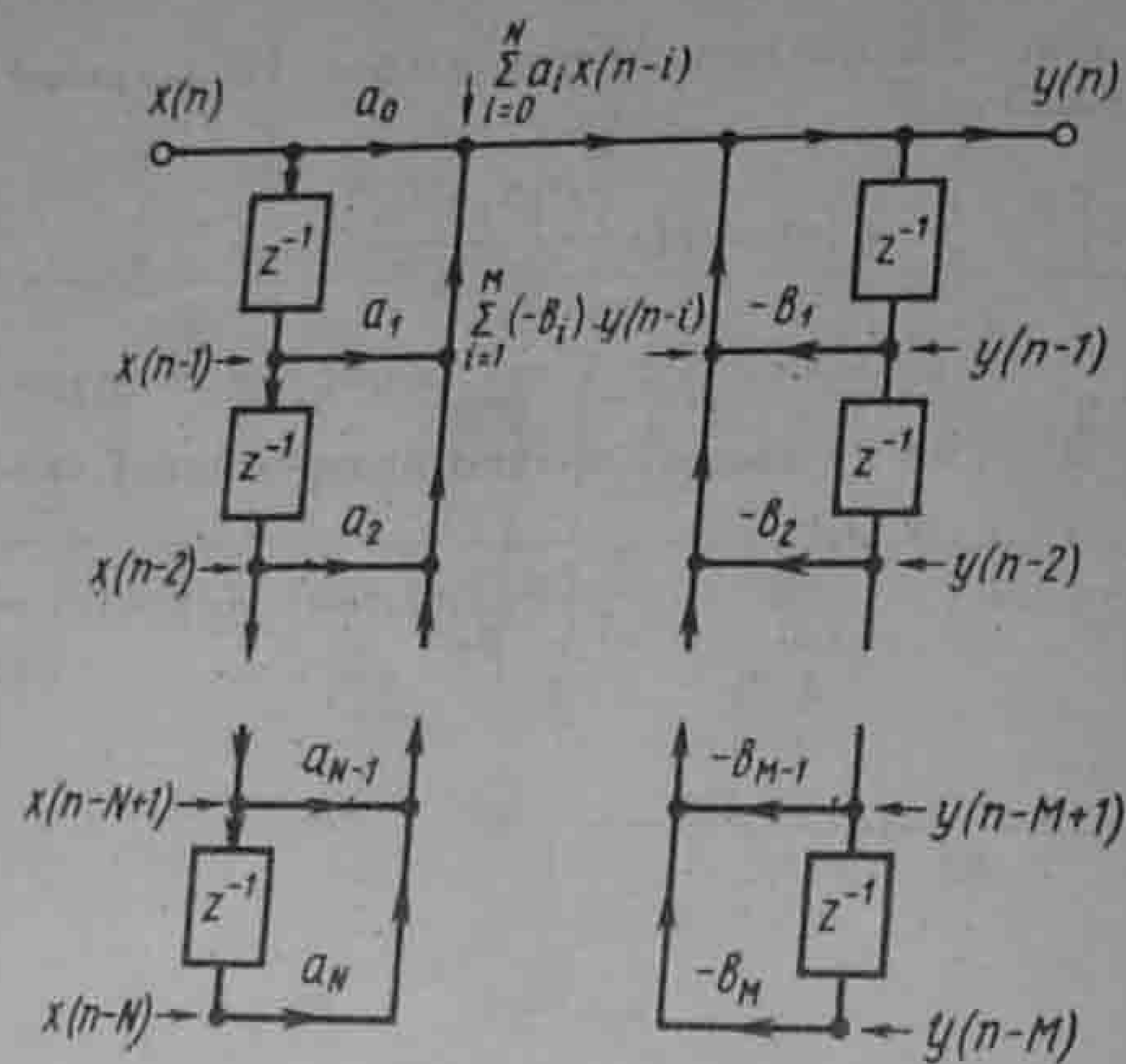



Рис. 3.5

$$K(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{\sum\limits_{i=0}^{N}a_i z^{-i}}{1+\sum\limits_{i=1}^{M}b_i z^{-i}} \tag{3.7}$$

соответствует разностное уравнение

$$y(n)=\sum_{i=0}^{N}a_i x(n-i)+\sum_{i=1}^{M}(-b_i)\,y(n-i). \tag{3.8}$$

Уравнению (3.8) отвечает схема рис. 3.5. Стрелки → в узлы левой части рисунка поясняют, что сигналы $x(n-1)$, $x(n-2)$ ... поступают в эти узлы с задержкой на $T$, $2T$ и т. д.

Аналогично → в узлы правой части схемы поясняют, что в соответствующие узлы сигналы $y(n-1)$, $y(n-2)$ ... поступают с задержкой в $T$, $2T$ и т. д.

В качестве примера реализуем $K(z)=\dfrac{1-z^{-2}}{1-\frac{2}{15}z^{-1}+\frac{3}{15}z^{-2}}$.

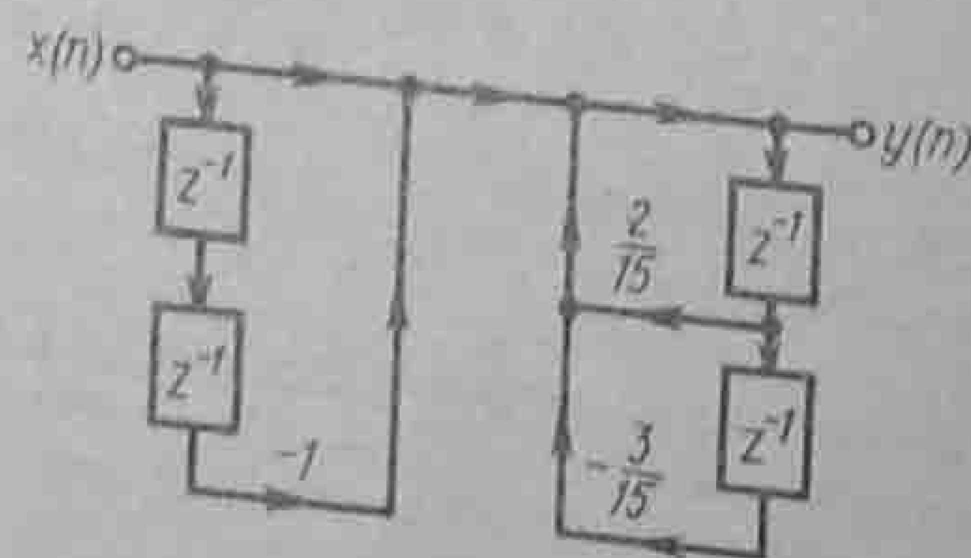



Рис. 3.6



Схема показана на рис. 3.6. Соответствие схемы рис. 3.6, заданной $K(z)$, проверим по формуле Мезона (А.1)

$$y(n)=x(n)\,\frac{P_1\Delta_1+P_2\Delta_2}{\Delta}$$

$P_1=1$, $P_2=-1z^{-1}z^{-1}$. Граф имеет две петли обратной связи с передачами $\frac{2}{15}z^{-1}$ и $-\frac{3}{15}z^{-1}z^{-1}$. Обе петли касаются обоих прямых путей, поэтому $\Delta_1=\Delta_2=1$. Определитель графа $\Delta=1-\left(\frac{2}{15}z^{-1}-\frac{3}{15}z^{-2}\right)$, поэтому $y(n)=x(n)\,\dfrac{1-z^{-2}}{1-\frac{2}{15}z^{-1}+\frac{3}{15}z^{-2}}$, как и задано.

# ОГЛАВЛЕНИЕ


**Предисловие** . . . . . . . . . . 3
Введение . . . . . . . . . . 6

Часть I. Линейные электрические цепи . . . . . . . . . . 8

Глава первая. **Основные положения теории электромагнитного поля и их применение к теории электрических цепей** . . . . . . . . . . 8

§ 1.1. Электромагнитное поле как вид материи . . . . . . . . . . 8
§ 1.2. Интегральные и дифференциальные соотношения между основными величинами, характеризующими поле . . . . . . . . . . 9
§ 1.3. Подразделение электротехнических задач на цепные и полевые 17
§ 1.4. Конденсатор . . . . . . . . . . 19
§ 1.5. Индуктивность. Явление самоиндукции . . . . . . . . . . 21
§ 1.6. Взаимная индуктивность. Явление взаимоиндукции . . . . . . . . . . 23
§ 1.7. Схемы замещения реальных электротехнических устройств . . . . 25
*Вопросы для самопроверки* . . . . . . . . . . 27

Глава вторая. **Свойства линейных электрических цепей и методы их расчета. Электрические цепи постоянного тока** . . . . . . . . . . 28

§ 2.1. Определение линейных и нелинейных электрических цепей . . . . 28
§ 2.2. Источник ЭДС и источник тока . . . . . . . . . . 29
§ 2.3. Неразветвленные и разветвленные электрические цепи . . . . . . 31
§ 2.4. Напряжение на участке цепи . . . . . . . . . . 32
§ 2.5. Закон Ома для участка цепи, не содержащего источника ЭДС . . 33
§ 2.6. Закон Ома для участка цепи, содержащего источник ЭДС. Обобщенный закон Ома . . . . . . . . . . 33
§ 2.7. Законы Кирхгофа . . . . . . . . . . 34
§ 2.8. Составление уравнений для расчета токов в схемах с помощью законов Кирхгофа . . . . . . . . . . 35
§ 2.9. Заземление одной точки схемы . . . . . . . . . . 37
§ 2.10. Потенциальная диаграмма . . . . . . . . . . 38
§ 2.11. Энергетический баланс в электрических цепях . . . . . . . . . . 39
§ 2.12. Метод пропорциональных величин . . . . . . . . . . 39
§ 2.13. Метод контурных токов . . . . . . . . . . 40
§ 2.14. Принцип наложения и метод наложения . . . . . . . . . . 44
§ 2.15. Входные и взаимные проводимости ветвей. Входное сопротивление . . . . . . . . . . 45
§ 2.16. Теорема взаимности . . . . . . . . . . 47
§ 2.17. Теорема компенсации . . . . . . . . . . 49
§ 2.18. Линейные соотношения в электрических цепях . . . . . . . . . . 50
§ 2.19. Изменения токов ветвей, вызванные приращением сопротивления одной ветви (теорема вариаций) . . . . . . . . . . 52
§ 2.20. Замена нескольких параллельных ветвей, содержащих источники ЭДС и источники тока, одной эквивалентной . . . . . . . . . . 53
§ 2.21. Метод двух узлов . . . . . . . . . . 55
§ 2.22. Метод узловых потенциалов . . . . . . . . . . 56
§ 2.23. Преобразование звезды в треугольник и треугольника в звезду 60





§ 2.24. Перенос источников ЭДС и источников тока . . . . . . . . . . 63
§ 2.25. Активный и пассивный двухполюсники . . . . . . . . . . 64
§ 2.26. Метод эквивалентного генератора . . . . . . . . . . 64
§ 2.27. Передача энергии от активного двухполюсника нагрузке . . . . 67
§ 2.28. Передача энергии по линии передач . . . . . . . . . . 68
§ 2.29. Некоторые выводы по методам расчета электрических цепей . . 70
§ 2.30. Основные свойства матриц и простейшие операции с ними . . . . 70
§ 2.31. Некоторые топологические понятия и топологические матрицы 71
§ 2.32. Запись уравнений по законам Кирхгофа с помощью топологических матриц . . . . . . . . . . 74
§ 2.33. Обобщенная ветвь электрической цепи . . . . . . . . . . 75
§ 2.34. Вывод уравнений метода контурных токов с помощью топологических матриц . . . . . . . . . . 75
§ 2.35. Вывод уравнений метода узловых потенциалов с помощью топологических матриц[1] . . . . . . . . . . 77
§ 2.36. Соотношения между топологическими матрицами . . . . . . . . . . 77
§ 2.37. Сопоставление матрично-топологического и традиционного направлений теории цепей . . . . . . . . . . 79
*Вопросы для самопроверки* . . . . . . . . . . 80

Глава третья. **Электрические цепи однофазного синусоидального тока** 81

§ 3.1. Синусоидальный ток и основные характеризующие его величины 81
§ 3.2. Среднее и действующее значения синусоидально изменяющейся величины . . . . . . . . . . 82
§ 3.3. Коэффициент амплитуды и коэффициент формы . . . . . . . . . . 83
§ 3.4. Изображение синусоидально изменяющихся величин векторами на комплексной плоскости. Комплексная амплитуда. Комплекс действующего значения . . . . . . . . . . 83
§ 3.5. Сложение и вычитание синусоидальных функций времени на комплексной плоскости. Векторная диаграмма . . . . . . . . . . 85
§ 3.6. Мгновенная мощность . . . . . . . . . . 86
§ 3.7. Резистивный элемент в цепи синусоидального тока . . . . . . . . . . 86
§ 3.8. Индуктивный элемент в цепи синусоидального тока . . . . . . . . . . 87
§ 3.9. Емкостный элемент в цепи синусоидального тока . . . . . . . . . . 89
§ 3.10. Умножение вектора на $j$ и $-j$ . . . . . . . . . . 90
§ 3.11. Основы символического метода расчета цепей синусоидального тока . . . . . . . . . . 91
§ 3.12. Комплексное сопротивление. Закон Ома для цепи синусоидального тока . . . . . . . . . . 92
§ 3.13. Комплексная проводимость . . . . . . . . . . 93
§ 3.14. Треугольник сопротивлений и треугольник проводимостей . . . . 93
§ 3.15. Работа с комплексными числами . . . . . . . . . . 94
§ 3.16. Законы Кирхгофа в символической форме записи . . . . . . . . . . 95
§ 3.17. Применение к расчету цепей синусоидального тока методов, рассмотренных в главе «Электрические цепи постоянного тока» . . . . 96
§ 3.18. Применение векторных диаграмм при расчете электрических цепей синусоидального тока . . . . . . . . . . 97
§ 3.19. Изображение разности потенциалов на комплексной плоскости 100
§ 3.20. Топографическая диаграмма . . . . . . . . . . 100
§ 3.21. Активная, реактивная и полная мощности . . . . . . . . . . 103
§ 3.22. Выражение мощности в комплексной форме записи . . . . . . . . . . 104
§ 3.23. Измерение мощности ваттметром . . . . . . . . . . 105
§ 3.24. Двухполюсник в цепи синусоидального тока . . . . . . . . . . 106
§ 3.25. Резонансный режим работы двухполюсника . . . . . . . . . . 108
§ 3.26. Резонанс токов . . . . . . . . . . 108
§ 3.27. Компенсация сдвига фаз . . . . . . . . . . 110
§ 3.28. Резонанс напряжений . . . . . . . . . . 110

§ 3.29. Исследование работы схемы рис. 3.26, *а* при изменении частоты и индуктивности ... 112
§ 3.30. Частотные характеристики двухполюсников ... 113
§ 3.31. Канонические схемы. Эквивалентные двухполюсники ... 116
§ 3.32. Передача энергии от активного двухполюсника нагрузке ... 117
§ 3.33. Согласующий трансформатор ... 117
§ 3.34. Идеальный трансформатор ... 118
§ 3.35. Падение и потеря напряжения в линии передачи энергии ... 119
§ 3.36. Расчет электрических цепей при наличии в них магнитно-связанных катушек ... 119
§ 3.37. Последовательное соединение двух магнитно-связанных катушек ... 121
§ 3.38. Определение взаимной индуктивности опытным путем ... 122
§ 3.39. Трансформатор. Вносимое сопротивление ... 122
§ 3.40. Резонанс в магнитно-связанных колебательных контурах ... 125
§ 3.41. «Развязывание» магнитно-связанных цепей ... 127
§ 3.42. Теорема о балансе активных и реактивных мощностей (теорема Лонжевена) ... 128
§ 3.43. Теорема Теллегена ... 130
§ 3.44. Определение дуальной цепи ... 130
§ 3.45. Преобразование исходной схемы в дуальную ... 132
*Вопросы для самопроверки* ... 133

Глава четвертая. **Четырехполюсники. Цепи с управляемыми источниками. Круговые диаграммы** ... 135
§ 4.1. Определение четырехполюсника ... 135
§ 4.2. Шесть форм записи уравнений четырехполюсника ... 136
§ 4.3. Вывод уравнений в *A*-форме ... 137
§ 4.4. Определение коэффициентов *A*-формы записи уравнений четырехполюсника ... 139
§ 4.5. Т- и П-схемы замещения пассивного четырехполюсника ... 141
§ 4.6. Определение коэффициентов *Y*-, *Z*-, *G*- и *H*-форм записи уравнений четырехполюсника ... 142
§ 4.7. Определение коэффициентов одной формы уравнений через коэффициенты другой формы ... 142
§ 4.8. Применение различных форм записи уравнений четырехполюсника. Соединения четырехполюсников. Условия регулярности ... 144
§ 4.9. Характеристические и повторные сопротивления четырехполюсников ... 146
§ 4.10. Постоянная передача и единицы измерения затухания ... 147
§ 4.11. Уравнения четырехполюсника, записанные через гиперболические функции ... 148
§ 4.12. Конвертор и инвертор сопротивления ... 148
§ 4.13. Гиратор ... 149
§ 4.14. Операционный усилитель ... 150
§ 4.15. Управляемые источники напряжения (тока) ... 153
§ 4.16. Активный четырехполюсник ... 155
§ 4.17. Многополюсник ... 157
§ 4.18. Построение дуги окружности по хорде и вписанному углу ... 159
§ 4.19. Уравнение дуги окружности в векторной форме записи ... 159
§ 4.20. Круговые диаграммы ... 160
§ 4.21. Круговая диаграмма тока двух последовательно соединенных сопротивлений ... 161
§ 4.22. Круговая диаграмма напряжения двух последовательно соединенных сопротивлений ... 162
§ 4.23. Круговая диаграмма тока активного двухполюсника ... 163
§ 4.24. Круговая диаграмма напряжения четырехполюсника ... 164
§ 4.25. Линейные диаграммы ... 166
*Вопросы для самопроверки* ... 166



Глава пятая. **Электрические фильтры** ... 167
§ 5.1. Назначение и типы фильтров ... 167
§ 5.2. Основы теории *k*-фильтров ... 168
§ 5.3. *K*-фильтры НЧ и ВЧ, полосно-пропускающие и полосно-заграждающие *k*-фильтры ... 171
§ 5.4. Качественное определение *k*-фильтра ... 175
§ 5.5. Основы теории *m*-фильтров. Каскадное включение фильтров ... 176
§ 5.6. *RC*-фильтры ... 180
§ 5.7. Активные *RC*-фильтры ... 180
§ 5.8. Передаточные функции активных *RC*-фильтров в нормированном виде ... 182
§ 5.9. Получение передаточной функции низкочастотного активного *RC*-фильтра, выбор схемы и определение ее параметров ... 183
§ 5.10. Получение передаточной функции полосно-пропускающего активного *RC*-фильтра ... 183
*Вопросы для самопроверки* ... 184

Глава шестая. **Трехфазные цепи** ... 184
§ 6.1. Трехфазная система ЭДС ... 184
§ 6.2. Принцип работы трехфазного машинного генератора ... 185
§ 6.3. Трехфазная цепь. Расширение понятия фазы ... 185
§ 6.4. Основные схемы соединения трехфазных цепей, определение линейных и фазовых величин ... 186
§ 6.5. Соотношения между линейными и фазовыми напряжениями и токами ... 188
§ 6.6. Преимущества трехфазных систем ... 189
§ 6.7. Расчет трехфазных цепей ... 189
§ 6.8. Соединение звезда — звезда с нулевым проводом ... 189
§ 6.9. Соединение нагрузки треугольником ... 190
§ 6.10. Оператор *a* трехфазной системы ... 191
§ 6.11. Соединение звезда — звезда без нулевого провода ... 191
§ 6.12. Трехфазные цепи при наличии взаимоиндукции ... 192
§ 6.13. Активная, реактивная и полная мощности трехфазной системы ... 193
§ 6.14. Измерение активной мощности в трехфазной системе ... 194
§ 6.15. Круговые и линейные диаграммы в трехфазных цепях ... 195
§ 6.16. Указатель последовательности чередования фаз ... 196
§ 6.17. Магнитное поле катушки с синусоидальным током ... 197
§ 6.18. Получение кругового вращающегося магнитного поля ... 197
§ 6.19. Принцип работы асинхронного двигателя ... 199
§ 6.20. Разложение несимметричной системы на системы прямой, обратной и нулевой последовательностей фаз ... 200
§ 6.21. Основные положения метода симметричных составляющих ... 201
*Вопросы для самопроверки* ... 204

Глава седьмая. **Периодические несинусоидальные токи в линейных электрических цепях** ... 204
§ 7.1. Определение периодических несинусоидальных токов и напряжений ... 204
§ 7.2. Изображение несинусоидальных токов и напряжений с помощью рядов Фурье ... 205
§ 7.3. Некоторые свойства периодических кривых, обладающих симметрией ... 206
§ 7.4. О разложении в ряд Фурье кривых геометрически правильной и неправильной форм ... 207
§ 7.5. Графический (графоаналитический) метод определения гармоник ряда Фурье ... 207
§ 7.6. Расчет токов и напряжений при несинусоидальных источниках питания ... 210

§ 7.7. Резонансные явления при несинусоидальных токах ........ 212
§ 7.8. Действующие значения несинусоидального тока и несинусоидального напряжения ........ 213
§ 7.9. Среднее по модулю значение несинусоидальной функции ........ 214
§ 7.10. Величины, которые измеряют амперметры и вольтметры при несинусоидальных токах ........ 214
§ 7.11. Активная и полная мощности несинусоидального тока ........ 215
§ 7.12. Замена несинусоидальных токов и напряжений эквивалентными синусоидальными ........ 216
§ 7.13[1]. Особенности работы трехфазных систем, вызываемых гармониками, кратными трем ........ 216
§ 7.14. Биения ........ 221
§ 7.15. Модулированные колебания ........ 221
§ 7.16. Расчет линейных цепей при воздействии модулированных колебаний ........ 225
*Вопросы для самопроверки* ........ 225

Глава восьмая. **Переходные процессы в линейных электрических цепях** ........ 226

§ 8.1. Определение переходных процессов ........ 226
§ 8.2. Приведение задачи о переходном процессе к решению линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами ........ 227
§ 8.3. Принужденные и свободные составляющие токов и напряжений ........ 228
§ 8.4. Обоснование невозможности скачка тока через индуктивную катушку и скачка напряжения на конденсаторе ........ 230
§ 8.5. Первый закон (правило) коммутации ........ 231
§ 8.6. Второй закон (правило) коммутации ........ 231
§ 8.7. Начальные значения величин ........ 231
§ 8.8. Независимые и зависимые (послекоммутационные) начальные значения ........ 232
§ 8.9. Нулевые и ненулевые начальные условия ........ 232
§ 8.10. Составление уравнений для свободных токов и напряжений ........ 232
§ 8.11. Алгебраизация системы уравнений для свободных токов ........ 233
§ 8.12. Составление характеристического уравнения системы ........ 234
§ 8.13. Составление характеристического уравнения путем использования выражения для входного сопротивления цепи на переменном токе ........ 236
§ 8.14. Основные и неосновные зависимые начальные значения ........ 238
§ 8.15. Определение степени характеристического уравнения ........ 239
§ 8.16. Свойства корней характеристического уравнения ........ 240
§ 8.17. Отрицательные знаки действительных частей корней характеристических уравнений ........ 241
§ 8.18. Характер свободного процесса при одном корне ........ 242
§ 8.19. Характер свободного процесса при двух действительных неравных корнях ........ 242
§ 8.20. Характер свободного процесса при двух равных корнях ........ 243
§ 8.21. Характер свободного процесса при двух комплексно-сопряженных корнях ........ 243
§ 8.22. Некоторые особенности переходных процессов ........ 244
§ 8.23. Переходные процессы, сопровождающиеся электрической искрой (дугой) ........ 245
§ 8.24. Опасные перенапряжения, вызываемые размыканием ветвей в цепях, содержащих индуктивные катушки ........ 245
§ 8.25. Общая характеристика методов анализа переходных процессов в линейных электрических цепях ........ 246
§ 8.26. Определение классического метода расчета переходных процессов ........ 247
§ 8.27. Определение постоянных интегрирования в классическом методе ........ 247
§ 8.28. О переходных процессах, при макроскопическом рассмотрении которых не выполняются законы коммутации. Обобщенные законы коммутации ........ 258
§ 8.29. Логарифм как изображение числа ........ 261
§ 8.30. Комплексные изображения синусоидальных функций ........ 261
§ 8.31. Введение в операторный метод ........ 261
§ 8.32. Преобразование Лапласа ........ 262
§ 8.33. Изображение постоянной ........ 262
§ 8.34. Изображение показательной функции $e^{at}$ ........ 263
§ 8.35. Изображение первой производной ........ 263
§ 8.36. Изображение напряжения на индуктивном элементе ........ 264
§ 8.37. Изображение второй производной ........ 264
§ 8.38. Изображение интеграла ........ 265
§ 8.39. Изображение напряжения на конденсаторе ........ 265
§ 8.40. Некоторые теоремы и предельные соотношения ........ 267
§ 8.41. Закон Ома в операторной форме. Внутренние ЭДС ........ 269
§ 8.42. Первый закон Кирхгофа в операторной форме ........ 271
§ 8.43. Второй закон Кирхгофа в операторной форме ........ 272
§ 8.44. Составление уравнений для изображений путем использования методов, рассмотренных в третьей главе ........ 273
§ 8.45. Последовательность расчета операторным методом ........ 273
§ 8.46. Изображение функции времени в виде отношения $N(p)/M(p)$ двух полиномов по степеням $p$ ........ 275
§ 8.47. Переход от изображения к функции времени ........ 276
§ 8.48. Разложение сложной дроби на простые ........ 277
§ 8.49. Формула разложения ........ 278
§ 8.50. Дополнения к операторному методу ........ 282
§ 8.51. Переходная проводимость ........ 283
§ 8.52. Понятие о переходной функции ........ 285
§ 8.53. Интеграл Дюамеля ........ 287
§ 8.54. Последовательность расчета с помощью интеграла Дюамеля ........ 288
§ 8.55. Применение интеграла Дюамеля при сложной форме напряжения ........ 289
§ 8.56. Сравнение различных методов расчета переходных процессов ........ 291
§ 8.57. Дифференцирование электрическим путем ........ 291
§ 8.58. Интегрирование электрическим путем ........ 292
§ 8.59. Передаточная функция четырехполюсника на комплексной частоте ........ 293
§ 8.60. Переходные процессы при воздействии импульсов напряжения ........ 294
§ 8.61. Дельта-функция, единичная функция и их свойства. Импульсная переходная проводимость ........ 296
§ 8.62. Определение $h(t)$ и $h^{\delta}(t)$ через $K(p)$ ........ 299
§ 8.63. Метод пространства состояний ........ 299
§ 8.64. Дополняющие двухполюсники ........ 305
§ 8.65. Системные функции и понятие о видах чувствительности ........ 305
§ 8.66. Обобщенные функции и их применение к расчету переходных процессов ........ 306
§ 8.67. Интеграл Дюамеля для огибающей ........ 307
*Вопросы для самопроверки* ........ 308

Глава девятая. **Интеграл Фурье. Спектральный метод. Сигналы** ........ 310

§ 9.1. Ряд Фурье в комплексной форме записи ........ 310
§ 9.2. Спектр функции и интеграл Фурье ........ 312
§ 9.3. Спектр функции, смещенной во времени. Спектр суммы функций времени ........ 316
§ 9.4. Теорема Рейли ........ 316
§ 9.5. Применение спектрального метода ........ 317

§ 9.6. Текущий спектр функции времени ........ 322
§ 9.7. Основные сведения по теории сигналов ........ 322
§ 9.8. Узкополосный и аналитический сигналы ........ 324
§ 9.9. Частотный спектр аналитического сигнала ........ 325
§ 9.10. Прямое и обратное преобразование Гильберта ........ 326
*Вопросы для самопроверки* ........ 326

Глава десятая. **Синтез электрических цепей** ........ 327

§ 10.1. Характеристика синтеза ........ 327
§ 10.2. Условия, которым должны удовлетворять входные сопротивления двухполюсников ........ 328
§ 10.3. Реализация двухполюсников лестничной (цепной) схемой ........ 330
§ 10.4. Реализация двухполюсников путем последовательного выделения простейших составляющих ........ 334
§ 10.5. Метод Бруне ........ 338
§ 10.6. Понятие о минимально-фазовом и неминимально-фазовом четырехполюсниках ........ 341
§ 10.7. Синтез четырехполюсников Г-образными и $RC$-схемами ........ 342
§ 10.8. Четырехполюсник для фазовой коррекции ........ 343
§ 10.9. Четырехполюсник для амплитудной коррекции ........ 345
§ 10.10. Аппроксимация частотных характеристик ........ 346
*Вопросы для самопроверки* ........ 349

Глава одиннадцатая. **Установившиеся процессы в электрических и магнитных цепях, содержащих линии с распределенными параметрами** ........ 350

§ 11.1. Основные определения ........ 350
§ 11.2. Составление дифференциальных уравнений для однородной линии с распределенными параметрами ........ 353
§ 11.3. Решение уравнений линии с распределенными параметрами при установившемся синусоидальном процессе ........ 354
§ 11.4. Постоянная распространения и волновое сопротивление ........ 356
§ 11.5. Формулы для определения комплексов напряжения и тока в любой точке линии через комплексы напряжения и тока в начале линии ........ 357
§ 11.6. Графическая интерпретация гиперболических синуса и косинуса от комплексного аргумента ........ 358
§ 11.7. Формулы для определения напряжения и тока в любой точке линии через комплексы напряжения и тока в конце линии ........ 358
§ 11.8. Падающие и отраженные волны в линии ........ 359
§ 11.9. Коэффициент отражения ........ 361
§ 11.10. Фазовая скорость ........ 361
§ 11.11. Длина волны ........ 362
§ 11.12. Линия без искажений ........ 362
§ 11.13. Согласованная нагрузка ........ 363
§ 11.14. Определение напряжения и тока при согласованной нагрузке ........ 364
§ 11.15. Коэффициент полезного действия линии передачи при согласованной нагрузке ........ 364
§ 11.16. Входное сопротивление нагруженной линии ........ 365
§ 11.17. Определение напряжения и тока в линии без потерь ........ 365
§ 11.18. Входное сопротивление линии без потерь при холостом ходе ........ 366
§ 11.19. Входное сопротивление линии без потерь при коротком замыкании на конце линии ........ 367
§ 11.20. Входное сопротивление линии без потерь при реактивной нагрузке ........ 367
§ 11.21. Определение стоячих электромагнитных волн ........ 368
§ 11.22. Стоячие волны в линии без потерь при холостом ходе линии ........ 369
§ 11.23. Стоячие волны в линии без потерь при коротком замыкании на конце линии ........ 369



§ 11.24. Четвертьволновый трансформатор ........ 370
§ 11.25. Бегущие, стоячие и смешанные волны в линиях без потерь. Коэффициенты бегущей и стоячей волн ........ 370
§ 11.26. Аналогия между уравнениями линии с распределенными параметрами и уравнениями четырехполюсника ........ 371
§ 11.27. Замена четырехполюсника эквивалентной ему линией с распределенными параметрами и обратная замена ........ 372
§ 11.28. Четырехполюсник заданного затухания ........ 374
§ 11.29. Цепная схема ........ 375
*Вопросы для самопроверки* ........ 379

Глава двенадцатая. **Переходные процессы в электрических цепях, содержащих линии с распределенными параметрами** ........ 379

§ 12.1. Общие сведения ........ 379
§ 12.2. Исходные уравнения и их решение ........ 380
§ 12.3. Падающие и отраженные волны на линиях ........ 382
§ 12.4. Связь между функциями $f_1$, $f_2$ и функциями $\varphi_1$, $\varphi_2$ ........ 382
§ 12.5. Электромагнитные процессы при движении прямоугольной волны по линии ........ 384
§ 12.6. Схема замещения для исследования волновых процессов в линиях с распределенными параметрами ........ 385
§ 12.7. Подключение разомкнутой на конце линии к источнику постоянного напряжения ........ 386
§ 12.8. Переходный процесс при подключении источника постоянного напряжения к двум последовательно соединенным линиям при наличии емкости в месте стыка линий ........ 389
§ 12.9. Линия задержки ........ 392
§ 12.10. Использование линий для формирования кратковременных импульсов ........ 393
§ 12.11. Исходные положения по применению операторного метода к расчету переходных процессов в линиях ........ 394
§ 12.12. Подключение линии без потерь конечной длины $l$, разомкнутой на конце, к источнику постоянного напряжения ........ 397
§ 12.13. Подключение линии без искажения конечной длины $l$, разомкнутой на конце, к источнику постоянного напряжения $U$ ........ 397
§ 12.14. Подключение бесконечно протяженного кабеля без индуктивности и утечки к источнику постоянного напряжения $U$ ........ 398
§ 12.15. Подключение бесконечно протяженной линии без утечки к источнику постоянного напряжения ........ 399
*Вопросы для самопроверки* ........ 400
**Литература к I части** ........ 402

Часть II. Нелинейные электрические цепи ........ 404

Глава тринадцатая. **Нелинейные электрические цепи постоянного тока** ........ 404

§ 13.1. Основные определения ........ 404
§ 13.2. ВАХ нелинейных разисторов ........ 404
§ 13.3. Общая характеристика методов расчета нелинейных электрических цепей постоянного тока ........ 407
§ 13.4. Последовательное соединение НР ........ 407
§ 13.5. Параллельное соединение НР ........ 409
§ 13.6. Последовательно-параллельное соединение сопротивлений ........ 409
§ 13.7. Расчет разветвленной нелинейной цепи методом двух узлов ........ 410
§ 13.8. Замена нескольких параллельных ветвей, содержащих НР и ЭДС, одной эквивалентной ........ 412
§ 13.9. Расчет нелинейных цепей методом эквивалентного генератора ........ 412

§ 13.10. Статическое и дифференциальное сопротивления ... 414
§ 13.11. Замена нелинейного резистора эквивалентным линейным сопротивлением и ЭДС ... 415
§ 13.12. Стабилизатор тока ... 416
§ 13.13. Стабилизатор напряжения ... 416
§ 13.14. Построение ВАХ участков цепей, содержащих узлы с подтекающими извне токами ... 418
§ 13.15. Диакоптика нелинейных цепей ... 419
§ 13.16. Терморезисторы ... 420
§ 13.17. Фоторезистор и фотодиод ... 420
§ 13.18. Передача максимальной мощности линейной нагрузке от источника с нелинейным внутренним сопротивлением ... 421
§ 13.19. Магниторезисторы и магнитодиоды ... 422
*Вопросы для самопроверки* ... 422

Глава четырнадцатая. **Магнитные цепи** ... 423

§ 14.1. Подразделение веществ на сильномагнитные и слабомагнитные ... 423
§ 14.2. Основные величины, характеризующие магнитное поле ... 423
§ 14.3. Основные характеристики ферромагнитных материалов ... 425
§ 14.4. Потери, обусловленные гистерезисом ... 426
§ 14.5. Магнитомягкие и магнитотвердые материалы ... 428
§ 14.6. Магнитодиэлектрики и ферриты ... 428
§ 14.7. Закон полного тока ... 429
§ 14.8. Магнитодвижущая (намагничивающая) сила ... 429
§ 14.9. Разновидности магнитных цепей ... 430
§ 14.10. Роль ферромагнитных материалов в магнитной цепи ... 430
§ 14.11. Падение магнитного напряжения ... 431
§ 14.12. Вебер-амперные характеристики ... 432
§ 14.13. Построение вебер-амперных характеристик ... 432
§ 14.14. Законы Кирхгофа для магнитных цепей ... 434
§ 14.15. Применение к магнитным цепям всех методов, используемых для расчета электрических цепей с нелинейными резисторами ... 436
§ 14.16. Определение МДС неразветвленной магнитной цепи по заданному току ... 436
§ 14.17. Определение потока в неразветвленной магнитной цепи по заданной МДС ... 438
§ 14.18. Расчет разветвленной магнитной цепи методом двух узлов ... 438
§ 14.19. Дополнительные замечания к расчету магнитных цепей ... 441
§ 14.20. Получение постоянного магнита ... 442
§ 14.21. Расчет магнитной цепи постоянного магнита ... 442
§ 14.22. Прямая и коэффициент возврата ... 444
§ 14.23. Магнитное сопротивление и магнитная проводимость участка магнитной цепи. Закон Ома для магнитной цепи ... 444
§ 14.24. Магнитная линия с распределенными параметрами ... 446
§ 14.25. Пояснения к формуле $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{J})$ ... 448
*Вопросы для самопроверки* ... 449

Глава пятнадцатая. **Нелинейные электрические цепи переменного тока** ... 449

§ 15.1. Подразделение нелинейных элементов ... 449
§ 15.2. Общая характеристика нелинейных разисторов ... 450
§ 15.3. Общая характеристика нелинейных индуктивных элементов ... 451
§ 15.4. Потери в сердечниках нелинейных индуктивных катушек, обусловленные вихревыми токами ... 452
§ 15.5. Потери в ферромагнитном сердечнике, обусловленные гистерезисом ... 452
§ 15.6. Схема замещения нелинейной индуктивной катушки ... 453



... емкостных элементов ... 454
§ 15.8. ... элементы как генераторы высших гармоник тока и напряжения ... 455
§ 15.9. Основные преобразования, осуществляемые с помощью нелинейных электрических цепей ... 456
§ 15.10. Некоторые физические явления, наблюдаемые в нелинейных цепях ... 458
§ 15.11. Разделение нелинейных элементов по степени симметрии характеристик относительно осей координат ... 459
§ 15.12. Аппроксимация характеристик нелинейных элементов ... 460
§ 15.13. Аппроксимация симметричных характеристик для мгновенных значений гиперболическим синусом ... 460
§ 15.14. Понятие о функциях Бесселя ... 462
§ 15.15. Разложение гиперболических синуса и косинуса от периодического аргумента в ряды Фурье ... 463
§ 15.16. Разложение гиперболического синуса от постоянной и синусоидально меняющейся составляющих в ряд Фурье ... 464
§ 15.17. Некоторые общие свойства симметричных нелинейных элементов ... 464
§ 15.18. Появление постоянной составляющей тока (напряжения, потока, заряда) на нелинейном элементе с симметричной характеристикой ... 466
§ 15.19. Типы характеристик нелинейных элементов ... 466
§ 15.20. Характеристики для мгновенных значений ... 466
§ 15.21. ВАХ по первым гармоникам ... 466
§ 15.22. ВАХ для действующих значений ... 468
§ 15.23. Получение аналитическим путем обобщенных характеристик управляемых нелинейных элементов по первым гармоникам ... 469
§ 15.24. Простейшая управляемая нелинейная индуктивная катушка ... 470
§ 15.25. ВАХ управляемой нелинейной индуктивной катушки по первым гармоникам ... 473
§ 15.26. ВАХ управляемого нелинейного конденсатора по первым гармоникам ... 475
§ 15.27. Основные сведения об устройстве биполярного транзистора ... 476
§ 15.28. Основные способы включения биполярных транзисторов в схему ... 477
§ 15.29. Принцип работы биполярного транзистора ... 477
§ 15.30. ВАХ биполярного транзистора ... 479
§ 15.31. Биполярный транзистор в качестве усилителя тока, напряжения, мощности ... 480
§ 15.32. Связь между приращениями входных и выходных величин биполярного транзистора ... 481
§ 15.33. Схема замещения биполярного транзистора для малых приращений. Методика расчета схем с управляемыми источниками с учетом их частотных свойств ... 482
§ 15.34. Графический расчет схем на транзисторах ... 484
§ 15.35. Принцип работы полевого транзистора ... 486
§ 15.36. ВАХ полевого транзистора ... 486
§ 15.37. Схемы включения полевого транзистора ... 486
§ 15.38. Основные сведения о трехэлектродной лампе ... 487
§ 15.39. ВАХ трехэлектродной лампы для мгновенных значений ... 488
§ 15.40. Аналитическое выражение сеточной характеристики электронной лампы ... 489
§ 15.41. Связь между малыми приращениями входных и выходных величин электронной лампы ... 489
§ 15.42. Схема замещения электронной лампы для малых приращений ... 490
§ 15.43. Тиристор — управляемый полупроводниковый диод ... 491
§ 15.44. Общая характеристика методов анализа и расчета нелинейных электрических цепей переменного тока ... 492

§ 15.45. Графический метод расчета при использовании характеристик нелинейных элементов для мгновенных значений ..... 493
§ 15.46. Аналитический метод расчета при использовании характеристик нелинейных элементов для мгновенных значений при их кусочно-линейной аппроксимации ..... 494
§ 15.47. Аналитический (графический) метод расчета по первым гармоникам токов и напряжений ..... 495
§ 15.48. Анализ нелинейных цепей переменного тока путем использования ВАХ для действующих значений ..... 496
§ 15.49. Аналитический метод расчета цепей по первой и одной или нескольким высшим или низшим гармоникам ..... 497
§ 15.50. Расчет цепей с помощью линейных схем замещения ..... 497
§ 15.51. Расчет цепей, содержащих индуктивные катушки, сердечники которых имеют почти прямоугольную кривую намагничивания ..... 498
§ 15.52. Расчет цепей, содержащих нелинейные конденсаторы с прямоугольной кулон-вольтной характеристикой ..... 500
§ 15.53. Выпрямление переменного напряжения ..... 500
§ 15.54. Автоколебания ..... 503
§ 15.55. Мягкое и жесткое возбуждение автоколебаний ..... 504
§ 15.56. Определение феррорезонансных цепей ..... 505
§ 15.57. Построение ВАХ последовательной феррорезонансной цепи ..... 506
§ 15.58. Триггерный эффект в последовательной феррорезонансной цепи. Феррорезонанс напряжений ..... 506
§ 15.59. ВАХ параллельного соединения конденсатора и катушки со стальным сердечником. Феррорезонанс токов ..... 508
§ 15.60. Триггерный эффект в параллельной феррорезонансной цепи ..... 508
§ 15.61. Частотные характеристики нелинейных цепей ..... 509
§ 15.62. Применение символического метода для расчета нелинейных цепей. Построение векторных и топографических диаграмм ..... 510
§ 15.63. Метод эквивалентного генератора ..... 512
§ 15.64. Векторная диаграмма нелинейной индуктивной катушки ..... 513
§ 15.65. Определение намагничивающего тока ..... 515
§ 15.66. Определение тока потерь ..... 516
§ 15.67. Основные соотношения для трансформатора со стальным сердечником ..... 517
§ 15.68. Векторная диаграмма трансформатора со стальным сердечником ..... 521
§ 15.69. Субгармонические колебания. Многообразие типов движений в нелинейных цепях ..... 522
§ 15.70. Автомодуляция. Хаотические колебания (странные аттракторы) ..... 524
*Вопросы для самопроверки* ..... 527

Глава шестнадцатая. **Переходные процессы в нелинейных электрических цепях** ..... 528

§ 16.1. Общая характеристика методов анализа и расчета переходных процессов ..... 528
§ 16.2. Расчет, основанный на графическом подсчете определенного интеграла ..... 529
§ 16.3. Расчет методом интегрируемой нелинейной аппроксимации ..... 530
§ 16.4. Расчет методом кусочно-линейной аппроксимации ..... 531
§ 16.5. Расчет переходных процессов в нелинейных цепях методом переменных состояния на ЭВМ ..... 532
§ 16.6. Метод медленно меняющихся амплитуд ..... 533
§ 16.7. Метод малого параметра ..... 537
§ 16.8. Метод интегральных уравнений ..... 541
§ 16.9. Переходные процессы в цепях с терморезисторами ..... 542



… индуктивными элементами ..... 545
§ 16.11. Переходные процессы в нелинейных электромеханических системах ..... 546
§ 16.12. Переходные процессы в схемах с управляемыми источниками с учетом их нелинейных и частотных свойств ..... 547
§ 16.13. Перемагничивание ферритовых сердечников импульсами тока ..... 548
§ 16.14. Фазовая плоскость и характеристика областей ее применения ..... 550
§ 16.15. Интегральные кривые, фазовая траектория и предельный цикл ..... 550
§ 16.16. Изображение простейших процессов на фазовой плоскости ..... 551
§ 16.17. Изоклины. Особые точки. Построение фазовых траекторий ..... 552
*Вопросы для самопроверки* ..... 554

Глава семнадцатая. **Основы теории устойчивости режимов работы нелинейных цепей** ..... 555

§ 17.1. Устойчивость "в малом" и "в большом". Устойчивость по Ляпунову ..... 555
§ 17.2. Общие основы исследования устойчивости "в малом" ..... 556
§ 17.3. Исследование устойчивости состояния равновесия в системах с постоянной вынуждающей силой ..... 558
§ 17.4. Исследование устойчивости автоколебаний и вынужденных колебаний по первой гармонике ..... 560
§ 17.5. Исследование устойчивости состояния равновесия в генераторе релаксационных колебаний ..... 562
§ 17.6. Исследование устойчивости периодического движения в ламповом генераторе синусоидальных колебаний ..... 564
§ 17.7. Исследование устойчивости работы электрических цепей, содержащих управляемые источники напряжения (тока) с учетом их неидеальности ..... 564
*Вопросы для самопроверки* ..... 565

Глава восемнадцатая. **Электрические цепи с переменными во времени параметрами** ..... 565

§ 18.1. Элементы цепей ..... 565
§ 18.2. Общие свойства электрических цепей ..... 566
§ 18.3. Расчет электрических цепей в установившемся режиме ..... 568
§ 18.4. Параметрические колебания ..... 571
§ 18.5. Параметрические генератор и усилитель ..... 573
*Вопросы для самопроверки* ..... 574

**Литература к II части** ..... 576

**Приложения** ..... 578
***Приложение А*** ..... 578
Направленные и ненаправленные графы ..... 578
§ А.1. Характеристика двух направлений в теории графов ..... 578
**I. Направленные графы** ..... 578
§ А.2. Основные определения ..... 578
§ А.3. Переход от изучаемой системы к направленному графу ..... 579
§ А.4. Общая формула для передачи направленного (сигнального) графа ..... 581
**II. Ненаправленные графы** ..... 583
§ А.5. Определение и основная формула ..... 583
§ А.6. Определение числа деревьев графа ..... 584
§ А.7. Разложение определителя по путям между двумя произвольно выбранными узлами ..... 584
§ А.8. Применение основной формулы ..... 585
§ А.9. Сопоставление направленных и ненаправленных графов ..... 588
***Приложение Б*** ..... 589

Имитированные элементы электрических цепей . . . . . 589
*Приложение* В . . . . . 593
Исследование процессов в неэлектрических системах на электрических моделях-аналогах . . . . . 593
*Приложение* Г . . . . . 595
Случайные процессы в электрических цепях . . . . . 595
§ Г.1. Случайные процессы. Корреляционные функции . . . . . 595
§ Г.2. Прямое и обратное преобразования Фурье для случайных функций времени . . . . . 597
§ Г.3. Белый шум и его свойства . . . . . 597
§ Г.4. Источники внутренних шумов в электрических цепях . . . . . 598
*Приложение* Д . . . . . 599
Дискретные сигналы и их обработка . . . . . 599
§ Д.1. Теорема Котельникова . . . . . 599
§ Д.2. Частотный спектр дискретизированного сигнала . . . . . 600
§ Д.3. Дискретизация частотного спектра . . . . . 601
§ Д.4. Прямое преобразование Фурье дискретизированного сигнала . . . . . 602
§ Д.5. Определение непрерывного сигнала $x(t)$ по коэффициентам ДПФ . . . . . 603
§ Д.6. Обратное дискретное преобразование Фурье . . . . . 603
§ Д.7. Вычисление дискретного преобразования Фурье. Быстрое преобразование Фурье . . . . . 604
§ Д.8. Дискретная свертка во временной и частотной областях . . . . . 604
*Приложение* Е . . . . . 606
Частотные преобразования . . . . . 606
§ Е.1. Классификация частотных преобразований . . . . . 606
§ Е.2. Частотные преобразования первого рода . . . . . 606
§ Е.3. Частотные преобразования второго рода . . . . . 609
§ Е.4. Частотные преобразования цепей с распределенными параметрами . . . . . 610
§ Е.5. Преобразование Брутона . . . . . 611
*Приложение* Ж . . . . . 613
$Z$-преобразование цифровых сигналов . . . . . 613
§ Ж.1. Прямое $Z$-преобразование цифровых сигналов . . . . . 613
§ Ж.2. Решение дифференциальных уравнений путем сведения их к разностным . . . . . 614
§ Ж.3. Дискретная свертка . . . . . 615
§ Ж.4. Теорема смещения для цифрового сигнала . . . . . 615
§ Ж.5. Передаточная функция цифрового четырехполюсника . . . . . 616
§ Ж.6. Соответствие между комплексной частотой $p$ и параметром $z$ дискретного $z$-преобразования . . . . . 616
§ Ж.7. Обратное $z$-преобразование . . . . . 617
§ Ж.8. Соответствие между полюсами аналогового и цифрового четырехполюсников . . . . . 618
§ Ж.9. Переход от передаточной функции аналогового четырехполюсника к передаточной функции соответствующего цифрового . . . . . 619
*Приложение* З . . . . . 620
Цифровые фильтры . . . . . 620
§ З.1. Введение . . . . . 620
§ З.2. Элементная база цифровых фильтров . . . . . 620
§ З.3. Классификация цифровых фильтров по виду передаточной функции $K(z)$ . . . . . 620
§ З.4. Алгоритм получения передаточной функции цифрового фильтра . . . . . 621
§ З.5. Зависимость модуля и аргумента $K(z)$ от частоты . . . . . 622
§ З.6. Частотные преобразования цифровых фильтров . . . . . 622
§ З.7. Реализация передаточных функций цифровых фильтров . . . . . 623

Учебное издание

**Бессонов Лев Алексеевич**

**ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ**

**Электрические цепи**

Редактор В. В. Пащенкова
Художник В. В. Гарбузов
Художественный редактор Т. М. Скворцова
Технические редакторы Л. А. Муравьева, В. М. Романова
Корректор Г. А. Чечеткина

ИБ № 9206

Л Р № 010146 от 25.12.91. Изд. № РЭ-4. Сдано в набор 13.10.94. Подписано в печать 01.12.95. Формат 60×88 1/16. Бум. тип. № 2. Гарнитура литературная. Печать офсетная. Объем 39,20 усл.печ.л. 39,20 усл.кр.-отт. 38,32 уч.-изд.л. Тираж 8000. Зак. № 683
Издательство "Высшая школа", 101430, Москва, ГСП-4, Неглинная ул., д. 29/14.

Отпечатано в АООТ "Политех-4". 129110, Москва, Б. Переяславская ул., 46.

Бессонов Л. А.
Б 53 Теоретические основы электротехники. Электрические цепи: Учеб. для электротехн., энерг., приборостроит. спец. вузов — 9-е изд., перераб. и доп.— М.:Высш. шк., 1996.—638 с.: ил.
ISBN 5-06-002160-2

В книге рассмотрены линейные и нелинейные электрические цепи. В 9-м
издании (8-е в 1984 г.) переработаны и дополнены все главы. Включен новый
материал: цифровые сигналы и их обработка, цифровые фильтры, имитиро-
ванные элементы, преобразование Брутона, теорема Теллегена, странные ат-
тракторы, основы диакоптики нелинейных цепей и др. Переработаны и допол-
нены вопросы и задачи для самопроверки. Даны примеры задач по всем
разделам курса.

Б $\frac{2202020000-002}{001(01)-96}$ 56—96

ББК 31.21
6П2.1